可靠性工程教材之（一）

1

系统可靠性的数学基础

中　　国
航空学会科普与教育工作委员会

可靠性工程教材之(一)

可靠性的数学基础

许 海 宝

中国航空学会科普与教育工作委员会

1984.6.

责任编辑：胡金城

技术校对：杨守纲

封面设计：陈肇和

可靠性工程教材之(一)

系统可靠性的数学基础

（书号：103）

编　辑：《航空兵器》编辑部

（地址：河南洛阳030信箱13分箱）

印　刷：国营五三一印刷厂

（地址：河南济源）

（内部交流）

说　　明

为了满足广大读者学习可靠性工程的需要，我们组织编写了这套可靠性工程教材，内容包括《可靠性的数学基础》、《系统可靠性分析与设计》、《系统可靠性数字仿真》、《失效模式影响及其后果分析》、《可靠性数据处理与寿命评估》、《环境工程概论》和《可靠性工程专题选编》等七册。

这套教材在编写过程中，力求作到内容由浅入深、讲述详细、文字通俗，并侧重于实际应用。书中安排有较多的实例和习题，还附有计算机程序、各种图表和有关标准。因此，这套教材可供开设可靠性工程有关课程使用，也可供从事可靠性工程的技术人员和大专院校师生参考，并适合于自学。

这套教材由北京航空学院第一研究所负责编写，并得到航空工业部三〇一研究所的帮助。在编辑出版过通中还得到航空工业部六一二研究所的大力支持和帮助，在此一并致谢。

中国航空学会科普与教育工作委员会

一九八四年十月

前　言

可靠性工程需要广泛的数学基础知识，涉及多门基础数学学科。其中除微积分外，大都是我国1966年以前高等工科院校未普遍设立的，计有集合、逻辑代数、Γ函数、矩阵、拉普拉斯积分变换、概率与数理统计、马尔科夫随机过程、最小二乘法，以及线性回归等。

要把这些众多的各成体系的内容，集中在一门学时不多的课程中，显然比较困难，容易造成内容庞杂，结构松散。为避免这种情况，本教材以概率统计与马尔科夫过程为纲，把其它内容尽可能有机地结合起来。同时，以可靠性工程实际需要为主，兼顾基础知识的系统性与完整性。

实践证明，在实际工作中对概念准确而深刻的理解往往是解决问题的关键。因而，本教材侧重于概念的叙述，侧重于应用，对数学推证删繁就简。习题也是基于这种认识选编的（习题中带*号的题，可作为选做题）。

全部讲授这本教材约要80学时。

也可以只讲教材中的第2、3、4、7共四章（删去其中的§2.13及其它与集合有关的小节），作为可靠性工程的概率统计基础。这时约需40学时。还有一种讲法，除矩阵（第5章）、马尔科夫过程（第7章）外，其余都讲，约需60学时。

本教材虽是根据本人在可靠性学习班的讲义编成，并经过教学实践，但是限于水平，教材中一定还有不少缺点和错误，欢迎批评指正。

目　录

前　言

可靠性工程需要广泛的数学基础知识，涉及多门基础数学学科。其中除微积分外，大都是我国1966年以前高等工科院校未普遍设立的，计有集合、逻辑代数、Γ函数、矩阵、拉普拉斯积分变换、概率与数理统计、马尔科夫随机过程、最小二乘法，以及线性回归等。

要把这些众多的各成体系的内容，集中在一门学时不多的课程中，显然比较困难，容易造成内容庞杂，结构松散。为避免这种情况，本教材以概率统计与马尔科夫过程为纲，把其它内容尽可能有机地结合起来。同时，以可靠性工程实际需要为主，兼顾基础知识的系统性与完整性。

实践证明，在实际工作中对概念准确而深刻的理解往往是解决问题的关键。因而，本教材侧重于概念的叙述，侧重于应用，对数学推证删繁就简。习题也是基于这种认识选编的（习题中带*号的题，可作为选做题）。

全部讲授这本教材约要80学时。

也可以只讲教材中的第2、3、4、7共四章（删去其中的§2.13及其它与集合有关的小节），作为可靠性工程的概率统计基础。这时约需40学时。还有一种讲法，除矩阵（第5章）、马尔科夫过程（第7章）外，其余都讲，约需60学时。

本教材虽是根据本人在可靠性学习班的讲义编成，并经过教学实践，但是限于水平，教材中一定还有不少缺点和错误，欢迎批评指正。

第1章 集合与集合运算

集合是从人类思维规律中总结出来的基本概念，已成为各门数学的基础。全面地深入地研究集合，形成了一门基础数学——集合论。根据可靠性工程的需要，本课程只介绍集合论的最基础部分：集合与集合运算。

§1.1 集合的基本概念

1.1.1 集合及其成员

从最一般化的意义上讲，集合是一些事物的集体。在实际工作中，集合是一些具有相同属性(共性)的集体，这个集体(即集合)往往构成一个新事物、新概念。构成某个集合的每一个具体事物，称为该集合的成员，或称为该集合的元。

例如：

1. 太阳系九大行星。这是一个集合。它共有九个成员，它们的共性已由集合的名称作了概括。太阳系九大行星成为一个新事物、新概念。

2. 四则运算。这个集合有四个元，即加、减、乘、除。

3. 自然数(正整数)N，非负整数 N^0，整数 I，有理数，实数R，复数。这六个集合都是数的集合，符号N、N^0、I、R是本课程采用的表示对应集合的代号。这些集合都有无限多个成员。

4. 方程式 $2x+3y=5$ 的解。这也是一个集合。它的元要用两个数表示，通常这两个数按次序列出，x 的取值在前，y 的取值在后，是一对有次序的数，称为**有序偶**。例如，$\langle 1, 1\rangle$ 就是该集合的成员。尖括号表示括号中的数是按规定次序排列的。当 x、

y 的取值限于自然数时，该集合的元只有唯一一个：〈1，1〉。当x、y的取值扩展到整数时，该集合的元有无限多个。当x、y 的取值扩展到实数时，该集合的元也是无限多个，而且在笛卡尔座xoy平面上，构成一条直线。

有时，某个事物可以有多个不同的名称、代号或表示法。例如：金星又称启明星、长庚星；乘运算可用符号“×”或“·”；数值 2 可写成$\sqrt{4}$。那么，当该事物成为某个集合的成员时，不管它有多少个不同名称，由于都表示一个实体，只能算作集合中的一个成员。

1.1.2 集合的分类

按集合的内涵的确定性，集合可分为：确定性集合、模糊集合。

确定性集合是指这样一种集合，对于任何事物都可以判定该事物是否是它的元。上面所列四个例子都是确定性集合。例如，自然数集合，可以判定 1 、 5 是它的成员，而 0 、1.5、地球、乘法都不是它的成员。

本课程只涉及确定性集合，并简称为集合。

模糊集合与确定性集合不同。一个模糊集合，对于多数事物都可以判定是否是它的元，但存在一些特殊事物，无法判定是否是它的元。例如，“高个儿的男人”，这是一个集合，但对于一些不高不矮的男子，无法判定是否是这个集合的成员。或者不同的人有不同的判定，有人认为某人是高个儿的，而有人认为这个人不是高个儿的，无法统一。模糊集合有其独特的应用领域。

按集合的成员的数量，集合可分为：有限集合、无限集合。当集合的成员的个数有限时，称为有限集合。太阳系九大行星、四则运算都是有限集合。上面例 3 中的六个数的集合都是无限集合，它们的成员都有无限多个。至于方程式$2x+3y=5$ 的解，是那类集合，取决于在什么范围内取x、y值，用集合论语言来说，即取决于x、y是那一个集合的成员。若x、y是自然数的成员，那

么上述方程式的解是一个有限集合。若x、y是整数或实数的成员，那么方程式的解是无限集合。

无限集合可细分为可列无限集合与不可列无限集合。

可列无限集合是指这样一种集合，它们的成员虽然有无限多个，但是按照一定的规律可以把所有的成员一一列出来，也就是对于任意一个成员，可以按照规律明确地指出位于该成员前面一位的成员(称前元)和位于该成员后面一位的成员(称后元)。自然数、非负整数、整数都是可列无限集合，它们的成员可以按照数值的大小一一列出来。例如，自然数集合，给出一个成员5，可以明确指出它的前元是4，后元是6；给出一个成员1，可以明确指出它没有前元，只有后元，后元为2。

不可列无限集合，虽然按照一定的规律，可以明确指出任意两个成员，那一个在前，那一个在后。但却不能把所有成员一一列出，即对于任意一个成员，不能明确地指出它的前元或后元。例如实数集合，按照数值大小，可以判定成员0.9在成员1.0之前，但是却不能明确指出1.0的前元是什么。0.9并不是1.0的前元，因为两者之间至少有一个0.99存在，同理0.99也不是1.0的前元。显然，无法指出1.0的前元。

在数学领域内，处理可列无限集合与不可列无限集合采用不同的方法。前者可用级数方法，后者则用微积分方法。

1.1.3 集合及其成员的表示法

集合及其成员除了可用语言来规定外，下面介绍两种常用的数学方法。

1. 列举法

集合用大写拉丁字母表示，用等号与大括号列出该集合的全部成员。当成员个数很多或可列无限多时，还可采用级数表示法中的省略号。例如：

(1) T＝{＋、－、×、÷}。T为四则运算集合。

(2) A＝{1，2，3，5，6，10，15，30}。A为自然数30的全

部因数构成的集合，共有八个元。

(3) $N=\{1,2,3,4,\cdots\cdots\}$。N为自然数集合。

任意一个事物与某一个集合之间只有两种关系，要么是集合的成员，要么不是集合的成员。例如，15是上面A的成员，是N的成员，但不是T的成员，可表示为：

$$15\in A,\ 15\in N,\ 15\notin T \text{或} 15\bar{\in} T$$

$\in$读作"属于"，$\bar{\in}$或$\notin$读作"不属于"。

2. 数学描述法

与列举法不同之处是，在大括号内不是列出全部成员，而是用变量代替，然后用冒号或分割号引出变量的约束条件。

例如：

(1) $D=\{x:x=2k-1;\ k\in N\}$

集合D的成员用变量x表示，x值需要服从两个条件：$x=2k-1$及k是自然数集合的成员。所以D是奇数集合。

(2) $P=\{<x,y>|x,y\in R\}$

集合P的成员是有序偶，x、y的取值只要是实数(R)就行。所以集合P是笛卡尔座标xoy平面上所有的点组成的集合，即xoy平面。

(3) $L=\{<x,y>|2x+3y=5;\ x,y\in R\}$

集合L是笛卡尔座标xoy平面上符合条件$2x+3y=5$的所有点的集合，即直线$2x+3y=5$。

集合D为可列无限集合，集合P与L是不可列无限集合。

1.1.4 子集，集合的相等

有两个集合A，B。若A的每一个成员都是B的成员，则称A是B的子集，记为$A\subset B$，除了读成"A是B的子集"外，还可读成"A包含于B"或"B包含A"。前面例子中，奇数集合是自然数集合的子集，xoy平面上点集L是全平面点集P的子集。两个集合中，若一个是另一个的子集，称这两个集合间存在包含关系。

包含关系具有传递性，即若$A\subset B$，$B\subset C$，则必有$A\subset C$。

还具有自返性，即任意一个集合必是它自身的子集，$A \subset A$。

两个集合A、B，若具有完全相同的成员，则称集合A与B相等，并记为$A=B$。对于较简单的集合，可凭直接观察集合A、B中的成员来判定A、B是否相等。对于较复杂的集合，可用下述两种方法来判定是否相等。

1. 两个集合A、B，若$A \subset B$，且$B \subset A$，则必定$A=B$，即只要能证明A是B的子集，而B又是A的子集，那么可以判定A、B具有完全相同的成员，A等于B。

2. 两个集合A、B，若任意一个属于A的成员都是B的成员，而且任意一个不属于A的事物都不是B的成员，则集合A、B必相等。用数学式表示，即：

若　任一个$a \in A$，必有$a \in B$

且　任一个$a \notin A$，必有$a \notin B$

则　$A=B$

1.1.5　两个特殊集合

1. 空集

凡是不含任何成员的集合称为**空集**，记为ϕ或$\{\ \}$，读作空。例如下面两个集合是空集：

(1)　$A=\{<x,y>: 2x+3y=5 \text{ 且 } 4x+6y=3\}$

(2)　$B=\{x: x^2+1=0,\ x \in R\}$

对于集合A，由于直线$2x+3y=5$与直线$4x+6y=3$相互平行，没有交点。所以A中无成员，$A=\phi$。对于集合B，由于不存在这样一个实数x可使$x^2+1=0$，故$B=\{\ \}$。

空集是任何集合的子集，在1.4.2中将证明这一结论。空集在集合运算中有其特殊地位，相当于初等代数中零的地位。

2. 全集

在实际工作中，经常是在一个特定范围内研究一个一个集合。例如，在分析表达式$\sqrt{1-x^2}$当x为何值时有意义，显然，这时虽然没有说明这个特定范围是什么，实际上这个特定范围是

实数集合。因为在复数集合中，x无论取何值，$\sqrt{1-x^2}$总是有意义的。用集合论语言来复述上述问题，就是在实数集合R中找一个子集使$\sqrt{1-x^2}$有意义。这个特定范围包括了全部研究对象，称之为**全集**，用符号E表示全集。

所以，在讨论$\sqrt{1-x^2}$在什么条件下有意义时，全集即为实数集合，E＝R。使$\sqrt{1-x^2}$有意义的x是E的一个子集：

$$A=\{x: |x|\leqslant 1\}$$

$$A\subset E=R$$

全集在集合运算中有其特殊地位，相当于初等代数中的1的地位。

§1.2 集族、幂集

1.2.1 集族

集合本身也是一个事物，那么由集合的定义可知，用集合作为成员也能构成集合。这种以集合为成员的集合，为便于与由具体个体构成的集合相区别，称之为集族，或集类。

在生活中常会遇到集族。例如讨论电扇问题，电扇是全集。这个全集的成员个数是相当多的，每一台具体电扇都是它的成员，但是是有限集合。台扇、落地扇、吊扇都是全集电扇的子集。当说到"各类电扇"时，各类电扇正是一个集族，子集台扇、落地扇、吊扇都是该集族的成员，而一台具体电扇不再是集族的成员。

若设$A_1=\{1\}$，$A_2=\{4,2,1,3\}$，$A_3=\{2,1\}$，$A_4=\{1,3,2\}$，则

$$A=\{\phi,A_1,A_2,A_3,A_4\}$$

是一个集族。A的成员都是集合，注意ϕ也是集合。此时，1是A_1、A_2、A_3、A_4的成员，但1不是A的成员；A_1是A_2、A_3、A_4的子集，但A_1不是A的子集，只是A的元。下列关系式都是正确的：