



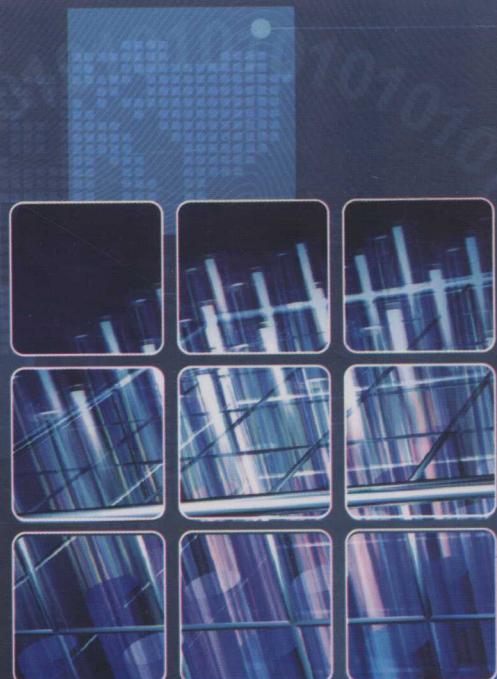
普通高等教育“十二五”规划教材

[第二版]

线性代数

XIANXINGDAISHU

袁德正◎主 编



科学出版社

014037559

0151.2-43

76-2

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

(第二版)

袁德正 主编

周友明 副主编

刘仁南 牟善志 参编



编者
2012年10月

责任编辑：董青

封面设计：董青

印制：北京中通国脉通信技术有限公司

出版地：北京 书名：线性代数(第二版)

开本：787×1092mm² 1/16

印张：3.5 字数：300千字

印数：0001—3000 定价：32.00元

（盗版必究）

科学出版社

北京 010-64030555 13201121303



北航

C1725611

0151.2-43
P 76-2

014031223

普通高等教育“十二五”规划教材

内 容 简 介

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换。每节附有习题，每章附有综合习题。

本书既可作为普通高等院校非数学专业线性代数教材，也可作为科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/袁德正主编. —2 版. —北京: 科学出版社, 2014

(普通高等教育“十二五”规划教材)

ISBN 978 - 7 - 03 - 039640 - 2

I. ①线… II. ①袁… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 016323 号

责任编辑: 杨 阳 刘文军 范文环 / 责任校对: 王万红

责任印制: 吕春珉 / 封面设计: 东方人华平面设计部

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

* 2008年8月第一版 开本: 787×1092 1/16

2014年3月第二版 印张: 11 3/4

2014年3月第七次印刷 字数: 240 000

定价: 26.00 元(含光盘)

(如有印装质量问题, 我社负责调换<新科>)

销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62148322

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-64030229; 010-64034315; 13501151303

第二版前言

本书第一版自 2008 年出版以来,共印刷了 6 次,是江苏省高等学校的精品教材。随着我国高等教育从精英教育向大众化教育的转变,现代教育技术手段在教学中得到广泛应用,基于近几年非重点二本院校的教学特点、要求及研究生考试需求,我们重新修订了本书,以满足此类院校非数学专业培养应用型人才的线性代数课程的教学需要。

本书保留了第一版的系统和风格,知识结构条理清晰,重点突出;在线性代数的概念、定理的叙述上由浅入深,由具体到抽象,由特殊到一般,通俗易懂;内容上采用模块化编写方式,突出线性代数基础知识的实用性,具有教学进度可控性和教学内容可选性的优点。

本次修订根据不同的教学要求和分层教学的需要,修改了一些内容、例题,并增加了一些习题,使得习题的题型更加广泛。内容上能使学生在掌握线性代数的基本概念和方法的同时得到数学素养的熏陶和逻辑思维训练,从而进一步提高学生的学习能力、综合能力,体现以人为本、分层培养学生的教学理念,有利于应用型人才的培养。在本次修订中,我们对本书进行了立体化教学设计,并配以电子教案,希望能更好地满足高校教师课堂教学与学生自主学习的需要。

本次修订得到了科学出版社的帮助和支持,在此深表感谢。本书难免存在不足之处,欢迎专家、同行和读者给予批评、指正。

编 者

2013 年 10 月

第一版前言

线性代数是一门基础数学课程。它的基本概念、理论和方法在自然学科和社会学科中有着广泛的应用，是解决实际问题的有力数学工具。

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换。

本书是由教学经验丰富的教师在多年教学研究的基础上编写而成的。编写时，我们依据普通高等院校的教学基本要求，结合二本院校扩招后的教学和考研的要求，在选材和叙述上尽量做到由浅入深，由具体到抽象，由特殊到一般，力求语言精炼，通俗易懂，淡化纯理论推导内容，增加实用性例题和习题，旨在使读者掌握线性代数的基础知识，提高分析问题、解决问题的能力。编写时，我们既考虑各章节的相互联系，也考虑各章节的独立性，便于教与学。讲授时可根据不同专业，不同学时，增减部分章节的内容。每一节配备了习题，每一章末有综合习题，这些习题较每节习题有一定难度和技巧，学生可根据实际情况和要求选做，以加深、拓宽知识面。书末附有习题答案和提示，供读者参考。

本书可以作为普通高等院校非数学专业线性代数教材，也可供有关科技人员参考。

书中如有不妥之处，恳请读者批评、指正。

2.1 行列式的概念	1
2.2 行列式的性质	10
2.3 矩阵的乘法	12
2.4 矩阵的逆矩阵	15
2.5 分块矩阵与对角矩阵	17
2.6 对称矩阵	19
2.7 方阵的行列式	21
2.8 线性方程组	23
2.9 线性方程组的解法	25
2.10 线性方程组的解的结构	28
2.11 线性方程组的求解	31
2.12 线性方程组的应用	33
习题2.1	35
习题2.2	36
习题2.3	37
习题2.4	38
习题2.5	39
习题2.6	40
习题2.7	41
习题2.8	42
习题2.9	43
习题2.10	44
习题2.11	45
习题2.12	46
3.1 分块矩阵	47
3.2 分块矩阵的加法	48
3.3 分块矩阵的乘法	50
3.4 分块矩阵的逆矩阵	52
3.5 分块矩阵的对角矩阵	54
3.6 分块矩阵的行列式	56
3.7 分块矩阵的线性方程组	58
3.8 分块矩阵的应用	60
习题3.1	61
习题3.2	62
习题3.3	63
习题3.4	64
习题3.5	65
习题3.6	66
习题3.7	67
习题3.8	68
4.1 分块矩阵的加法	69
4.2 分块矩阵的乘法	71
4.3 分块矩阵的逆矩阵	73
4.4 分块矩阵的对角矩阵	75
4.5 分块矩阵的行列式	77
4.6 分块矩阵的线性方程组	79
4.7 分块矩阵的应用	81
习题4.1	82
习题4.2	83
习题4.3	84
习题4.4	85
习题4.5	86
习题4.6	87
习题4.7	88
5.1 线性方程组	89
5.2 线性方程组的解法	90
5.3 线性方程组的解的结构	92
5.4 线性方程组的求解	94
5.5 线性方程组的应用	96
习题5.1	97
习题5.2	98
习题5.3	99
习题5.4	100
习题5.5	101
6.1 线性空间	102
6.2 线性子空间	104
6.3 线性空间的基与维数	106
6.4 线性空间的坐标与基变换	108
6.5 线性空间的同构	110
6.6 线性映射	112
6.7 线性映射的核与像	114
6.8 线性映射的像空间	116
6.9 线性映射的复合	118
6.10 线性映射的逆映射	120
6.11 线性映射的矩阵表示	122
6.12 线性映射的运算	124
6.13 线性映射的逆矩阵	126
6.14 线性映射的特征值与特征向量	128
6.15 线性映射的特征多项式	130
6.16 线性映射的特征值与特征向量的计算	132
6.17 线性映射的特征值与特征向量的应用	134
6.18 线性映射的相似矩阵	136
6.19 线性映射的对角化	138
6.20 线性映射的对称性	140
6.21 线性映射的合同性	142
6.22 线性映射的正交性	144
6.23 线性映射的正交矩阵	146
6.24 线性映射的正交矩阵的应用	148
6.25 线性映射的正交矩阵的应用	150
6.26 线性映射的正交矩阵的应用	152
6.27 线性映射的正交矩阵的应用	154
6.28 线性映射的正交矩阵的应用	156
6.29 线性映射的正交矩阵的应用	158
6.30 线性映射的正交矩阵的应用	160
6.31 线性映射的正交矩阵的应用	162
6.32 线性映射的正交矩阵的应用	164
6.33 线性映射的正交矩阵的应用	166
6.34 线性映射的正交矩阵的应用	168
6.35 线性映射的正交矩阵的应用	170
6.36 线性映射的正交矩阵的应用	172
6.37 线性映射的正交矩阵的应用	174
6.38 线性映射的正交矩阵的应用	176
6.39 线性映射的正交矩阵的应用	178
6.40 线性映射的正交矩阵的应用	180
6.41 线性映射的正交矩阵的应用	182
6.42 线性映射的正交矩阵的应用	184
6.43 线性映射的正交矩阵的应用	186
6.44 线性映射的正交矩阵的应用	188
6.45 线性映射的正交矩阵的应用	190
6.46 线性映射的正交矩阵的应用	192
6.47 线性映射的正交矩阵的应用	194
6.48 线性映射的正交矩阵的应用	196
6.49 线性映射的正交矩阵的应用	198
6.50 线性映射的正交矩阵的应用	200
6.51 线性映射的正交矩阵的应用	202
6.52 线性映射的正交矩阵的应用	204
6.53 线性映射的正交矩阵的应用	206
6.54 线性映射的正交矩阵的应用	208
6.55 线性映射的正交矩阵的应用	210
6.56 线性映射的正交矩阵的应用	212
6.57 线性映射的正交矩阵的应用	214
6.58 线性映射的正交矩阵的应用	216
6.59 线性映射的正交矩阵的应用	218
6.60 线性映射的正交矩阵的应用	220
6.61 线性映射的正交矩阵的应用	222
6.62 线性映射的正交矩阵的应用	224
6.63 线性映射的正交矩阵的应用	226
6.64 线性映射的正交矩阵的应用	228
6.65 线性映射的正交矩阵的应用	230
6.66 线性映射的正交矩阵的应用	232
6.67 线性映射的正交矩阵的应用	234
6.68 线性映射的正交矩阵的应用	236
6.69 线性映射的正交矩阵的应用	238
6.70 线性映射的正交矩阵的应用	240
6.71 线性映射的正交矩阵的应用	242
6.72 线性映射的正交矩阵的应用	244
6.73 线性映射的正交矩阵的应用	246
6.74 线性映射的正交矩阵的应用	248
6.75 线性映射的正交矩阵的应用	250
6.76 线性映射的正交矩阵的应用	252
6.77 线性映射的正交矩阵的应用	254
6.78 线性映射的正交矩阵的应用	256
6.79 线性映射的正交矩阵的应用	258
6.80 线性映射的正交矩阵的应用	260
6.81 线性映射的正交矩阵的应用	262
6.82 线性映射的正交矩阵的应用	264
6.83 线性映射的正交矩阵的应用	266
6.84 线性映射的正交矩阵的应用	268
6.85 线性映射的正交矩阵的应用	270
6.86 线性映射的正交矩阵的应用	272
6.87 线性映射的正交矩阵的应用	274
6.88 线性映射的正交矩阵的应用	276
6.89 线性映射的正交矩阵的应用	278
6.90 线性映射的正交矩阵的应用	280
6.91 线性映射的正交矩阵的应用	282
6.92 线性映射的正交矩阵的应用	284
6.93 线性映射的正交矩阵的应用	286
6.94 线性映射的正交矩阵的应用	288
6.95 线性映射的正交矩阵的应用	290
6.96 线性映射的正交矩阵的应用	292
6.97 线性映射的正交矩阵的应用	294
6.98 线性映射的正交矩阵的应用	296
6.99 线性映射的正交矩阵的应用	298
6.100 线性映射的正交矩阵的应用	300
6.101 线性映射的正交矩阵的应用	302
6.102 线性映射的正交矩阵的应用	304
6.103 线性映射的正交矩阵的应用	306
6.104 线性映射的正交矩阵的应用	308
6.105 线性映射的正交矩阵的应用	310
6.106 线性映射的正交矩阵的应用	312
6.107 线性映射的正交矩阵的应用	314
6.108 线性映射的正交矩阵的应用	316
6.109 线性映射的正交矩阵的应用	318
6.110 线性映射的正交矩阵的应用	320
6.111 线性映射的正交矩阵的应用	322
6.112 线性映射的正交矩阵的应用	324
6.113 线性映射的正交矩阵的应用	326
6.114 线性映射的正交矩阵的应用	328
6.115 线性映射的正交矩阵的应用	330
6.116 线性映射的正交矩阵的应用	332
6.117 线性映射的正交矩阵的应用	334
6.118 线性映射的正交矩阵的应用	336
6.119 线性映射的正交矩阵的应用	338
6.120 线性映射的正交矩阵的应用	340
6.121 线性映射的正交矩阵的应用	342
6.122 线性映射的正交矩阵的应用	344
6.123 线性映射的正交矩阵的应用	346
6.124 线性映射的正交矩阵的应用	348
6.125 线性映射的正交矩阵的应用	350
6.126 线性映射的正交矩阵的应用	352
6.127 线性映射的正交矩阵的应用	354
6.128 线性映射的正交矩阵的应用	356
6.129 线性映射的正交矩阵的应用	358
6.130 线性映射的正交矩阵的应用	360
6.131 线性映射的正交矩阵的应用	362
6.132 线性映射的正交矩阵的应用	364
6.133 线性映射的正交矩阵的应用	366
6.134 线性映射的正交矩阵的应用	368
6.135 线性映射的正交矩阵的应用	370
6.136 线性映射的正交矩阵的应用	372
6.137 线性映射的正交矩阵的应用	374
6.138 线性映射的正交矩阵的应用	376
6.139 线性映射的正交矩阵的应用	378
6.140 线性映射的正交矩阵的应用	380
6.141 线性映射的正交矩阵的应用	382
6.142 线性映射的正交矩阵的应用	384
6.143 线性映射的正交矩阵的应用	386
6.144 线性映射的正交矩阵的应用	388
6.145 线性映射的正交矩阵的应用	390
6.146 线性映射的正交矩阵的应用	392
6.147 线性映射的正交矩阵的应用	394
6.148 线性映射的正交矩阵的应用	396
6.149 线性映射的正交矩阵的应用	398
6.150 线性映射的正交矩阵的应用	400
6.151 线性映射的正交矩阵的应用	402
6.152 线性映射的正交矩阵的应用	404
6.153 线性映射的正交矩阵的应用	406
6.154 线性映射的正交矩阵的应用	408
6.155 线性映射的正交矩阵的应用	410
6.156 线性映射的正交矩阵的应用	412
6.157 线性映射的正交矩阵的应用	414
6.158 线性映射的正交矩阵的应用	416
6.159 线性映射的正交矩阵的应用	418
6.160 线性映射的正交矩阵的应用	420
6.161 线性映射的正交矩阵的应用	422
6.162 线性映射的正交矩阵的应用	424
6.163 线性映射的正交矩阵的应用	426
6.164 线性映射的正交矩阵的应用	428
6.165 线性映射的正交矩阵的应用	430
6.166 线性映射的正交矩阵的应用	432
6.167 线性映射的正交矩阵的应用	434
6.168 线性映射的正交矩阵的应用	436
6.169 线性映射的正交矩阵的应用	438
6.170 线性映射的正交矩阵的应用	440
6.171 线性映射的正交矩阵的应用	442
6.172 线性映射的正交矩阵的应用	444
6.173 线性映射的正交矩阵的应用	446
6.174 线性映射的正交矩阵的应用	448
6.175 线性映射的正交矩阵的应用	450
6.176 线性映射的正交矩阵的应用	452
6.177 线性映射的正交矩阵的应用	454
6.178 线性映射的正交矩阵的应用	456
6.179 线性映射的正交矩阵的应用	458
6.180 线性映射的正交矩阵的应用	460
6.181 线性映射的正交矩阵的应用	462
6.182 线性映射的正交矩阵的应用	464
6.183 线性映射的正交矩阵的应用	466
6.184 线性映射的正交矩阵的应用	468
6.185 线性映射的正交矩阵的应用	470
6.186 线性映射的正交矩阵的应用	472
6.187 线性映射的正交矩阵的应用	474
6.188 线性映射的正交矩阵的应用	476
6.189 线性映射的正交矩阵的应用	478
6.190 线性映射的正交矩阵的应用	480
6.191 线性映射的正交矩阵的应用	482
6.192 线性映射的正交矩阵的应用	484
6.193 线性映射的正交矩阵的应用	486
6.194 线性映射的正交矩阵的应用	488
6.195 线性映射的正交矩阵的应用	490
6.196 线性映射的正交矩阵的应用	492
6.197 线性映射的正交矩阵的应用	494
6.198 线性映射的正交矩阵的应用	496
6.199 线性映射的正交矩阵的应用	498
6.200 线性映射的正交矩阵的应用	500
6.201 线性映射的正交矩阵的应用	502
6.202 线性映射的正交矩阵的应用	504
6.203 线性映射的正交矩阵的应用	506
6.204 线性映射的正交矩阵的应用	508
6.205 线性映射的正交矩阵的应用	510
6.206 线性映射的正交矩阵的应用	512
6.207 线性映射的正交矩阵的应用	514
6.208 线性映射的正交矩阵的应用	516
6.209 线性映射的正交矩阵的应用	518
6.210 线性映射的正交矩阵的应用	520
6.211 线性映射的正交矩阵的应用	522
6.212 线性映射的正交矩阵的应用	524
6.213 线性映射的正交矩阵的应用	526
6.214 线性映射的正交矩阵的应用	528
6.215 线性映射的正交矩阵的应用	530
6.216 线性映射的正交矩阵的应用	532
6.217 线性映射的正交矩阵的应用	534
6.218 线性映射的正交矩阵的应用	536
6.219 线性映射的正交矩阵的应用	538
6.220 线性映射的正交矩阵的应用	540
6.221 线性映射的正交矩阵的应用	542
6.222 线性映射的正交矩阵的应用	544
6.223 线性映射的正交矩阵的应用	546
6.224 线性映射的正交矩阵的应用	548
6.225 线性映射的正交矩阵的应用	550
6.226 线性映射的正交矩阵的应用	552
6.227 线性映射的正交矩阵的应用	554
6.228 线性映射的正交矩阵的应用	556
6.229 线性映射的正交矩阵的应用	558
6.230 线性映射的正交矩阵的应用	560
6.231 线性映射的正交矩阵的应用	562
6.232 线性映射的正交矩阵的应用	564
6.233 线性映射的正交矩阵的应用	566
6.234 线性映射的正交矩阵的应用	568
6.235 线性映射的正交矩阵的应用	570
6.236 线性映射的正交矩阵的应用	572
6.237 线性映射的正交矩阵的应用	574
6.238 线性映射的正交矩阵的应用	576
6.239 线性映射的正交矩阵的应用	578
6.240 线性映射的正交矩阵的应用	580
6.241 线性映射的正交矩阵的应用	582
6.242 线性映射的正交矩阵的应用	584
6.243 线性映射的正交矩阵的应用	586
6.244 线性映射的正交矩阵的应用	588
6.245 线性映射的正交矩阵的应用	590
6.246 线性映射的正交矩阵的应用	592
6.247 线性映射的正交矩阵的应用	594
6.248 线性映射的正交矩阵的应用	596
6.249 线性映射的正交矩阵的应用	598
6.250 线性映射的正交矩阵的应用	600
6.251 线性映射的正交矩阵的应用	602
6.252 线性映射的正交矩阵的应用	604
6.253 线性映射的正交矩阵的应用	606
6.254 线性映射的正交矩阵的应用	608
6.255 线性映射的正交矩阵的应用	610
6.256 线性映射的正交矩阵的应用	612
6.257 线性映射的正交矩阵的应用	614
6.258 线性映射的正交矩阵的应用	616
6.259 线性映射的正交矩阵的应用	618
6.260 线性映射的正交矩阵的应用	620
6.261 线性映射的正交矩阵的应用	622
6.262 线性映射的正交矩阵的应用	624
6.263 线性映射的正交矩阵的应用	626
6.264 线性映射的正交矩阵的应用	628
6.265 线性映射的正交矩阵的应用	630
6.266 线性映射的正交矩阵的应用	632
6.267 线性映射的正交矩阵的应用	634
6.268 线性映射的正交矩阵的应用	636
6.269 线性映射的正交矩阵的应用	638
6.270 线性映射的正交矩阵的应用	640
6.271 线性映射的正交矩阵的应用	642
6.272 线性映射的正交矩阵的应用	644
6.273 线性映射的正交矩阵的应用	646
6.274 线性映射的正交矩阵的应用	648
6.275 线性映射的正交矩阵的应用	650
6.276 线性映射的正交矩阵的应用	652
6.277 线性映射的正交矩阵的应用	654
6.278 线性映射的正交矩阵的应用	656
6.279 线性映射的正交矩阵的应用	658
6.280 线性映射的正交矩阵的应用	660
6.281 线性映射的正交矩阵的应用	662
6.282 线性映射的正交矩阵的应用	664
6.283 线性映射的正交矩阵的应用	666
6.284 线性映射的正交矩阵的应用	668
6.285 线性映射的正交矩阵的应用	670
6.286 线性映射的正交矩阵的应用	672
6.287 线性映射的正交矩阵的应用	674
6.288 线性映射的正交矩阵的应用	676
6.289 线性映射的正交矩阵的应用	678
6.290 线性映射的正交矩阵的应用	680
6.291 线性映射的正交矩阵的应用	682
6.292 线性映射的正交矩阵的应用	684
6.293 线性映射的正交矩阵的应用	686
6.294 线性映射的正交矩阵的应用	688
6.295 线性映射的正交矩阵的应用	690
6.296 线性映射的正交矩阵的应用	692
6.297 线性映射的正交矩阵的应用	694
6.298 线性映射的正交矩阵的应用	696
6.299 线性映射的正交矩阵的应用	698
6.300 线性映射的正交矩阵的应用	700
6.301 线性映射的正交矩阵的应用	702
6.302 线性映射的正交矩阵的应用	704
6.303 线性映射的正交矩阵的应用	706
6.304 线性映射的正交矩阵的应用	708
6.305 线性映射的正交矩阵的应用	710
6.306 线性映射的正交矩阵的应用	712
6.307 线性映射的正交矩阵的应用	714
6.308 线性映射的正交矩阵的应用	716
6.309 线性映射的正交矩阵的应用	718
6.310 线性映射的正交矩阵的应用	720
6.311 线性映射的正交矩阵的应用	722
6.312 线性映射的正交矩阵的应用	724
6.313 线性映射的正交矩阵的应用	726
6.314 线性映射的正交矩阵的应用	728
6.315 线性映射的正交矩阵的应用	730
6.316 线性映射的正交矩阵的应用	732
6.317 线性映射的正交矩阵的应用	734
6.318 线性映射的	

目 录

第1章 行列式	1
1.1 线性方程组与行列式	1
习题 1.1	3
1.2 n 阶行列式的概念及其性质	4
1.2.1 n 阶行列式的定义	4
1.2.2 行列式的性质	6
习题 1.2	12
1.3 n 阶行列式的计算	13
习题 1.3	19
1.4 克莱姆(Gramer)法则	22
习题 1.4	25
综合习题 1	26
第2章 矩阵	30
2.1 矩阵的概念	30
习题 2.1	31
2.2 矩阵的运算	31
2.2.1 矩阵的相等 矩阵的加法	32
2.2.2 数乘矩阵 矩阵的乘法	32
2.2.3 转置矩阵与对称矩阵	35
2.2.4 对角矩阵	36
2.2.5 方阵的行列式	37
习题 2.2	39
2.3 逆矩阵	41
2.3.1 逆矩阵的概念	41
2.3.2 伴随矩阵	42
2.3.3 逆矩阵的性质	44
习题 2.3	47
2.4 分块矩阵	47
2.4.1 分块矩阵的加法	49
2.4.2 数与分块矩阵的乘法	49
2.4.3 分块矩阵的乘法	49
2.4.4 分块矩阵的转置	51
2.4.5 分块对角矩阵的运算	51

习题 2.4	53
2.5 初等变换与初等矩阵	54
2.5.1 初等变换与初等矩阵的概念及其性质	54
2.5.2 用初等变换求逆矩阵	56
习题 2.5	59
2.6 矩阵的秩	60
2.6.1 矩阵秩的概念	60
2.6.2 用初等变换求矩阵的秩	61
习题 2.6	65
综合习题 2	65
第3章 线性方程组	68
3.1 高斯消元法	68
习题 3.1	78
3.2 向量组的线性相关性	78
3.2.1 向量组的线性组合	79
3.2.2 向量组的线性相关与线性无关	81
3.2.3 向量组的秩和极大线性无关组	85
习题 3.2	89
3.3 线性方程组解的结构	90
3.3.1 齐次线性方程组解的结构	91
3.3.2 非齐次线性方程组解的结构	95
习题 3.3	97
综合习题 3	98
第4章 矩阵的特征值与特征向量	102
4.1 矩阵的特征值与特征向量的概念及其性质	102
4.1.1 特征值与特征向量的概念	102
4.1.2 特征值与特征向量的性质	104
习题 4.1	106
4.2 矩阵可对角化的条件	106
4.2.1 相似矩阵的概念及其性质	106
4.2.2 方阵可相似对角化的条件	108
习题 4.2	111
4.3 向量的内积 正交化方法	112
4.3.1 向量的内积	112
4.3.2 正交向量组及施密特(Schmidt)正交化方法	114
4.3.3 正交矩阵	116
习题 4.3	116
4.4 实对称矩阵的对角化	117



4.4.1 实对称矩阵的特征值与特征向量的性质	118
4.4.2 实对称矩阵的对角化方法	118
习题 4.4	122
综合习题 4	123
第 5 章 二次型	125
5.1 二次型的概念	125
5.1.1 二次型的矩阵表示	125
5.1.2 合同矩阵	126
习题 5.1	128
5.2 化二次型为标准形的方法	129
5.2.1 配方法	129
5.2.2 正交变换法	131
习题 5.2	134
5.3 正定二次型和正定矩阵	135
习题 5.3	137
综合习题 5	137
第 6 章 线性空间与线性变换	140
6.1 线性空间	140
6.1.1 线性空间的概念及其性质	140
6.1.2 维数、基与坐标	141
6.1.3 基变换与坐标变换	143
习题 6.1	145
6.2 线性变换	146
6.2.1 线性变换的概念及其性质	146
6.2.2 线性变换的运算	147
习题 6.2	147
6.3 线性变换的矩阵表示	148
6.3.1 线性变换的矩阵表示式	148
6.3.2 线性变换在不同基下的矩阵之间关系	151
习题 6.3	153
综合习题 6	154
部分习题答案与提示	156
参考文献	175

四维空间的几何学——几何学基础(上) 基础知识由浅入深，方便学习。二类题讲解清晰明了，适合初学者使用。例题部分精选典型题目，每题都有详细解答，帮助读者巩固所学知识。

第1章 行列式

基础概念

掌握行列式的概念

行列式是线性代数的重要组成部分。本章讨论线性方程组与行列式的关系，采用降阶方法引入行列式定义，讨论行列式的性质，给出如何计算行列式以及利用行列式求解方程组的方法。

掌握线性方程组的解法

1.1 线性方程组与行列式

多元一次线性方程组是许多实际问题中常遇到的一种数学模型。例如：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.2)$$

分别是二元和三元线性方程组。 x_1, x_2, x_3 是未知量， a_{ij} 表示第 i 个方程第 j 个未知量的系数， b_i 是第 i 个方程的常数项。利用消元法求解方程组(1.1)，得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1, \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得到方程组(1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

x_1, x_2 表达式中的分母是相同的，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (1.3)$$

则称这个符号为二阶行列式,也称为方程组(1.1)的系数行列式.构成二阶行列式的四个数 a_{ij} ($i,j=1,2$)称为行列式的元素.它们排成两行两列, a_{ij} 叫做第*i*行第*j*列元素,下标*i*表示元素所在的行,称为行指标;下标*j*表示元素所在的列,称为列指标.二阶行列式也可以用画线的方法,即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积加以记忆.

按照式(1.3),如果再记二阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21},$$

则方程组(1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D}, \\ x_2 = \frac{D_2}{D}. \end{cases}$$

这里 $D_j(j=1,2)$ 恰好是 D 中第*j*列元素被 b_1, b_2 代替后所得到的二阶行列式.

例 1.1 设 $D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, λ 取何值时 $D \neq 0$? 取何值时 $D=0$?

解

$$D = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3).$$

当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 3$ 时, $D \neq 0$;当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时, $D=0$.

以上是二阶行列式的定义,我们同样可以定义三阶行列式为

$$(1.4) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \diagup & \diagdown & \diagup \\ \diagdown & \diagup & \diagdown \\ \diagup & \diagdown & \diagup \end{array} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

这里各实线连接的三个元素的乘积是式(1.4)代数和中在前面取正号的项,各虚线连接的三个元素的乘积是上式代数和中在前面取负号的项,这种定义称为沙路法定义.

有了三阶行列式的定义,对于线性方程组(1.2),当系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,利用消元法求解,可得方程组(1.2)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

这里 $D_j (j=1, 2, 3)$ 是 D 中第 j 列元素依次被 b_1, b_2, b_3 替换后得到的三阶行列式.

例 1.2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -3,$$

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -5, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -7,$$

得方程组的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{5}{3}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{7}{3}.$$

例 1.3 a, b 满足什么条件时, 行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0?$$

解 因为 $D = a^2 + b^2$, 所以只有当 $a=b=0$ 时, 行列式 $D=0$.

习题 1.1

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}.$$

$$2. \lambda 取何值时, 行列式 \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ -\lambda^2 & 1 \end{vmatrix} = 0?$$

$$3. x 取何值时, 行列式 \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0?$$

4. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么?

1.2 n 阶行列式的概念及其性质

1.1 节定义了二阶和三阶行列式,但是这种定义二阶、三阶行列式的方法,对于 $n > 3$ 的 n 阶行列式已失去统一运算规则. 本节采用递推的方法来定义 n 阶行列式. 对于三阶行列式,我们不难发现

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

记

$$A_{11}=(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12}=(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13}=(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

分别称 A_{11}, A_{12}, A_{13} 为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式, 称

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

为三阶行列式按第一行展开.

同样,二阶行列式按第一行展开为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12},$$

其中

$$A_{11}=(-1)^{1+1}a_{22}, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}a_{21}$$

分别为 a_{11}, a_{12} 的代数余子式.

下面给出 n 阶行列式的定义.

1.2.1 n 阶行列式的定义

定义 1.1 $n=1$ 时,一阶行列式定义为 $|a_{11}|=a_{11}$, $n \geq 2$ 时,设已定义了 $n-1$ 阶行列式,则由 n^2 个数 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 组成的 n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

称为行列式 D 按第一列展开.

证明 对 n 用数学归纳法

其中

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}, \quad (1.6)$$

当 $n=2$ 时, 式(1.6)成立.

行列式定义 1.1 知

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j},$$

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 M_{1j} 为 a_{1j} 的余子式, 它是由 D 中去掉 a_{1j} 所在的第一行和第 j 列元素后, 剩余的 $(n-1)^2$ 个元素按 D 中原有顺序组成的 $n-1$ 阶行列式; A_{1j} 称为 a_{1j} 的代数余子式; a_{ij} 叫做第 i 行第 j 列元素, i 叫做行指标, j 叫做列指标; $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 称为行列式的主对角线元素; 称式(1.6)为行列式 D 按第一行展开. 同样我们可以定义 a_{ij} 的余子式为

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.7)$$

它是由 D 中去掉 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素后, 剩余 $(n-1)^2$ 个元素按 D 中原有顺序组成的 $n-1$ 阶行列式. 定义元素 a_{ij} 的代数余子式为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots, n. \quad (1.8)$$

由定义看到: n 阶行列式是由 n^2 个数组成的, 共有 n 行 n 列的一个算式, 依次展开式(1.6)中的行列式, 不难看出, 这个算式是由行列式的元素乘积构成的和式, 称为 D 的展开式, 展开式中每一项乘积是 D 中不同行不同列的 n 个元素的乘积. n 阶行列式展开式中有 $n!$ 项且带正号和负号项各占一半.

例 1.4 证明 n 阶下三角行列式(当 $i < j$ 时, $a_{ij} = 0$, 即主对角线以上元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

证明 对阶数 n 作数学归纳法, 当 $n=1$ 时, 结论显然成立, 假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立, 则由定义得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式, 根据归纳法假设得

$$D = a_{11}(a_{22} \cdots a_{nn}) = \prod_{i=1}^n a_{ii},$$

这里“ \prod ”是连乘号.

同理可证明上三角行列式(主对角线以下元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ O & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii},$$

式中“*”表示主对角线以上元素为任意数，“O”表示主对角线以下元素全为零. 由此可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & O \\ a_{22} & \\ O & \ddots \\ & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}; \quad \begin{vmatrix} 1 & O & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & O & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

例 1.5 计算 n 阶行列式 $D_n =$

$$\begin{vmatrix} O & & a_n \\ & \ddots & \\ a_2 & & * \\ a_1 & & \end{vmatrix}.$$

解 由行列式的定义得

$$D_n = (-1)^{1+n} a_n \begin{vmatrix} O & & a_{n-1} \\ & \ddots & \\ a_2 & & * \\ a_1 & & \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} a_n D_{n-1} = (-1)^{n-1} a_n D_{n-1}.$$

上式这种 D_n 与 D_{n-1} 的关系, 通常称为递推公式. 依次递推, 可得

$$D_n = (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2}$$

.....

$$= (-1)^{n-1+n-2+\cdots+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_i.$$

本题需要注意的一点是对于一般的 n 而言, $D_n \neq -a_1 a_2 \cdots a_n$.

1.2.2 行列式的性质

首先, 我们给出等价于行列式定义的一个引理.

引理 1.1 行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \cdots + a_{n1} A_{n1}, \quad (1.9)$$

称为行列式 D 按第一列展开. 该引理说明行列式按第一行展开等于行列式按第一列展开.

证明 对 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时, 式(1.9)显然成立. 假设对阶数小于 n 的行列式成立, 考虑 n 阶情况, 由行列式定义 1.1 知

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j}A_{1j} \\ &= a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}, \end{aligned}$$

其中

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 $n-1$ 阶行列式, 按归纳法, M_{1j} 可按第一列展开, 行指标 $i=2$ 处于 M_{1j} 的第一行的位置, 所以

$$M_{1j} = \sum_{i=2}^n a_{ii} (-1)^{i-1+1} (M_{1j})_{ii} = \sum_{i=2}^n a_{ii} (-1)^i (M_{1j})_{ii}, \quad (j \neq 1),$$

其中 $(M_{1j})_{ii}$ 是 M_{1j} 中 a_{ii} 的余子式 ($i=2, 3, \dots, n$), 它是 D 中先去掉第一行和第 j 列 ($j \neq 1$), 再去掉第 i 行和第一列所得的行列式, 它与先去掉第 i 行 ($i \neq 1$) 和第一列, 再去掉第一行和第 j 列所得的行列式相同, 即

$$(M_{1j})_{ii} = (M_{ii})_{1j},$$

所以

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j} (-1)^{1+j}M_{1j} \\ &= a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \left[\sum_{i=2}^n a_{ii} (-1)^i (M_{1j})_{ii} \right] \\ &= a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \left[\sum_{i=2}^n a_{ii} (-1)^i (M_{ii})_{1j} \right] \\ &= a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n (-1)^{1+j+i} a_{1j} a_{ii} (M_{ii})_{1j} \\ &= a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^n a_{ii} (-1)^{1+i} \left[\sum_{j=2}^n a_{1j} (-1)^j (M_{ii})_{1j} \right] \\ &= a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^n a_{ii} (-1)^{i+1} M_{ii} \\ &= a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^n a_{ii} A_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ii} A_{ii}, \end{aligned}$$

此式恰好是 D 按第一列展开式. 在以上证明中, 我们用了双重连加号求和的性质, 即

$\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}$ 以及 $\sum_i a_i \sum_j b_j = \sum_i \sum_j a_i b_j = \sum_i \sum_j a_i b_j$.

行列式的行和列按照原顺序互换, 所得行列式记作 D^T , 即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D^T 为 D 的转置行列式.

性质 1.1 行列式转置后其值不变, 即

$$D^T = D. \quad (1.10)$$

证明 对行列式阶数 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时结论显然成立, 假设对 $n-1$ 阶行列式结论成立, 对于 n 阶行列式, 由引理 1.1 将 D^T 按第一列展开

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j}^T,$$

而 M_{1j}^T 是 $n-1$ 阶行列式, 由假设知

$$M_{1j}^T = M_{1j},$$

所以

$$D^T = \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} = D.$$

我们将行列式按第一行(列)的展开式推广到一般情形, 则得到下列性质.

性质 1.2 行列式 D 等于它任意一行(列)的元素与它的代数余子式的乘积之和, 即

$$D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1n} A_{1n}. \quad (1.11)$$

性质 1.2 说明行列式按任一行(列)展开, 其值不变.

这个性质也可用数学归纳法证明, 方法类似于引理 1.1, 这里从略.

性质 1.3 如果行列式某行(列)的所有元素都有公因子 k , 则公因子 k 可以提到行列式的外面, 即

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = k \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|. \quad (1.12)$$

证明 利用性质 1.2, 左边按第 i 行展开

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = ka_{i1} A_{11} + ka_{i2} A_{12} + \cdots + ka_{in} A_{in} \\ & = k(a_{i1} A_{11} + a_{i2} A_{12} + \cdots + a_{in} A_{in}) \\ & = k \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|. \end{aligned}$$

推论 1.1 如果行列式某行(列)元素全为零, 则行列式的值为零.

性质 1.4 如果行列式某行(列)的每个元素可以写成两个元素之和, 则此行列式可以写成两个行列式的和, 即

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \\ & = \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|. \quad (1.13) \end{aligned}$$

证明 利用性质 1.2, 左边按第 i 行展开, 可得右边结果.

性质 1.5 如果行列式中有两行(列)的元素对应相等, 则行列式的值为零, 即 $a_{ik} = a_{jk}, i \neq j, k=1, 2, \dots, n$ 时, 有