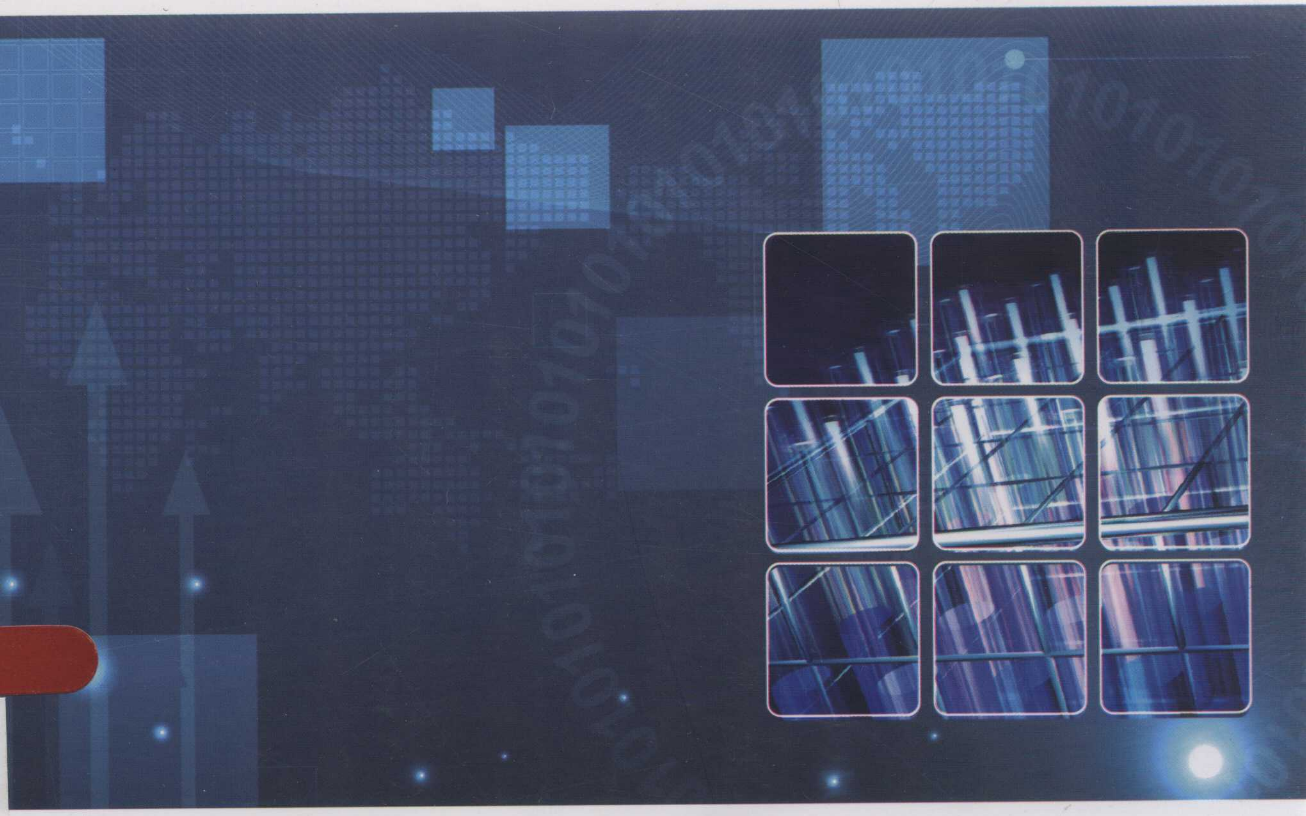
普通高等教育“十二五”规划教材

〔第二版〕

线性代数

XIANXINGDAISHU

袁德正◎主　编



科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

线性代数

（第二版）

袁德正　主　编
周友明　副主编
刘仁南　牟善志　参　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换。每节附有习题，每章附有综合习题。

本书既可作为普通高等院校非数学专业线性代数教材，也可作为科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/袁德正主编．—2版．—北京：科学出版社，2014
(普通高等教育"十二五"规划教材)
ISBN 978-7-03-039640-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①袁… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第016323号

责任编辑：杨 阳 刘文军 苑文环／责任校对：王万红
责任印制：吕春珉／封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2014年3月第 二 版 印张：11 3/4
2014年3月第七次印刷 字数：240 000

定价：26.00元(含光盘)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新科〉)
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62148322

第二版前言

本书第一版自2008年出版以来，共印刷了6次，是江苏省高等学校的精品教材．随着我国高等教育从精英教育向大众化教育的转变，现代教育技术手段在教学中得到广泛应用，基于近几年非重点二本院校的教学特点、要求及研究生考试需求，我们重新修订了本书，以满足此类院校非数学专业培养应用型人才的线性代数课程的教学需要.

本书保留了第一版的系统和风格，知识结构条理清晰，重点突出；在线性代数的概念、定理的叙述上由浅入深，由具体到抽象，由特殊到一般，通俗易懂；内容上采用模块化编写方式，突出线性代数基础知识的实用性，具有教学进度可控性和教学内容可选性的优点．

本次修订根据不同的教学要求和分层教学的需要，修改了一些内容、例题，并增加了一些习题，使得习题的题型更加广泛．内容上能使学生在掌握线性代数的基本概念和方法的同时得到数学素养的熏陶和逻辑思维训练，从而进一步提高学生的学习能力、综合能力，体现以人为本、分层培养学生的教学理念，有利于应用型人才的培养．在本次修订中，我们对本书进行了立体化教学设计，并配以电子教案，希望能更好地满足高校教师课堂教学与学生自主学习的需要.

本次修订得到了科学出版社的帮助和支持，在此深表感谢．本书难免存在不足之处，欢迎专家、同行和读者给予批评、指正．

编　者

2013年10月

第一版前言

线性代数是一门基础数学课程。它的基本概念、理论和方法在自然学科和社会学科中有着广泛的应用，是解决实际问题的有力数学工具．

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换．

本书是由教学经验丰富的教师在多年教学研究的基础上编写而成的．编写时，我们依据普通高等院校的教学基本要求，结合二本院校扩招后的教学和考研的要求，在选材和叙述上尽量做到由浅入深，由具体到抽象，由特殊到一般，力求语言精炼，通俗易懂，淡化纯理论推导内容，增加实用性例题和习题，旨在使读者掌握线性代数的基础知识，提高分析问题、解决问题的能力．编写时，我们既考虑各章节的相互联系，也考虑各章节的独立性，便于教与学．讲授时可根据不同专业，不同学时，增减部分章节的内容．每一节配备了习题，每一章末有综合习题，这些习题较每节习题有一定难度和技巧，学生可根据实际情况和要求选做，以加深、拓宽知识面．书末附有习题答案和提示，供读者参考．

本书可以作为普通高等院校非数学专业线性代数教材，也可供有关科技人员参考．

书中如有不妥之处，恳请读者批评、指正．

目录

第1章 行 列 式

行列式是线性代数的重要组成部分．本章讨论线性方程组与行列式的关系，采用降阶方法引入行列式定义，讨论行列式的性质，给出如何计算行列式以及利用行列式求解方程组的方法．

1.1 线性方程组与行列式

多元一次线性方程组是许多实际问题中常遇到的一种数学模型．例如：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

分别是二元和三元线性方程组．x_1,x_2,x_3 是未知量，a_{ij} 表示第 i 个方程第 j 个未知量的系数，b_i 是第 i 个方程的常数项．利用消元法求解方程组(1.1)，得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1, \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得到方程组(1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

x_1,x_2 表达式中的分母是相同的，引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

则称这个符号为**二阶行列式**，也称为方程组(1.1)的**系数行列式**．构成二阶行列式的四个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素**．它们排成两行两列，a_{ij} 叫做第 i 行第 j 列元素，下标 i 表示元素所在的行，称为**行指标**；下标 j 表示元素所在的列，称为**列指标**．二阶行列式也可以用画线的方法，即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积加以记忆．

按照式(1.3)，如果再记二阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则方程组(1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

这里 $D_j(j=1,2)$ 恰好是 D 中第 j 列元素被 b_1，b_2 代替后所得到的二阶行列式．

例 1.1 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$，$\lambda$ 取何值时 $D\neq 0$？取何值时 $D=0$？

解 $$D=\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3).$$

当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 3$ 时，$D\neq 0$；当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，$D=0$．

以上是二阶行列式的定义，我们同样可以定义**三阶行列式**为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

这里各实线连接的三个元素的乘积是式(1.4)代数和中在前面取正号的项，各虚线连接的三个元素的乘积是上式代数和中在前面取负号的项，这种定义称为**沙路法定义**．

有了三阶行列式的定义，对于线性方程组(1.2)，当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，利用消元法求解，可得方程组(1.2)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

这里$D_j(j=1,2,3)$是D中第j列元素依次被b_1，b_2，b_3代替后得到的三阶行列式．

例 1.2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_2-x_3=1, \\ 3x_2-3x_3=-2. \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}=-3,$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix}=2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}=-5,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-7,$$

得方程组的解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{5}{3},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{7}{3}.$$

例 1.3 a,b满足什么条件时，行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0?$$

解 因为$D=a^2+b^2$，所以只有当$a=b=0$时，行列式$D=0$.

习 题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

2. λ取何值时，行列式$\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ -\lambda^2 & 1 \end{vmatrix}=0$?

3. x取何值时，行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq 0$?

4. 行列式$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$的充分必要条件是什么?

1.2 n阶行列式的概念及其性质

1.1节定义了二阶和三阶行列式,但是这种定义二阶、三阶行列式的方法,对于$n>3$的n阶行列式已失去统一运算规则.本节采用递推的方法来定义n阶行列式.对于三阶行列式,我们不难发现

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

记

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

分别称A_{11},A_{12},A_{13}为a_{11},a_{12},a_{13}的代数余子式,称

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

为三阶行列式按第一行展开.

同样,二阶行列式按第一行展开为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12},$$

其中

$$A_{11}=(-1)^{1+1}a_{22}, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}a_{21}$$

分别为a_{11},a_{12}的代数余子式.

下面给出n阶行列式的定义.

1.2.1 n阶行列式的定义

定义1.1 $n=1$时,一阶行列式定义为$|a_{11}|=a_{11}$,$n\geqslant 2$时,设已定义了$n-1$阶行列式,则由n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的n阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}, \tag{1.6}$$

其中

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j},$$

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 M_{1j} 为 a_{1j} 的**余子式**,它是由 D 中去掉 a_{1j} 所在的第一行和第 j 列元素后,剩余的 $(n-1)^2$ 个元素按 D 中原有顺序组成的 $n-1$ 阶行列式;A_{1j} 称为 a_{1j} 的**代数余子式**;a_{ij} 叫做第 i 行第 j 列**元素**,i 叫做**行指标**,j 叫做**列指标**;$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为行列式的**主对角线元素**;称式(1.6)为行列式 D **按第一行展开**. 同样我们可以定义 a_{ij} 的余子式为

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.7}$$

它是由 D 中去掉 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素后,剩余 $(n-1)^2$ 个元素按 D 中原有顺序组成的 $n-1$ 阶行列式. 定义元素 a_{ij} 的代数余子式为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots,n. \tag{1.8}$$

由定义看到:n 阶行列式是由 n^2 个数组成的,共有 n 行 n 列的一个算式,依次展开式(1.6) 中的行列式,不难看出,这个算式是由行列式的元素乘积构成的和式,称为 D 的展开式,展开式中每一项乘积是 D 中不同行不同列的 n 个元素的乘积. n 阶行列式展开式中有 n! 项且带正号和负号项各占一半.

例 1.4 证明 n 阶下三角行列式(当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$,即主对角线以上元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\overset{\text{记}}{=}\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

证明 对阶数 n 作数学归纳法,当 $n=1$ 时,结论显然成立,假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立,则由定义得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式,根据归纳法假设得

$$D=a_{11}(a_{22}\cdots a_{nn})=\prod_{i=1}^{n}a_{ii},$$

这里"Π"是连乘号．

同理可证明上三角行列式(主对角线以下元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii},$$

式中"∗"表示主对角线以上元素为任意数,"O"表示主对角线以下元素全为零．由此可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii};\quad \begin{vmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{vmatrix}=1.$$

例 1.5 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} O & & & a_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & * \\ a_1 & & & \end{vmatrix}$.

解 由行列式的定义得

$$D_n=(-1)^{1+n}a_n\begin{vmatrix} O & & & a_{n-1} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & * \\ a_1 & & & \end{vmatrix}=(-1)^{1+n}a_nD_{n-1}=(-1)^{n-1}a_nD_{n-1}.$$

上式这种 D_n 与 D_{n-1} 的关系,通常称为**递推公式**．依次递推,可得

$$\begin{aligned} D_n &=(-1)^{n-1}a_n\ (-1)^{n-2}a_{n-1}D_{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &=(-1)^{n-1+n-2+\cdots+1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}a_i. \end{aligned}$$

本题需要注意的一点是对于一般的 n 而言,$D_n\neq -a_1a_2\cdots a_n$.

1.2.2 行列式的性质

首先,我们给出等价于行列式定义的一个引理．

引理 1.1 行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1},\tag{1.9}$$

称为行列式 D 按第一列展开．该引理说明行列式按第一行展开等于行列式按第一列展开．

证明 对 n 用数学归纳法．

当 $n=2$ 时，式(1.9)显然成立．假设对阶数小于 n 的行列式成立，考虑 n 阶情况，由行列式定义 1.1 知

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

$$=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j},$$

其中

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 $n-1$ 阶行列式，按归纳法，M_{1j} 可按第一列展开，行指标 $i=2$ 处于 M_{1j} 的第一行的位置，所以

$$M_{1j}=\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i-1+1}(M_{1j})_{i1}=\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i}(M_{1j})_{i1}, \quad (j\neq 1),$$

其中 $(M_{1j})_{i1}$ 是 M_{1j} 中 a_{i1} 的余子式($i=2,3,\cdots,n$)，它是 D 中先去掉第一行和第 j 列($j\neq 1$)，再去掉第 i 行和第一列所得的行列式，它与先去掉第 i 行($i\neq 1$)和第一列，再去掉第一行和第 j 列所得的行列式相同，即

$$(M_{1j})_{i1}=(M_{i1})_{1j},$$

所以

$$\begin{aligned} D&=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} \\ &=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}\Big[\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i}(M_{1j})_{i1}\Big] \\ &=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}\Big[\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i}(M_{i1})_{1j}\Big] \\ &=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+j+i}a_{1j}a_{i1}(M_{i1})_{1j} \\ &=a_{11}A_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{1+i}\Big[\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{j}(M_{i1})_{1j}\Big] \\ &=a_{11}A_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} \\ &=a_{11}A_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}A_{i1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}, \end{aligned}$$

此式恰好是 D 按第一列展开式．在以上证明中，我们用了双重连加号求和的性质，即

$$\sum_i\sum_j a_{ij}=\sum_j\sum_i a_{ij} \text{ 以及} \sum_i a_i\sum_j b_j=\sum_i\sum_j a_ib_j=\sum_j\sum_i a_ib_j.$$

行列式的行和列按照原顺序互换,所得行列式记作 D^{T},即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.

性质 1.1 行列式转置后其值不变,即

$$D^{\mathrm{T}}=D. \tag{1.10}$$

证明 对行列式阶数 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时结论显然成立,假设对 $n-1$ 阶行列式结论成立,对于 n 阶行列式,由引理 1.1 将 D^{T} 按第一列展开

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}^{\mathrm{T}},$$

而 M_{1j}^{T} 是 $n-1$ 阶行列式,由假设知

$$M_{1j}^{\mathrm{T}}=M_{1j},$$

所以

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}=D.$$

我们将行列式按第一行(列)的展开式推广到一般情形,则得到下列性质.

性质 1.2 行列式 D 等于它任意一行(列)的元素与它的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}. \tag{1.11}$$

性质 1.2 说明行列式按任一行(列)展开,其值不变.

这个性质也可用数学归纳法证明,方法类似于引理 1.1,这里从略.

性质 1.3 如果行列式某行(列)的所有元素都有公因子 k,则公因子 k 可以提到行列式的外面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

证明 利用性质 1.2,左边按第 i 行展开

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}) \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

推论 1.1 如果行列式某行(列)元素全为零,则行列式的值为零.

性质 1.4 如果行列式某行(列)的每个元素可以写成两个元素之和,则此行列式可以写成两个行列式的和,即

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

证明 利用性质 1.2,左边按第 i 行展开,可得右边结果.

性质 1.5 如果行列式中有两行(列)的元素对应相等,则行列式的值为零,即 $a_{ik}=a_{jk}$, $i\neq j$, $k=1,2,\cdots,n$ 时,有