数学分析参攷资料

第〇册

华南师范学院数学系函数論教研室编

一九七九年五月

目录

补充几种正项级数敛散性的检验法（注）

（译自 LOUIS BRAND，Advanced Calculus）

一．Cauchy 凝聚检验法

Cauchy 凝聚检验法：若正数序列$\{a_n\}$是单调减小的，则级数

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

与级数

$$a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \tag{2}$$

同时收敛或同时发散

证明：设s_n、S_n分别表示下面级数的前n项和

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+\cdots\cdots+a_{15}+\cdots\cdots \quad (1)$$
$$a_1+a_2+a_2+a_4+a_4+a_4+a_4+\cdots\cdots+a_8+\cdots\cdots \quad (2)'$$

显然级数（2）收敛或发散一致于级数$(2)'$收敛或发散

因为级数$(2)'$的项等于或大于写在上面的级数（1）的项

$$\therefore \quad s_n \leqslant S_n \tag{3}$$

从而当S_n有界时s_n有界

比较级数$2\sum a_n$与级数$(2)'$：

$$a_1+a_1+a_2+a_2+a_3+a_3+a_4+a_4+a_5+a_5+\cdots+a_8+a_8+\cdots \quad (4)$$
$$a_1+a_2+a_2+a_4+a_4+a_4+a_4+a_8+a_8+\cdots+a_8+a_8+\cdots \quad (2)'$$

因为级数（4）的项等于或大于写在下面的级数$(2)'$的项

$$\therefore \quad 2s_n > S_{2n-1} \tag{5}$$

从而当s_n有界时S_n有界

于是序列$\{s_n\}$与$\{S_n\}$同时有界或同时无界；所以级数(1)

与级数(2)$'$同时收敛或同时发散．

Abel 定理：若正数序列$\{a_n\}$单调减小，且级数$\sum a_n$收敛，则 $na_n \longrightarrow 0$

证明：若级数(1)收敛，那么级数(2)也收敛，从而
$2^m a_{2^m} \longrightarrow 0$

若 $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$ 则 $a_n \leqslant a_{2^m}$

$$na_n < 2^{m+1} a_{2^m} = 2^m a_{2^m} + 2a_{2^m} \longrightarrow 0$$

于是，对于项的值为秋定地减小的正项级数来说收敛的必要条件不仅 $a_n \longrightarrow 0$ 还要 $na_n \longrightarrow 0$

Cauchy 凝聚检验法是根据凝聚级数的性质比原级数更为显见时使用。

当级数收敛，$s_n \to s$，$S_n \to S$，在(3)式和(5)式中，令 $n \to \infty$ 得：

$$\frac{1}{2}S < s < S \qquad (7)$$

例 1. p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

凝聚级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2^m)^p} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m$

是公比 $r = \frac{1}{2^{p-1}}$ 的几何级数．且和 $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$.

因为仅当 $p > 1$ 时 $r < 1$，于是我们有重要的结果：

当且仅当 $p > 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛．

特别，调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \qquad (8)$$

发散．

在收敛情形，级数的和写成

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad p > 1 \qquad (9)$$

称为 Riemann's zeta 函数，由 (7) 式

$$\frac{1}{2}S < \zeta(p) < S = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}} \tag{10}$$

于是 $1 < \zeta(2) < 2$. $\frac{2}{3} < \zeta(3) < \frac{4}{3}$ 等了。

例2．级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}$

凝聚级数为

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^m}{2^m(\log 2^m)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^p}$$

它是 p 级数的倍数。于是给定的级数，类似于 p 级数，仅当 $p>1$ 时收敛．当 $p=1$ 时我们得到 Abel 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n} = \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots \tag{11}$$

它是发散的，它甚至比调和级数发散得还要快。因为

$$\frac{1}{n\log n} < \frac{1}{n} \quad 当\ n > 2$$

例3．级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log n\log\log n}$

凝聚级数为

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{2^m}{2^m\log 2^m\log\log 2^m} = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m\log 2\log(m\log 2)}$$

因为 $\log 2 < 1$，凝聚级数的项大于 Abel 级数的对应项，于是发散．给定的级数甚至比 Abel 级数发散得还要快，因为

$$\frac{1}{n\log n\log\log n} < \frac{1}{n\log n} \quad 当\ n > 15$$

二、比较检验法的极限形式・多项式检验法

比较检验法的极限形式：若 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 都是正项级数．

且比 $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \lambda > 0 \tag{1}$

则这两个级数同时收敛或同时发散．

(10) 若 $\frac{a_n}{b_n}\longrightarrow 0$，且 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 也收敛。

若 $\frac{a_n}{b_n}\longrightarrow\infty$，且 $\sum b_n$ 发散，则 $\sum a_n$ 也发散．

证明：当 $\lambda>0$ 时，选取 ε 使 $0<\varepsilon<\lambda$；

则有 $$\lambda-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<\lambda+\varepsilon \quad 当\ n>N；$$

$$\therefore\quad (\lambda-\varepsilon)b_n<a_n<(\lambda+\varepsilon)b_n,\ n>N.$$

若 $\sum b_n$ 收敛，则 $(\lambda+\varepsilon)\sum b_n$ 收敛，从而 $\sum a_n$ 收敛；

若 $\sum b_n$ 发散，则 $(\lambda-\varepsilon)\sum b_n$ 发散，从而 $\sum a_n$ 发散．

当 $\frac{a_n}{b_n}\longrightarrow 0$，取 $\varepsilon>0$

则有 $\frac{a_n}{b_n}<\varepsilon$，当 $n>N$

$$\therefore\quad a_n<\varepsilon b_n,\quad n>N$$

于是，若 $\sum b_n$ 收敛，则 $\varepsilon\sum b_n$ 收敛，从而 $\sum a_n$ 收敛。

当 $\frac{a_n}{b_n}\longrightarrow\infty$ 取 $G>0$

则有 $\frac{a_n}{b_n}>G$ 当 $n>N$

$$\therefore\quad a_n>Gb_n\quad n>N$$

于是，若 $\sum b_n$ 发散，则 $G\sum b_n$ 发散，从而 $\sum a_n$ 发散。

由这个检验法，我们接着引出有用的多项式检验法。

多项式检验法　若 $P(n)$，$Q(n)$ 分别是 p 次，q 次多项式，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cn^p+\cdots}{dn^q+\cdots},\quad c,d\neq 0 \tag{2}$$

收敛。当而仅当 $q>p+1$

证明：因为级数(2)与级数

$$\frac{d}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p+\cdots}{n^q+\cdots}$$

敛散性相同．我们用这个级数来代替级数（2）进行检验．当n充分大时它的项全是正的，我们可以应用极限检验法（1），取

$$a_n=\frac{n^p+\cdots}{n^q+\cdots},\quad b_n=\frac{n^p}{n^q}$$

因为

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^{p+q}+\cdots}{n^{p+q}+\cdots}\longrightarrow 1$$

所以级数$\sum\frac{P(n)}{Q(n)}$与级数$\sum\frac{n^p}{n^q}=\sum\frac{1}{n^{q-p}}$同时收敛或同时发散，易见后者仅当$q-p>1$时收敛．

例1．设a，b，c都是正数．

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(an+b)^p}$和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(an^2+bn+c)^{p/2}}$

仅当$p>1$时收敛，应用检验（1）与p级数$\sum\frac{1}{n^p}$比较即可证得．

例2．用多项式检验法，即可证明

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}$发散．

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$收敛．

三．Kummer–Jensen检验法

根式与比值检验法，它依赖于把级数与几何级数进行比较，当根式或比值从小于1趋近于1时，这两种检验法都得不到结果，为了得到更精确的检验法我们找到多变的级数进行比较，因为这些级数无论如何可以代表任何级数。

Kummer检验法：若$\{C_n\}$是任一正数序列，$\sum a_n$是正项级数．

如果 $$K_n=C_n-C_{n+1}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant h>0,\ n\geqslant N \qquad (1)$$

则级数$\sum a_n$收敛。

证明：由(1)有

$$0<ha_n\leqslant C_n a_n-C_{n+1}a_{n+1}\qquad n\geqslant N$$

从而正数序列$\{C_n a_n\}$单调减小，设$C_n a_n\longrightarrow\lambda$．于是

$$\sum_{N}^{\infty}(C_n a_n-C_{n+1}a_{n+1})=C_N a_N-\lambda$$

∴级数$h\sum a_n$收敛．进而级数$\sum a_n$收敛．

相应的发散准则由下面的Jensen检验法给出．

Jensen检验法．若$\sum\frac{1}{C_n}$是一正项发散级数．$\sum a_n$是正项级数．

如果 $$K_n=C_n-C_{n+1}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 0\qquad n\geqslant N\qquad(2)$$

则级数$\sum a_n$发散

证明：当(2)式成立时，$\{C_n a_n\}$是单调增大序列，于是当$n\geqslant N$时

$$C_n a_n\geqslant C_N a_N$$

$$a_n\geqslant\frac{C_N a_N}{C_n}$$

注意到$C_N a_N$为常数 ∴$\sum\frac{C_N a_N}{C_n}$发散，从而$\sum a_n$发散．

这个检验法的"极限"形式可以联合写成下面的定理．

定理．若$\overline{K}$、$\underline{K}$分别表示序列$\{K_n\}$的上、下极限，则

$$\underline{K}>0\text{时，}\sum a_n\text{收敛}\qquad(3)$$

$$\overline{K}<0\text{时，}\sum a_n\text{与}\sum\frac{1}{C_n}\text{一起发散}\qquad(4)$$

证明：若$\underline{K}>0$，选取ε使$h=\underline{K}-\varepsilon>0$，则在$K_n$ $n=1,2,\cdots\cdots$中除去有限个之外都大于h，于是满足(1)式。

若$\overline{K}<0$，选取ε使$\overline{K}+\varepsilon<0$，则在$K_n$，$n=1,2,\cdots\cdots$中除了有限个外都是负的，于是满足(2)式．

取几种特殊的序列$\{C_n\}$，由上述定理可以产生几种不同的检验法，但要注意，为了应用(4)式，$\sum\frac{1}{C_n}$必须是发散的．

1. $C_n = 1 \quad K_n = 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}$

这就是 d'Alember 检验法

2. $C_n = n-1 \quad K_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1$

因此，若令

$$R_n = \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \tag{5}$$

我们得到

Raabe 检验法：当

$\underline{\lim}\ R_n > 1$ 时 $\quad \sum a_n$ 收敛.

$\overline{\lim}\ R_n < 1$ 时 $\quad \sum a_n$ 发散.

3. $C_n = (n-1)\log(n-1)$；则 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{C_n}$ 是发散的 Abel 级数（见前与 Cauchy 凝聚检验法，例2.）。

$$K_n = (n-1)\log(n-1) - (n\log n)\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$= (n-1)\log\frac{n-1}{n} + \log n\left[n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right]$$

上式右边第一项的极限与 $n\log\frac{n}{n+1}$ 的极限相同

而 $\quad n\log\frac{n}{n+1} = \log\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \longrightarrow \log\frac{1}{e} = -1$

于是，如果令

$$B_n = \log n\left[n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right] = \log n \cdot (R_n - 1) \tag{6}$$

由此给出

Bertrand 检验法，当

$\underline{\lim}\ B_n > 1$ 时 $\quad \sum a_n$ 收敛

$\overline{\lim}\ B_n < 1$ 时 $\quad \sum a_n$ 发散

例1 对于级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!} \cdots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha+n}{n+1},\quad R_n=n\left(1-\frac{\alpha+n}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}(1-\alpha)\to 1-\alpha$$

因为当 $n>-\alpha$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>0$，因此级数的项终于保持同号，从而可以应用 Raabe 检验法，于是当 $1-\alpha>1$ $(\alpha<0)$ 时级数收敛当 $1-\alpha<1$ $(\alpha>0)$ 时级数发散。

例2. 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot4\cdots\cdots2n}{1\cdot3\cdots\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{2n+2}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+4}=\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+10n+4}$$

$$R_n=n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\frac{2n^2}{4n^2+10n+4}\to\frac{1}{2}$$

∴级数发散.

（注）本文题目是译者加的。

可微函数的复合及例子

许多书本在证明"多元函数一阶微分形式不变性"都给予较强的条件，在其它地方也出现类似的问题，其实条件可适当地减弱，但须证明下面的定理。

定理：可微函数的复合仍为可微函数。

（菲赫金哥尔茨著微积分学教程第一卷第二分册 P.391 页附注中曾指出，但没有证明）

证明：设 $u=f(x,y)$ 是可微函数（关于变量 x,y）

$x=\varphi(s,t)$，$y=\psi(s,t)$ 也是可微函数（关于变量 s,t）

现在要证明函数 $u=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$ 是可微函数（关于变量 s,t）.

设 (s_0,t_0) 是 $u=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$ 定义域内任意一点.

并设 $x_0=\varphi(s_0,t_0)$，$y_0=\psi(s_0,t_0)$

因为 $x=\varphi(s,t)$、$y=\psi(s,t)$ 在点 (s_0,t_0) 可微，因此对于任意的 Δs，Δt

有：$\Delta x=\varphi'_s(S_0,t_0)\Delta S+\varphi'_t(S_0,t_0)\Delta t+o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})$ (1)

$\Delta y=\psi'_s(S_0,t_0)\Delta S+\psi'_t(S_0,t_0)\Delta t+o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})$ (2)

又由假设 $u=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，对于上面的 Δx，Δy

有 $\Delta u=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ (3)

把 (1)、(2) 代入 (3)

得
$$\begin{aligned}\Delta u=&(f'_x(x_0,y_0)\cdot\varphi'_s(S_0,t_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot\psi'_s(S_0,t_0))\Delta S\\&+(f'_x(x_0,y_0)\cdot\varphi'_t(S_0,t_0)+f'_y(x_0,y_0)\psi'_t(S_0,t_0))\Delta t\\&+f'_x(x_0,y_0)\cdot o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})+f'_y(x_0,y_0)\cdot o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})\\&+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})\end{aligned}\quad(4)$$

依 $o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})$ 的意义：$\dfrac{o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}$ 是无穷小量；而 $f'_x(x_0,y_0)$ 是常量。

$\therefore \dfrac{f'_x(x_0,y_0)\cdot o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}$ 是无穷小量，即 $f'_x(x_0,y_0)\cdot o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})$ 关于无穷小量 $\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}$ 是更高阶的无穷小量。

即 $f'_x(x_0,y_0)\cdot o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})=o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})$ (5)

同理 $f'_y(x_0,y_0)\cdot o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})=o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})$ (6)

最后考究 $o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$：

$$\because \frac{o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}=\frac{o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}=o(1)\cdot\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}\quad(7)$$

而 $\dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}=\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta y}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}\right)^2}$

但从总 (1) 式我们有：

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}=\varphi'_s(S_0,t_0)\frac{\Delta S}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}+\varphi'_t(S_0,t_0)\frac{\Delta t}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}+\frac{o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}$$

$$\begin{aligned}\therefore\left|\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}\right|&\le|\varphi'_s(S_0,t_0)|\cdot\left|\frac{\Delta S}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}\right|+|\varphi'_t(S_0,t_0)|\cdot\left|\frac{\Delta t}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}\right|+\left|\frac{o(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}\right|\\&\le|\varphi'_s(S_0,t_0)|+|\varphi'_t(S_0,t_0)|+|o(1)|\end{aligned}$$

即 $\dfrac{\Delta x}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}$ 是有界量。

同理 $\dfrac{\Delta y}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}$ 也是有界另

$\because \dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}$ 是有界另

$\therefore O(1)\cdot\dfrac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}$ 是无穷小另.

由（7）式得：

$\dfrac{O(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}{\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}}$ 是无穷小另

即 $O(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})=O(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})$ （8）

由（5）、（6）、（8）得

$$f'_x(x_0,y_0)\cdot O(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})+f'_y(x_0,y_0)\cdot O(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})+O(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

$$=O(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})+O(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})+O(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}) \quad (9)$$

$$=3\cdot O(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})=O(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2})$$

于是（4）式可写成

$$\Delta u=A\Delta S+B\Delta t+O(\sqrt{\Delta S^2+\Delta t^2}) \quad (10)$$

其中 $A=f'_x(x_0,y_0)\cdot\varphi'_s(S_0,t_0)+f'_y(x_0,y_0)\psi'_s(S_0,t_0)$，$B=f'_x(x_0,y_0)\varphi'_t(S_0,t_0)+f'_y(x_0,y_0)\psi'_t(S_0,t_0)$

$\therefore u=f[\varphi(S,t),\psi(S,t)]$ 在点 (S_0,t_0) 可微，由于 (S_0,t_0) 的任意性，

$\therefore u=f[\varphi(S,t),\psi(S,t)]$ 可微。

推论：可微函数的多次复合仍为可微函数.

证明：设 $W=f(x,y)$ 为可微函数 $\begin{matrix}x=\varphi(u,v)\\y=\psi(u,v)\end{matrix}$ 为可微函数 $\begin{matrix}u=\omega(S,t)\\v=\lambda(S,t)\end{matrix}$

为可微函数.

现在要证 $W=W(S,t)$ 为可微函数.

$\because x=\varphi(u,v)$ 可微，$\begin{matrix}u=\omega(S,t)\\v=\lambda(S,t)\end{matrix}$ 可微，依上面已证的定理

$x=\varphi[\omega(S,t),\lambda(S,t)]$ 是可微函数.

同理　$y=\psi[\omega(S.t),\lambda(S.t)]$ 是可微函数．

$\because$　$W=f(x.y)$ 可微，$x=\varphi[\omega(S.t),\lambda(S.t)]\equiv x(S.t)$ 可微，

$y=\psi[\omega(S.t),\lambda(S.t)]\equiv y(S.t)$ 可微，

再依上面已证的定理　$W=f[x(S.t),y(S.t)]\equiv W(S.t)$ 是可微函数．

下面举一个简单的例子：利用一阶微分形式不变性，计算多次复合函数的全微分．

例：求 $W=\sqrt[3]{\dfrac{u+v}{u-v}}$ 的全微分

我们把 $W=\sqrt[3]{\dfrac{u+v}{u-v}}$ 看成如下函数的复合，

$$W=z^{\frac{1}{3}},\quad z=\frac{x}{y},\quad x=u+v,\quad y=u-v$$

易见上述每一函数都是可微的，$\therefore$ $W=\sqrt[3]{\dfrac{u+v}{u-v}}$ 是可微函数．

依一阶微分形式不变性我们有：

$$dW=\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}dz$$

$$=\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

$$=\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{yd(u+v)-xd(u-v)}{y^2}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{yd(u+v)-xd(u-v)}{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot y^2}$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{udv-vdu}{(u+v)^{\frac{2}{3}}\cdot(u-v)^{4/3}}$$

证明积分中值定理的另一种方法

（译自 LOUIS BRAND, Advanced Calculus）

定理 1（第一积分中值定理）：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $g(x)$ 不变号，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)\,dx \qquad m\leq\mu\leq M \qquad (1)$$

其中 m，M 分别是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下确界和上确界

证明：设 $g(x)\geq 0$，且 $a<b$，则

$$\int_a^b[f(x)-m]g(x)\,dx\geq 0 \qquad \int_a^b[M-f(x)]g(x)\,dx\geq 0$$

这因为上面的每一个积分是非负的项之和的极限，于是

$$m\int_a^b g(x)\,dx\leq\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

当 $g(x)\leq 0$，或 $a>b$，这个不等式的不等号方向倒转过来；但无论哪种情形，中间那个积分总是介于给定的极值之间，所以(1)式成立。

当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续时，则 $f(x)$ 可以取 m，M 及一切中间值．于是有某一点 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\mu$．

$$\therefore \int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \qquad a\leq\xi\leq b \qquad (2)$$

定理 2（第二积分中值定理）若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)\geq 0$，$f(x)$ 单调，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx+f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx \qquad a\leq\xi\leq b. \quad (3)$$

证明：分见函数

$$\varphi(t)=f(a)\int_a^t g(x)\,dx+f(b)\int_t^b g(x)\,dx \qquad a\leq t\leq b$$

是连续的，并且它在点 $t=a$ 和点 $t=b$ 取值

$$\varphi(a)=f(b)\int_a^b g(x)\,dx, \quad \varphi(b)=f(a)\int_a^b g(x)\,dx$$

因为$f(x)$是单调的，于是(1)式中的数μ位于$f(a)$与$f(b)$之间，从而有介于a与b之间的某一个值$t=\xi$使$\varphi(t)$取值$\mu\int_a^b g(x)dx$（译者注）这就证明了(3)式。

推论1，若$f(x)$是正的递减函数，如果我们定义$f(b)=0$，这时(3)式左边积分的值不改变（可积函数在有限个点处改变函数值所得的新函数仍可积，且积分值不改变）。于是(3)式可写成Bonnet形式：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^{\xi}g(x)dx \quad a\leqslant\xi\leqslant b \text{（注）} \tag{4}$$

（注）除非$f(b)$已经等零，定义$f(b)=0$，将改变(3)式中的ξ值为另一个介于a与b之间的值。

推论2，若$f(x)$是正的递增函数，如果定义$f(a)=0$，这时(3)式左边积分的值不改变，于是(3)式写成

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx \quad a\leqslant\xi\leqslant b \tag{5}$$

（译者注）因为$f(x)$在$[a,b]$上单调，不妨设$f(x)$在$[a,b]$上递增，由第一积分中值定理有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx \quad f(a)\leqslant\mu\leqslant f(b) \tag{6}$$

于是有 $$f(a)\int_a^b g(x)dx\leqslant\mu\int_a^b g(x)dx\leqslant f(b)\int_a^b g(x)dx \tag{7}$$

注意到连续函数$\varphi(t)=f(a)\int_a^t g(x)dx+f(b)\int_t^b g(x)dx, a\leqslant t\leqslant b$在点$t=a$，$t=b$处取值：

$$\varphi(a)=f(b)\int_a^b g(x)dx, \quad \varphi(b)=f(a)\int_a^b g(x)dx.$$

根据连续函数的性质，对于介于$\varphi(a)$与$\varphi(b)$之间的数$\mu\int_a^b g(x)dx$，必有$\xi\in[a,b]$使$\varphi(\xi)=\mu\int_a^b g(x)dx$，即有

$$f(a)\int_a^{\xi}g(x)dx+f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx \quad a\leqslant\xi\leqslant b \tag{8}$$

把(8)代入(6)得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^b g(x)\,dx \qquad a \leq \xi \leq b$$

此即(3)式．

怎样构造收敛于同一极限的新序列

从一个收敛序列$\{a_n\}$出发，我们可以构造一个趋向于同一极限的另一个序列$\{b_n\}$，下面介绍构造$\{b_n\}$的两种方法：（取算术平均值和取几何平均值）。和序列$\{b_n\}$的简单应用。

命题1．（取算术平均值）．若$a_n \longrightarrow a$．

则 $$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n} \longrightarrow a$$

证明：

(一) 若 $a = 0$

对于任给 $\varepsilon > 0$．我们可选取自然数 N_1，

使 $$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad ，当\ n > N_1$$

这时

$$|b_n| \leq \frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}|}{n} + \frac{|a_{N_1+1}| + |a_{N_1+2}| + \cdots + |a_n|}{n}$$

$$< \frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

因为$|a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}|$是定值，我们可以选取自然数$N > N_1$使

$$\frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad 当\ n > N$$

从而 $$|b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad 当\ n > N$$

$$\therefore \quad b_n \longrightarrow 0$$

(二) 若 $a \neq 0$．

则 $a_n - a \longrightarrow 0$．由上面刚证明过的情形，得

$$b_n - a = \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \longrightarrow 0$$