高等数学学习辅导

天津大学数学系　编

高等教育出版社

高等数学学习辅导

Gaodeng Shuxue Xuexi Fudao

天津大学数学系 编

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是为学习高等数学的朋友们编写的学习辅导书。全书内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、级数。书中各章节以“内容提要”为标题总结了相关的基本概念、基本理论和基本方法，以“例题解析”为标题讲解了大量相关例题。 通过对例题的分析、讲解和评注，帮助读者准确理解相关概念和理论，正确把握和使用相关方法，学习解题技巧，提高解题能力。 各章配有适量的习题。 并有6套用以检查基本内容掌握情况的自我检测试卷。

本书可作为高等数学课程的教学辅导书，也可作为考研朋友系统复习和提高应试能力的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导／天津大学数学系编. --北京：高等教育出版社，2014.8
ISBN 978-7-04-040732-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①天… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第161435号

策划编辑 贾翠萍　责任编辑 贾翠萍　特约编辑 柳 萍　封面设计 赵 阳
版式设计 王艳红　插图绘制 尹文军　责任校对 胡美萍　责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 潮河印业有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 33
字　　数 620千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2014年8月第1版
印　　次 2014年8月第1次印刷
定　　价 50.00元

物 料 号 40732-00

前　言

高等数学是大学本科诸多专业最重要的基础课。它为后续课程的学习乃至专业研究提供了必要的数学基础知识，也是培养科学严谨思维意识的重要载体。高等数学又是多数专业硕士研究生入学考试的必考课程。学好高等数学对将来的学习和工作都会产生持续的积极影响。

本书是为学习高等数学课程的朋友们编写的学习辅导书。所涵盖的内容及其次序与天津大学数学系编著的《高等数学》相一致。

本书的编写特点如下：

1. 书中各章节以“内容提要”为标题总结了相关的基本概念、基本理论和基本方法，以“例题解析”为标题讲解了大量相关例题。各章配有适量的习题，并有 6 套用以检查基本内容掌握情况的自我检测试卷。

2. 本书通过对例题的分析与讲解为学生提供辅导。全书共选编了近 500 个例题。有帮助准确理解相关概念和理论的，有帮助正确掌握和使用相关方法的，有介绍解题技巧的，有少量拓展知识视野的，也有提高求解综合性问题能力的。本书可以使学生结合例题，举一反三，提高分析问题和解题的能力，加深对基本内容的理解和掌握。

3. 编写过程参阅了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，并精选了部分历年试题作为例题或习题。本书可帮助有意考研的朋友实现系统复习，提高应试能力。

本书由天津大学数学系多年讲授高等数学课程，有丰富教学经验的教师编写。第一章和第三章由郭飞编写，第二章和第八章由张玉琴编写，第四章和第六章由曹学广编写，第五章和第七章由韩健编写，第九章和第十章由李君湘编写，第十一章由毛云英编写。数学系主任黄正海教授对本书的编写给出了规划和建议，高等数学教研室主任郭飞全程组织编写工作，毛云英教授对全书进行整合编纂，李君湘教授审阅了全部书稿。我们对以上几位教师的辛勤工作表示

衷心感谢!

由于水平所限, 书中错误和不妥之处在所难免, 欢迎同行和广大读者批评指正。

天津大学数学系

2014 年 3 月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

一、内容提要

1. 映射与函数

(1) 设 A,B 是两个非空集合, f 是对应法则, 使得对每个 $x \in A$, 按照 f 有唯一的 $y \in B$ 与之对应, 则称 f 为由 A 到 B 的**映射**, 记作

$$f: A \to B \text{或} f: x \mapsto y(x \in A).$$

与 x 所对应的 y 称为 x 在映射 f 下的**象**, 记作 $f(x)$, 即有 $y=f(x)$, 称 x 为 y 在 f 下的**原象**. 集合 A 称为映射 f 的**定义域**, 记作 D_f. A 中所有元素在映射 f 下的象的全体组成的集合称为映射 f 的**值域**, 记作 R_f 或 $f(D_f)$.

(2) 若 f 是由集合 $D \subset \mathbf{R}$ 到集合 $\mathbf{R}$ 的映射, 则称 f 是定义在 D 上的**函数**. 映射 f 的定义域称为函数 f 的**定义域**, 映射 f 的值域称为函数 f 的**值域**.

2. 有界函数与无界函数

设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义, 若存在正常数 K, 使得对任何 $x \in D$ 都有 $|f(x)| \leqslant K$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**, 否则, 称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

按照上述定义, 函数 $f(x)$ 在集合 D 上是无界函数的充分必要条件是对任意正常数 K, 都存在 $x_0 \in D$ 使得 $|f(x_0)|>K$.

函数的有界性依赖所考虑的集合, 同一个函数在不同的集合上有界性可能不一样. 一般地, 我们说一个函数是有界函数是指该函数在其定义域上有界.

3. 单调函数

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, x_1,x_2 是 I 上的任意两个点.

(1) 若当 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$, 则称 $f(x)$ 是 I 上的**单调递增 (减) 函数**或**单调增加 (减少) 函数**或**单调增 (减) 函数**.

(2) 若当 $x_1 < x_2$ 时必有 $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, 则称 $f(x)$ 是 I 上的**严格单调递增 (减) 函数**或**严格单调增加 (减少) 函数**或**严格单调增 (减) 函数**.

单调增函数和单调减函数统称为**单调函数**, 严格单调增函数和严格单调减函数统称为**严格单调函数**. 若 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增函数或单调减函数, 则称 I 为函数 $y = f(x)$ 的**单调区间**.

4. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 E, 函数 $u = g(x)$ 的定义域是 D. 若 $D_1 = \{x|x \in D$ 且 $g(x) \in E\}$ 非空, 则对任意的 $x \in D_1$, 通过 f 和 g 有唯一的 y 与之对应, 从而确定了 D_1 上的一个新的函数, 称为 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的**复合函数**, 记作 $f \circ g$ 或 $y = f(g(x))$, 并称 f 为其**外层函数**, g 为其**内层函数**, u 为其**中间变量**.

两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 可以复合的充要条件是 $R_g \cap D_f \neq \varnothing$.

5. 反函数

(1) 设有函数 $y = f(x), x \in D$. 如果对于值域 $f(D)$ 中的每一个值 y, D 中有唯一的值 x 使得 $f(x) = y$, 则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数, 称之为 $y = f(x)$ 的**反函数**, 记为 $x = f^{-1}(y), y \in f(D)$.

我们习惯上把 x 作为自变量, 把 y 作为因变量, 因此 $y = f(x)$ 的反函数也记为 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$.

(2) 并非所有函数都存在反函数, 只有一一映射确定的函数才存在反函数, 从而严格单调的函数一定存在反函数.

(3) 反三角函数:

反正弦函数 $y = \arcsin x$. 定义域 $[-1, 1]$, 值域 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数 $y = \arccos x$. 定义域 $[-1, 1]$, 值域 $[0, \pi]$.

反正切函数 $y = \arctan x$. 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$. 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域 $(0, \pi)$.

(4) 常用的反三角函数恒等式:

$\sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1, 1]$;

$\arcsin(\sin x) = x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

$\cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1, 1]$;

$\arccos(\cos x) = x,\ x \in [0, \pi]$;

$\tan(\arctan x) = x,\ x \in \mathbf{R}$;

$\arctan(\tan x) = x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

$\cot(\operatorname{arccot} x) = x,\ x \in \mathbf{R}$;

$\operatorname{arccot}(\cot x) = x,\ x \in (0, \pi)$;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ x \in [-1, 1]$;

$\arctan(-x) = -\arctan x,\ x \in \mathbf{R}$;

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\ x \in [-1, 1]$;

$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x,\ x \in \mathbf{R}$;

$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1]$;

$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2},\ x \in \mathbf{R}$.

6. 基本初等函数和初等函数

(1) 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

(2) 由基本初等函数经有限次四则运算与有限次复合运算所得并用一个运算式子表示的函数称为**初等函数**.

二、例题解析

例 1 证明函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界.

证 任意给定常数 $K > 0$,取 $x_0 = \dfrac{1}{2k_0\pi + \dfrac{\pi}{2}}$,其中 k_0是满足 $2k_0\pi + \dfrac{\pi}{2} > K$ 的正整数, 则 $x_0 \in (0, 1)$, 而

$$|f(x_0)| = \left|\frac{1}{x_0}\sin\frac{1}{x_0}\right| = 2k_0\pi + \frac{\pi}{2} > K.$$

因此函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界.

例 2 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leqslant 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ 和 $g(x) = x^2 - 1$, 求 $f \circ g$ 和 $g \circ f$.

解 当 $g(x)=x^2-1\leqslant 0$, 即 $|x|\leqslant 1$ 时, 有 $f(g(x))=2g(x)=2(x^2-1)$. 当 $g(x)=x^2-1>0$, 即 $|x|>1$ 时, 有 $f(g(x))=0$. 于是

$$f\circ g=\begin{cases}2(x^2-1), & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

当 $x\leqslant 0$ 时, $g(f(x))=g(2x)=4x^2-1$. 当 $x>0$ 时, $g(f(x))=g(0)=-1$. 于是

$$g\circ f=\begin{cases}4x^2-1, & x\leqslant 0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

评注 除某些极特殊情况外, $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 是不同的.

例 3 已知函数 $f(x)=\arcsin x$ 和函数 $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2}$, 求 $f\circ g$.

解 由题意可知 $D_f=[-1,1], R_g=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, 所以有 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$, 从而 f 与 g 可复合. 解方程 $-1\leqslant\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2}\leqslant 1$ 得到函数 $f\circ g$ 的定义域是 $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$. 从而

$$f\circ g=\arcsin\frac{\sqrt{1+x^2}}{2},\quad x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right].$$

例 4 求函数 $y=\sin x|\sin x|\left(|x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数.

解 当 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<0$ 时, $y=-\sin^2 x$, 对应的函数值 $y\in[-1,0)$. 由此解得

$$x=-\arcsin\sqrt{-y}\quad(-1\leqslant y<0).$$

当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时, $y=\sin^2 x$, 对应的函数值 $y\in[0,1]$. 由此解得

$$x=\arcsin\sqrt{y}\quad(0\leqslant y\leqslant 1).$$

于是所求反函数是

$$y=\begin{cases}-\arcsin\sqrt{-x}, & -1\leqslant x<0,\\ \arcsin\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

第二节　数列的极限

一、内容提要

1. 有界数列与无界数列

(1) 如果存在 $L \in \mathbf{R}$, 使得对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $u_n \leqslant L$, 则称数列 $\{u_n\}$ **有上界**, L 称为数列 $\{u_n\}$ 的一个**上界**.

(2) 如果存在 $l \in \mathbf{R}$, 使得对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $u_n \geqslant l$, 则称数列 $\{u_n\}$ **有下界**, l 称为数列 $\{u_n\}$ 的一个**下界**.

(3) 如果存在 $M > 0$, 使得对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $|u_n| \leqslant M$, 则称数列 $\{u_n\}$ **有界**, 否则称数列 $\{u_n\}$ **无界**.

(4) 数列 $\{u_n\}$ 有界的充分必要条件是 $\{u_n\}$ 既有上界又有下界.

2. 单调数列与严格单调数列

(1) 如果对任意 $n_1, n_2 \in \mathbf{N}^*$, 当 $n_1 < n_2$ 时, 都有

$$u_{n_1} \leqslant u_{n_2} \quad (u_{n_1} \geqslant u_{n_2}),$$

则称 $\{u_n\}$ 是**单调递增数列** (**单调递减数列**)或**单调增数列** (**单调减数列**).

(2) 如果对任意 $n_1, n_2 \in \mathbf{N}^*$, 当 $n_1 < n_2$ 时, 都有

$$u_{n_1} < u_{n_2} \quad (u_{n_1} > u_{n_2}),$$

则称 $\{u_n\}$ 是**严格单调递增数列** (**严格单调递减数列**)或 **严格单调增数列** (**严格单调减数列**) .

单调增数列和单调减数列统称为**单调数列**, 严格单调增数列和严格单调减数列统称为**严格单调数列**.

3. 数列极限

设 $\{u_n\}$ 是一个数列. 若存在常数 a 使得对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $N \in \mathbf{N}^*$ 使当 $n > N$ 时恒有 $|u_n - a| < \varepsilon$ 成立, 则称数列 $\{u_n\}$ **收敛**且**收敛于** a, a 称为数列 $\{u_n\}$ 的**极限**, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, 或$u_n \to a(n \to \infty)$. 若上述常数 a 不存在, 则称数列 $\{u_n\}$ **不收敛**或**发散**, 也称**极限** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ **不存在**.

在理解数列极限定义时需要注意以下几个问题:

(1) 若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 a, 则在 n 无限增大时, u_n 与 a 无限接近, 但是可能永远也达不到 a. 例如, 数列 $u_n = \dfrac{1}{n} \to 0(n \to \infty)$, 但总有 $\dfrac{1}{n} > 0$.

(2) 若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 a, 则定义中的 $\varepsilon>0$ 是可以任意小的. $|u_n-a|<\varepsilon$ 表示在 n 无限增大时, u_n 与 a 的接近程度可以任意小. 在用定义证明时, 为了方便证明, 可以限制正数 ε 小于一个给定的正数.

(3) 若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 a, 则定义中的 N 是依赖 ε 的, 一般来说, $\varepsilon>0$ 越小, N 越大.

(4) 数列收敛的几何意义：若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 a, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 外至多有数列 $\{u_n\}$ 的有限多项.

4. 数列收敛的性质

(1) 极限的唯一性

若数列 $\{u_n\}$ 收敛, 则其极限必唯一.

(2) 有界性

若数列 $\{u_n\}$ 收敛, 则数列 $\{u_n\}$ 有界.

值得注意的是, “数列有界”只是“数列收敛”的必要条件而非充分条件. 例如, 数列 $u_n=(-1)^n$ 有界, 但它是发散的.

(3) 保号性

① 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a\neq0$, 则存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得对一切 $n>N$ 都有 u_n 与 a 同号.

② 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$, 且存在 $N_0\in\mathbf{N}^*$, 使得对一切 $n>N_0$ 都有 $u_n\geqslant0$ (或者 $u_n\leqslant0$), 则 $a\geqslant0$ (或者 $a\leqslant0$).

(4) 四则运算法则

若数列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 都是收敛数列, 则 $\{u_n\pm v_n\}$ 和 $\{u_n\cdot v_n\}$ 也都是收敛数列, 且有

$$\lim_{n\to\infty}(u_n\pm v_n)=\lim_{n\to\infty}u_n\pm\lim_{n\to\infty}v_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n\cdot v_n)=\lim_{n\to\infty}u_n\cdot\lim_{n\to\infty}v_n.$$

若再设 $v_n\neq0,n=1,2,3,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n\neq0$, 则 $\left\{\dfrac{u_n}{v_n}\right\}$ 也是收敛数列, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}u_n}{\lim\limits_{n\to\infty}v_n}.$$