高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

◎马立玲　李　松　王　敏　李令斗／编著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

◎马立玲 李 松 王 敏 李令斗／编著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学／马立玲等编著.—北京：中央民族大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5660-0742-1

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①马…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 141976 号

高等数学

作　　者　马立玲等
责任编辑　宁　玉
封面设计　布拉格
出 版 者　中央民族大学出版社
　　　　　北京市海淀区中关村南大街 27 号　　邮编：100081
　　　　　电话：68472815（发行部）　　传真：68932751（发行部）
　　　　　　　　68932218（总编室）　　　　　68932447（办公室）
发 行 者　全国各地新华书店
印 刷 厂　北京宏伟双华印刷有限公司
开　　本　787×1092（毫米）　1/16　　印张：17
字　　数　450 千字
版　　次　2014 年 7 月第 1 版　　2014 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5660-0742-1
定　　价　35.00 元

前　　言

高等数学是为少数民族预科各专业学生开设的一门重要的基础课程。它是学生掌握数学工具的主要课程，是培养学生理性思维的重要载体。通过学习使学生掌握相关的基础知识和基本理论，掌握比较熟练的运算技能。并能运用数学分析的方法和原理解决应用问题，为少数民族地区培养高级管理人才和应用型人才，为实现现代化服务。

预科阶段的高等数学既不是高中初等数学的重复，更不是本科大学数学的前移，它有着自己的教学特点和教学对象。通过本门课程的教学，不仅要使学生掌握高等数学的基础知识和基本技能，为学习其他相关课程打基础；而且使学生掌握数学的思维方式和特点，培养学生应用数学的意识，为后续本科的学习打下扎实的基础。

教材特点：

1. 注重与中学数学的有效衔接，精简了基本初等函数的基础内容。为了更好地适应预科生的特点，对一些内容作了适当精简和合并，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明。适当加大了课后习题的数量和层次，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解接受，并且使学生在知识、能力、素质方面有较大的提高。

2. 每节配备了内容小节。这些小节在总结本节重点内容之外，还指出学生在学习本节内容当中的易错点，未雨绸缪，起到画龙点睛的作用。

3. 运用计算机软件作了大量的图表，形象直观，一目了然，通俗易懂。例如，无穷小趋于零的速度；割圆术中圆的面积等等。

4. 每章配有应用实例和课外阅读，不仅解决学生关于“为什么学数学?”与“高等数学有什么用?”的困惑，而且使学生从宏观上了解高等数学的发展历程，增强学生学习高等数学的积极性。

本书内容包括极限与连续；导数与微分；微分中值定理与导数的应用；不定积分；定积分及其应用；微分方程，共 6 章。

本书在编写过程中得到了中央民族大学预科教育学院数学教研室同志们的热情支持和帮助，再此表示由衷的感谢!

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，疏漏之处在所难免，恳请读者指正。

编　者

2014 年 5 月

目　　录

第一章　极限与连续

第二章　导数与微分

第三章　微分中值定理与导数的应用

第四章　不定积分

第五章　定积分及其应用

第六章　微分方程

第一章　极限与连续

初等数学的研究对象基本上是常量，而高等数学的研究对象则是变量。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法。本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质。

第一节　函数的基本概念

一、预备知识

1. 常量与变量

在生产实践和科学研究中，会遇到各种各样的量。在对一个特定问题的研究过程中，有些量保持不变，取常数，这样的量称为**常量**；有些量是变化的，可取不同的数值，这样的量称为**变量**。“变与不变”是可以转换的。例如人的身高在很短的时间范围内几乎不变，可看作常量，但将时间范围拉长，身高是变化的，就得看作变量了。又如在银行存款，选择不同的存款种类(如活期、零存整取、二年或五年定期等等)，对应的存款利率将取不同的数值，这时利率是变量；但在选定存款类型存款以后计算利息时，利率就得看作常量。

2. 区间与邻域

通常，变量的取值是实数的一个集合。高等数学中常用的是区间和邻域。

(1) **区间**：任意取定实数 $a,b,a<b$。以下等式给出的是以 a,b 为端点的各种区间的定义，其中等式左端是相应区间的记号。

开区间：$(a, b)=\{x \mid x<a<b\}$；

闭区间：$[a, b]=\{x \mid x \leqslant a \leqslant b\}$；

左闭右开区间：$[a, b)=\{x \mid x \leqslant a<b\}$；

左开右闭区间：$(a, b]=\{x \mid x<a \leqslant b\}$。

上述区间统称为有限区间，如图 1－1 所示，它们可以用数轴上长度有限的线段来表示。

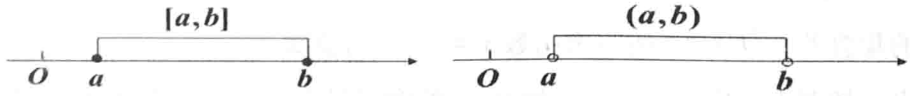


图 1－1

引进记号∞，+∞，−∞，分别读作无穷大，正无穷大，负无穷大。定义无穷区间如下：

$[a,+\infty)=\{x \mid x \geq a\}$(图 1－2)，$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}$(图 1－3)。

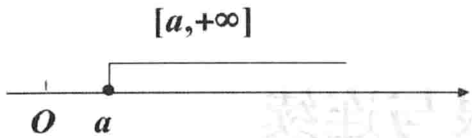


图 1 – 2

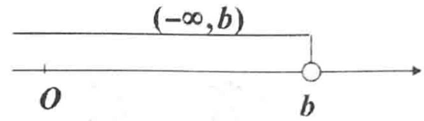


图 1 – 3

类似可定义$(a,+\infty)$,$(-\infty,b]$,$(-\infty,+\infty)$，其中$(-\infty,+\infty)$对应整个数轴，或者说实数集 R。

在今后的学习中，我们有时会用字符 I 表示上述区间中的任何一个。

（2）**邻域**：设 a 是给定的实数，δ 是一个正数，以下数集

$$U(a,\ \delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,\ a+\delta)$$

称为点 a 的 δ **邻域**，称点 a 为邻域的**中心**，δ 为邻域的**半径**(如图 1 – 4)。

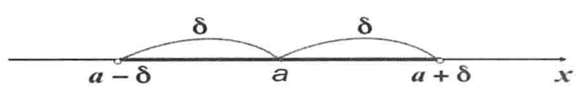


图 1 – 4

显然，点 a 的 δ 邻域 $U(a,\ \delta)$ 是以 a 为中心，δ 为半径的开区间：$(a-\delta,\ a+\delta)$。

如果把邻域的中心去掉，所得到的数集称为点 a 的**去心 δ 邻域**(图 1 – 5)，记作 $\overset{o}{U}(a,\ \delta)$，即

$$\overset{o}{U}(a,\ \delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}。$$

把开区间$(a-\delta,\ a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域，$(a,\ a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域。

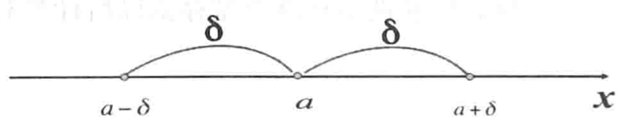


图 1 – 5

有时候，我们不需要知道邻域的半径，这时的邻域就简记为 $U(a)$，$\overset{o}{U}(a)$。

二、函数的概念

定义 1　设数集 $D\subset R$，则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y=f(x),\qquad x\in D。$$

其中 x 为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**。函数定义中，对于每个 $x\in D$，按对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$。因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，通常称为函数关系。函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合 $R_f=\{f(x)|x\in D\}$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的**值域**。

需要指出，按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值。但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x)$，$x\in D$”或“$y=f(x)$，$x\in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f。

表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的f外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如“g”、“F”、“φ”等。相应的，函数可记作$y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$等。

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在R内，因此构成函数的要素是：定义域及对应法则。如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的。

在实际问题中，要根据问题的条件或实际意义确定函数的定义域。对于用算式表达的函数，如果没有其他附加条件，则认为函数的定义域是使得算式有意义的一切x值。例如，函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是闭区间$[-1,1]$。但是，如果x是斜边长为1的直角三角形的一条直角边的边长，y是另一条直角边的边长，则$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是开区间$(0,1)$。

例1　求函数$y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域。

解：要使表示y的算式有意义，必须有

$$\begin{cases} x^2-x-6\geqslant 0 \\ -1\leqslant \dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1 \end{cases},$$

这两个不等式的公共解为

$$-3\le x\le -2\text{或}3\le x\le 4,$$

故函数的定义域为$[-3,-2]\cup[3,4]$。

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法、解析法（公式法），这在中学里大家已经熟悉。其中，用图形法表示函数是基于函数图形的基本概念，即平面上的点集

$$\{P(x,y)|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数$y=f(x)$，$x\in D$的图形（图1－6）。

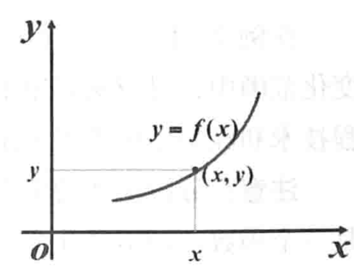


图1－6

下面举几个函数的例子。

例2　绝对值函数

$y=|x|=\begin{cases}-x,x<0,\\ x,x\ge 0,\end{cases}$ 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$，如图1－7所示。

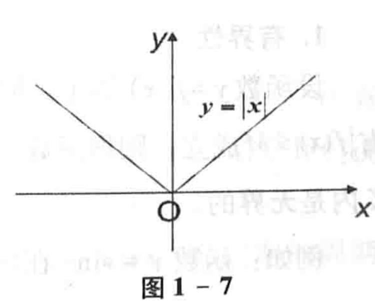


图1－7

例3　符号函数

$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1,x<0\\ 0,x=0,\\ 1,x>0,\end{cases}$ 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$，如图1－8所示。显然，对于任意$x\in R$，下列关系式成立

$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$。

例 4 取整函数 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$。

例如 $\left[\frac{3}{7}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$。

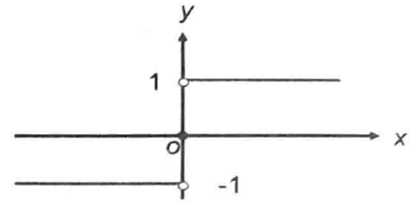


图 1－8

把 x 看作变量，则函数 $y=[x]$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为Z。如图1－9所示，这图形称为阶梯曲线，在 x 为整数处，图形发生跳跃，跃度为 1。

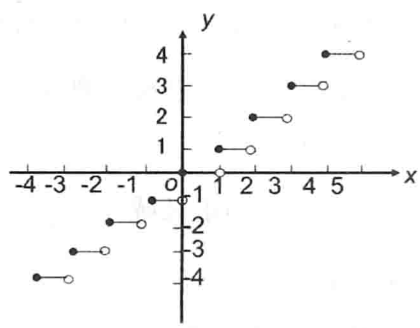


图 1－9

例 5 Dirichlet 函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\ 为有理数,\\ 0, & x\ 为无理数,\end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{1,0\}$。

在例 2、例 3 和例 5 中看到，有时一个函数要用几个式子表示。这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子表示的函数，通常称为**分段函数**。它也是自然科学、工程技术和经济学中常用的函数形式。

注意：分段函数的定义域是其各段定义域的并集。另外，分段函数在其整个定义域上是一个函数，而不是几个函数。

三、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$。如果存在 $M>0$，使得对于任一 $x\in X$，均有 $|f(x)|\le M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 内是**有界**的，如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 内是**无界**的。

例如：函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x|\le 1$ 对于一切实数均成立（取 $M=1$）。函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上有界，因为对任何 $x\in[2,+\infty)$，都有 $\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{1}{2}$（取 $M=\frac{1}{2}$）；但 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 上无界，因为不存在 $M>0$，使 $\left|\frac{1}{x}\right|\le M$ 对 $(0,2)$ 内任意 x 都成立。可见函数的有界性是相对于某区间而言的。

2. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$。如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的（如图 1－10）；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的（如图 1－11）。

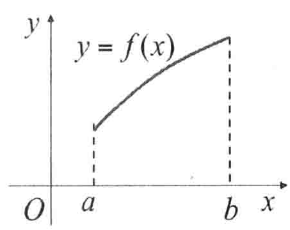


图 1－10

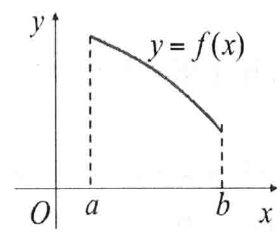


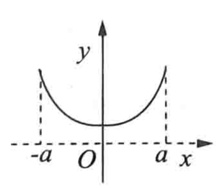
图 1－11

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**。

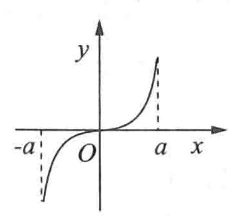
3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称。如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**。如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**。

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，奇函数的图形是关于原点对称的（图 1－12）。



偶函数



奇函数

图 1－12

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D。如果存在一个正数 t，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm t)\in D$，且 $f(x+t)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，t 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期。

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数。

并非每个周期函数都有最小正周期。例如 *Dirichlet* 函数，任何正有理数 r 都是它的周期。因为不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期。

四、反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的，我们不仅要研究变量y随x变化而变化的状况，有时还要研究变量x随变量y变化而变化的状况。例如，由静止状态自由下落的物体，其运动由函数$s=\frac{1}{2}gt^2$来表示，知道t就可确定s。但是，如果问题是由物体下落的距离s来确定所需要的时间t，那就可由$s=\frac{1}{2}gt^2$解出t，把它表示为s的反函数

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}, s\in[0,T]。$$

其中s是物体在开始下落时与地面的距离。由以上这对函数，我们引出如下反函数的概念。

定义 2　设已知函数$y=f(x)$，$x\in D$，其值域为B，若对于B中每一个y，D中有且只有唯一的x，使得$f(x)=y$，则这个对应法则定义了在B上的一个函数，这个函数称为$y=f(x)$在D上的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y), y\in B。$$

为了与反函数相对应，将原来的函数称为**直接函数**。习惯上我们用x表示自变量，y表示因变量，因此，将反函数中两个变量位置互换一下，得到$y=f^{-1}(x)$。除非有特别的说明，以后说函数$y=f(x)$的反函数就是指$y=f^{-1}(x)$。

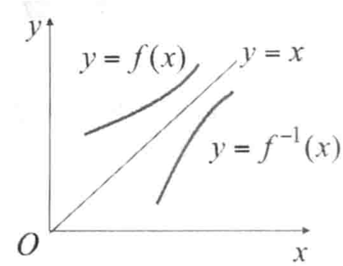


图 1 - 13

注意：反函数的实质在于它所表示的对应规律，而对于用什么字母表示反函数中的自变量与因变量是无关紧要的。事实上，函数$y=f(x),x\in D$和$x=f^{-1}(y),y\in B$是同一个函数，它们的图像是重合的。而如果把$y=f(x)$和$y=f^{-1}(x)$的图像画在同一坐标平面上，就会发现它们的图像是关于直线$y=x$对称的(图 1 - 13)。

什么样的函数才会有反函数？关于这个问题，可以证明如下定理是成立的：

定理　如果函数$y=f(x)$在区间I上不仅一一对应而且单调，则该函数存在反函数$y=f^{-1}(x)$，且其反函数也是一一对应并且单调。

$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$同为单调增函数或单调减函数。

对于反函数，需要正确理解以下几点：

(1) 互为反函数的两个函数的定义域和值域是反的；

(2) 一个函数如果有反函数，它必定是一一对应的关系；

(3) 在xoy坐标系中，$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$表示同一曲线，如果把$x=f^{-1}(y)$中x和y的位置对调，那么$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线$y=x$对称。

给定$y=f(x)$，怎样求反函数？

第一步：由方程$y=f(x)$解出x，得$x=f^{-1}(y)$；

第二步：将$x=f^{-1}(y)$中的x，y互换，得出反函数。

例 6　求函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数。

解： 函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $x\in[1,+\infty)$，值域为 $(-\infty,0]$。

由 $y=-\sqrt{x-1}$ 解出它的反函数为

$$x=y^2+1,\quad y\in(-\infty,0],$$

按照习惯又写作

$$y=x^2+1,\quad x\in(-\infty,0]。$$

五、复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，值域为 R_φ，当 $D_f\cap R_\varphi$ 非空时，记 $D=\{x|u=\varphi(x),x\in D_\varphi,u\in D_f\}$，显然有 $D\subset D_\varphi$。对于任一 $x\in D$，有 $u=\varphi(x)\in D_f\cap R_\varphi$ 与之对应，进而有 $y=f(u)$ 与之对应。这样通过 u 得到了以 x 为自变量，y 为因变量的函数，称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

并称 u 为中间变量。

例如 $y=\arctan x^2$ 可以看作是由函数 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

函数 φ 与 f 能构成复合函数的条件是：函数 φ 的值域与函数 f 的定义域的交集非空。否则，不能构成复合函数。例如，函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数，这是因为对任一 $x\in R$，$u=2+x^2$ 均不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内。

六、初等函数

在初等数学中已经讲过下面几类函数：

常函数：$y=C$（C为常数），

幂函数：$y=x^\mu\ (\mu\in R)$，

指数函数：$y=a^x\quad (a>0,a\neq1)$，

对数函数：$y=\log_a x\quad (a>0,a\neq1)$，

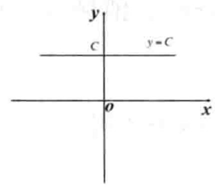
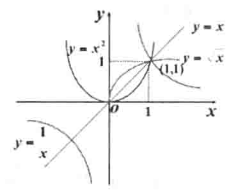
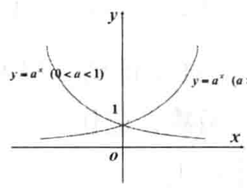
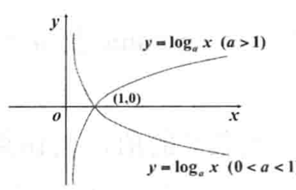
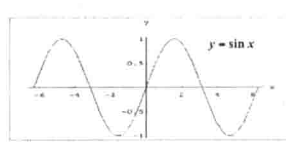
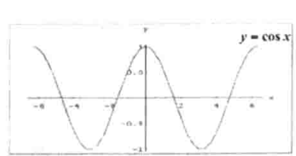
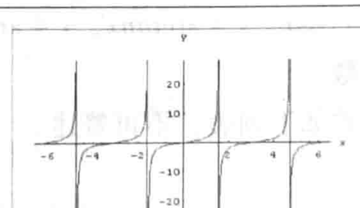
特别当 $a=e$ 时，记为 $y=\ln x$，

三角函数：如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 等，

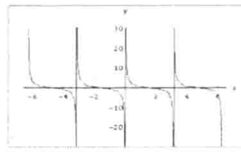
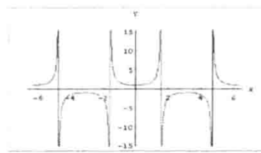
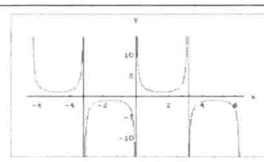
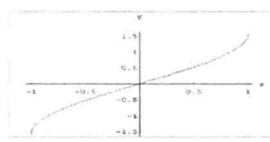
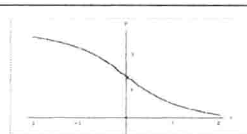
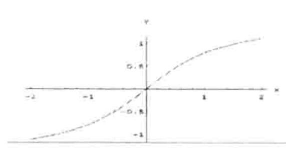
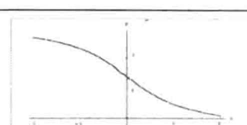
反三角函数：如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等。

以上这六类函数统称为**基本初等函数。**

这些函数的基本图形和简单性质请看如下列表，不再赘述。

名称	表达式	图　　形	简单性质
常函数	$y=C$ （C 为常数）		1. 定义域为$(-\infty,\ +\infty)$。 2. 偶函数。
幂函数	$y=x^{\mu}$ $(\mu\in R)$		1. 当$\mu>0$时，函数在$(0,\ +\infty)$递增；当$\mu<0$时，函数在$(0,\ +\infty)$递减。 2. $y=x^{\mu}(x>0)$与$y=x^{\frac{1}{\mu}}(x>0)$互为反函数。
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$		1. 定义域为$(-\infty,\ +\infty)$。2. 当$a>1$时，函数单增；当$0<a<1$时，函数单减。3. $y=a^x$与$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$的图形关于$y$轴对称。
对数函数	$y=log_ax$ $(a>0,\ a\neq1)$		1. 定义域为$(0,\ +\infty)$。2. 当$a>1$时，函数单增；当$0<a<1$时，函数单减。3. $y=log_ax$与$y=log_{\frac{1}{a}}x$的图形关于x轴对称。4. $y=log_ax(x>0)y=a^x(-\infty<x<+\infty)$互为反函数。
三角函数	$y=\sin x$		1. 定义域为$(-\infty,\ +\infty)$。2. 奇函数。3. 有界函数。4. 周期为2π。5. 函数在$[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}](k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$上单增；在$[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}](k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$上单减。
	$y=\cos x$		1. 定义域为$(-\infty,\ +\infty)$。2. 偶函数。3. 有界函数。4. 周期为2π。5. 函数在$[(2k-1)\pi,\ 2k\pi](k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$上单增；在$[2k\pi,\ (2k+1)\pi](k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$上单减。
	$y=\tan x$		1. 定义域为$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$。2. 奇函数。3. 周期为$\pi$。4. 函数在$(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2})(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$内单增。

续表

名称	表达式	图形	简单性质
三角函数	$y = \cot x$		1. 定义域为 $x \neq k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$。2. 奇函数。3. 周期为 π。4. 函数在 $(k\pi, (k+1)\pi)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 内单增。
	$y = \sec x$		1. 定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$。2. 偶函数。3. 周期为 2π。
	$y = \csc x$		1. 定义域为 $x \neq k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$。2. 奇函数。3. 周期为 2π。
反三角函数	$y = \arcsin x$		1. 定义域 $[-1, 1]$。2. 值域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。3. 奇函数。4. 单增。
	$y = \arccos x$		1. 定义域 $[-1, 1]$。2. 值域 $[0, \pi]$。3. 单减。
	$y = \arctan x$		1. 定义域 R。2. 值域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。3. 奇函数。4. 单增。
	$y = \operatorname{arccot} x$		1. 定义域 R。2. 值域 $(0, \pi)$。3. 单减。

在高等数学中，常见的函数都是以基本初等函数为基础而构成的。因此，一定要非常熟悉它们的特性，特别是从图像上掌握它们的特点，这将为我们以后的学习打下良好的基础。

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合运算所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**。不是初等函数的函数一般叫做**非初等函数**。

例如，$y=\sqrt{1-x^2}, y=\sin^2 x, y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$ 等都是初等函数。

而 $y=\operatorname{sgn} x, y=[x], y=\begin{cases} x+1, x\leq 0 \\ x-1, x>0 \end{cases}$ 与 $x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 等都不是初等函数。

在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数。

本节的重点

本节重点是：

（1）任何函数都由两个要素确定，即函数的定义域和对应法则。因此，要判定两个函数是否相同，必须从这两方面检查，至于代表自变量及函数的字母的记法是无关紧要的。例如$f(x)=2x^3+4x+5$与$g(t)=2t^3+4t+5$表示同一个函数。

（2）复合函数的概念很重要，它的作用在于：由简单的函数经过复合步骤得到多种多样新的函数以丰富我们的研究对象，把一切较复杂的函数看作是一些简单函数的复合以便进行研究。特别值得注意的是，复合函数$y=f(g(x))$定义域C不一定是$g(x)$的定义域B，而是$C=\{x|g(x)\in A, x\in B\}$，这里$A$是$f(x)$的定义域。因此，一般的有$C\subset B$，当$C=\Phi$时，两个函数就不能进行复合。

（3）$y=f(x)$存在反函数意味着函数的定义域D和值域$f(D)$之间按对应法则f建立了一一对应关系，据此，$y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$不存在反函数。

（4）分段函数是高等数学中常遇到的一类函数，要深刻理解，并要记住一些常见的分段函数。例如绝对值函数$y=|x|$、狄利克雷函数$D(x)$、符合函数$\operatorname{sgn}(x)$、取整函数$f(x)=[x]$等。

（5）要理解常见几类函数的定义：有界函数、单调函数、奇偶函数、周期函数，并熟悉基本初等函数的有关性质及图形。

习题　1－1

1. 指出下列函数哪些是初等函数，哪些不是初等函数：

（1）$y=\dfrac{e^{\sqrt{1-x^2}}+x^2}{1+x+\sin\sqrt{x}}$；　（2）$y=\begin{cases}x-x^3, & x<0\\ x+x^3, & x\geqslant 0\end{cases}$；

（3）$y=\begin{cases}x^2, & x<1\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases}$；　（4）$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$；

（5）$y=\sqrt{x}+\ln(2-\frac{1}{2}\cos x)$；　（6）$y=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ -2x+1, & 0\leqslant x<1\end{cases}$。

2. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{3x+2}$；　（2）$y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

（3）$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　（4）$y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

（5）$y=\sin\sqrt{x}$；　（6）$y=\tan(x+1)$；

（7）$y=\arcsin(x-3)$；　（8）$y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；