21世纪高职高专重点教材

应用高等数学

工科类·上册

主编 于德明
戎 笑

浙江科学技术出版社

21世纪高职高专重点教材

应用高等数学

工科类·上册

主　　编　于德明　戎　笑

副 主 编　孙　洁　吴菊凤

编写人员　（按姓氏笔画为序）

于德明　王　飞　戎　笑

孙　洁　孙　霞　吴菊凤

宋　维　徐家利　章　茜

浙江科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学：工科类. 上册/于德明，戎笑主编. —杭州：浙江科学技术出版社，2012. 9

ISBN 978-7-5341-4910-8

Ⅰ. ①应... Ⅱ. ①于...②戎... Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 210707 号

21 世纪高职高专重点教材

书　　名	**应用高等数学　工科类·上册**
主　　编	于德明　戎　笑
出版发行	浙江科学技术出版社 杭州市体育场路 347 号　邮政编码：310006 联系电话：0571-85170300-61704 E-mail：zkpress@zkpress.com
排　　版	杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷	杭州豪波印务有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	787×1092　1/16　　**印　张**　7.75
字　　数	170 000
版　　次	2012 年 9 月第 1 版　　2012 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5341-4910-8　　**定　价**　18.00 元

责任编辑　宋　东　王巧玲　　**封面设计**　金　晖

责任校对　赵新宇　　**责任印务**　徐忠雷

前 言

进入21世纪，高等职业教育作为高等教育的一个重要组成部分，以超常规的速度得以发展。高等职业教育不仅仅是培养现代社会的职业人，而是培养高素质的社会主义事业的建设者，这种认识慢慢地得到了各级教育行政部门的认可。作为高等职业工科院校的一门公共基础类课程，高等数学在培养学生的逻辑思维、分析解决问题的能力，全方位地提升学生的综合素质等方面，其地位与作用也慢慢地受到各级教育行政部门、高等职业院校有识之士的重视。伴随着高等职业教育的高速发展，高等数学的教学改革也在如火如荼地展开。

在浙江省数学会职教数学专业委员会的协调下，由浙江省多所高职高专院校长期从事高等数学教学、具有丰富教学经验的老师联合编写了这套《应用高等数学》系列教材。《应用高等数学》共分五大系列，包括：《应用高等数学》（工科类上、下）、《应用高等数学》（建设类）、《应用高等数学》（计算机类）、《应用高等数学》（经管类）、《应用高等数学》（医药类），内容涵盖了工科、建设、计算机、财经、文秘、医药和农林类等方面。

《应用高等数学》（工科类上、下）坚持"大平台，分层次，活模块，多接口"的原则，有以下几个特色：

1. 问题导入。每一章前设置几个问题，通过对问题的思考，激起学生的学习兴趣，调动他们的主观能动性，了解本章学习的内容，知道本章的学习将能解决什么问题。

2. 内容整合。本教材将极限、导数、积分三块内容进行了结构优化，改变传统的数学学科体系，符合浙江省高等职业院校的实际教学现状。其余部分根据不同专业的需要可进行模块选择。

3. 强化应用。我们认为当前高等职业院校的高等数学教学，应该更多地教会学生一种逻辑思维的方法、一种分析解决简单实际问题的能力。因此，在本教材的编写过程中，我们较侧重应用问题的分析与解题方法的培养。

4. 降低难度。与以往教材相比，本教材已大大地降低了难度，内容力求简洁，学生一拿到书，心理负担就减轻了一半。这也是贯彻浙江省教育厅教育发展规划精神，符合当前高等职业院校的高等数学教学现状，更体现了以人为本的精神。

5. 数学实验。每章最后都配以简单易懂的 Mathematica，以帮助学生在理解数学方法的前提下，掌握一类数学软件，借助计算机来解决实际问题。

6. 书后附录。教材最后增加了一些附录（公式、数表），便于学生自己复习、查找所需知识点。

本套教材分上、下两册，由浙江机电职业技术学院与浙江邮电职业技术学院的部分数学教师集体编写。上册主编为于德明、戎笑，下册主编为于德明、孙霞。参编情况为：第一章与第七章由宋维编写，第二章与第六章由戎笑编写，第三章与第九章部分由于德明编写，第四章与第五章由孙洁编写，第八章与第十章由孙霞编写，第三章第八、九两节由吴菊凤编写，第九章第五节由王飞编写，第九章第六节由章茜编写，全部数学实验 Mathematica 由徐家利编写。

都说高等数学难，老师反映上课难，学生反映学习难。笔者认为高等数学确实难，难在于

一是课程的特点，作为大学的一门基础课程，它改变了我们传统的认识，教给我们新的逻辑思维与方法，自然有其难的所在；难在于二是课程的人为属性，数学教师总是对学生谈系统性与严密性，可是生产一线的工程技术人员更多地看重数学的应用，而国外教材实际上也没有这么难。作为一名从事数学教育 30 多年的老教师，我想带领教学团队做一下尝试，进行一些改革，这也是抛砖引玉。

本教材定位于高等职业院校高等数学课程用书，不适合作为“专升本”高等数学培训用书。

由于作者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，敬请读者不吝赐教。

编　者

2012 年 6 月

目　　录

上　　册

下　　册

第一章　函数与极限

生活中的若干问题：

1. 某市A型号出租车的起步价为10元，超过4km时，超出部分需付费2元/km，超出8km时，每千米需加收20%.那么付费金额与乘车距离间存在什么样的函数关系？

2. 设一套商品房价值40万元，王某自筹了20万元，要购房还需借款20万元，借款月利率为0.5%，条件是每月还一些，25年还清，假如还不起，房子归债权人.王某具有什么样的能力才能贷款购房呢？

3. 某玩具公司生产x件玩具，将花费$400+5\sqrt{x(x-4)}$元.如果每件玩具卖48元，那么公司生产x件玩具获得的净利润是多少？又生产多少件玩具时，能获得最大利润？

4. 有一块边长为20cm的正方形枕木，木工师傅先将枕木刨成正八边形，再刨成正十六边形，后刨成正三十二边形，…… 以此种方法刨下去，结果枕木刨成了什么形状？

§1-1　初等函数

一、函数的概念

日常生活中，我们经常看到两个事物之间存在着某种联系，例如，购买物品的单价确定后，付款金额与购买数量之间存在着一种关系；某天的气温与所处的时间之间存在着一种关系；汽车的耗油量与所行驶的路程之间存在着一种关系.我们把上述这些关系统称为是一种函数关系.

定义1　设D是一个实数集，如果有一个对应法则f，对每一个$x\in D$，都有唯一数值y和它对应，则将对应法则f称为定义在D上的一个函数，记作$y=f(x)$，x称为自变量，y称为因变量，数集D称为函数的定义域.当x取遍D中的数，对应的y构成一个数集M称为函数的值域.

函数的定义域、对应法则称为函数的两要素.在函数定义中，由定义域与对应法则确定了函数的值域.如果两个函数的定义域、对应法则均相同，那么称这两个函数是同一个函数，否则是两个不同的函数.如$y=|x|$与$y=\sqrt{x^2}$，因为它们的定义域与对应法则完全相同，所以是同一个函数；而$y=1$与$y=\frac{x}{x}$，由于它们的定义域不同，故它们是两个不同的函数.

1. 函数的定义域

如果一个函数是用解析式来表示的，我们约定其定义域为使数学表达式有意义的自变量所能取的实数集合.要使表达式有意义，一般应考虑以下五个方面：

a. 分母不等于零；

b. 偶次根式根号内的式子大于等于零；

c. $\log_a x$ 的真数需大于零；

d. $\arcsin x$，$\arccos x$ 中，$|x|\leqslant 1$；

e. 表达式中含有分式、根式和反三角函数式，则应取各部分定义域的交集.

例 1 已知函数 $y = \dfrac{x+7}{\sqrt{x-2}}$,求定义域.

解 因为偶次根号内的式子非负,分母不能为零,有

$x-2>0$,即 $x>2$,

所以函数的定义域为 $x \in (2,+\infty)$.

例 2 求函数 $y = \log_3(x-1) + \arcsin\dfrac{2x-1}{4}$ 的定义域.

解 因为真数必须大于零,同时考虑反正弦函数的定义域要求,有

$$\begin{cases} x-1>0, \\ -1 \leqslant \dfrac{2x-1}{4} \leqslant 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ -1.5 \leqslant x \leqslant 2.5, \end{cases} \Rightarrow 1 < x \leqslant 2.5$$

所以函数的定义域为 $x \in (1, 2.5]$.

在研究函数时,经常用到邻域的概念. 设 x_0 是实数轴上一点,δ 为某一正数,我们把以 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为 x_0 的 δ 领域,或简称为点 x_0 的邻域.

2. 函数的代值

当自变量 x 在定义域内取某一定值 x_0 时,因变量 y 按对应法则 f 得出的对应值称为函数当 $x=x_0$ 时的函数值,记为 $f(x_0)$.

例 3 已知 $f(x)=x^2+x+5$,求 $f(-1)$,$f(-x)$.

解 $f(-1)=(-1)^2+(-1)+5=5$,

$f(-x)=(-x)^2+(-x)+5=x^2-x+5$.

例 4 已知 $f(x+1)=x^2-x+3$,求 $f(x)$,$f(1)$,$f(x^2)$.

解 令 $x+1=t$,则 $x=t-1$,

$f(t)=(t-1)^2-(t-1)+3=t^2-3t+5$,

改写 $f(x)=x^2-3x+5$,

$f(1)=1^2-3\times1+5=3$,

$f(x^2)=(x^2)^2-3(x^2)+5=x^4-3x^2+5$.

3. 函数的表示法

通常,函数有三种表示法:表格法、图形法和公式法(又称解析法).

一个函数在其定义域的不同区间内,用不同的式子分段表示的函数称为分段函数. 如

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 2x, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

就是一个分段函数.

注: 上面的函数不是两个函数,而是用两个式子表示一个函数. 因此,要求定义域内某个自变量 x 的函数值时,一定要注意将此自变量代入分段函数在相应定义区间上的公式. 分段函数的定义域是各自变量取值集合的并集.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \leqslant 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$,求 $f(-1)$,$f(0)$,$f(1)$,作出函数图象.

解 $f(-1)=e^{-1}$,$f(0)=1$,$f(1)=1$,图象如右图.

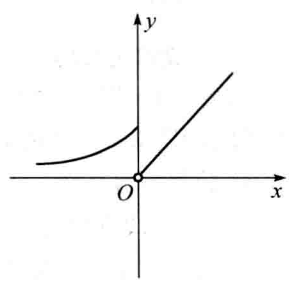

图 1-1

二、基本初等函数

在中学里,我们已经学过六类基本初等函数.

1. 常数函数 $y=c$

2. 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实数)

为了便于比较,我们只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形,$x<0$ 的情形可由函数奇偶性得出.

当 $\alpha>0$ 时,图象过点$(0,0)$和点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调递增,如图 1-2.

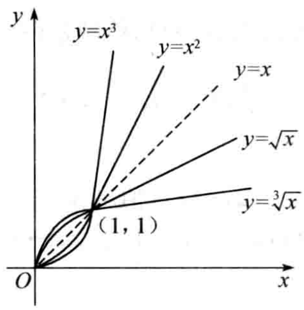

图 1-2

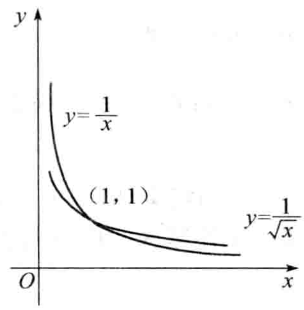

图 1-3

当 $\alpha<0$ 时,图象过点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调递减,曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线,如图 1-3.

3. 指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq 1$)

函数定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(0,+\infty)$.图象在 x 轴上方,过点$(0,1)$.

当 $a>1$ 时,函数单调递增,曲线以 x 轴负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数单调递减,曲线以 x 轴正半轴为渐近线,如图 1-4.

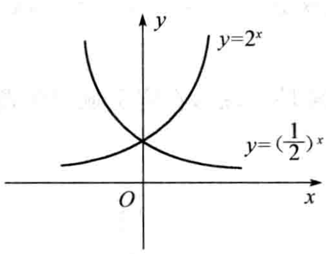

图 1-4

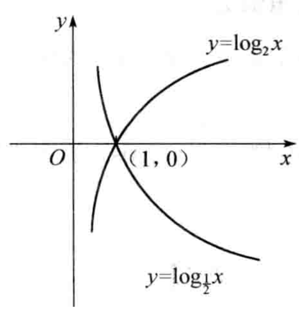

图 1-5

4. 对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq 1$)

函数定义域是$(0,+\infty)$,值域是$(-\infty,+\infty)$.图象在 y 轴右方,过点$(1,0)$.

当 $a>1$ 时,函数单调递增,曲线以 y 轴负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数单调递减,曲线以 y 轴正半轴为渐近线,如图 1-5.

以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 叫做自然对数,记作 $y=\ln x$.

5. 三角函数

函数 $y=\sin x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$[-1,1]$,以 2π 为周期,有界,如图 1-6.

函数 $y=\cos x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$[-1,1]$,以 2π 为周期,有界,如图 1-7.

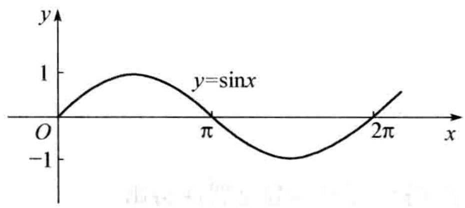

图 1-6

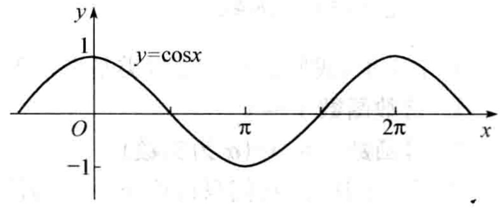

图 1-7

函数 $y=\tan x$ 的定义域是 $\left\{x \middle| x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)\right\}$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，以 π 为周期，在每一个连续区间内单调递增，以直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为渐近线，如图 1-8.

函数 $y=\cot x$ 的定义域是 $\{x \mid x \neq k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)\}$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，以 π 为周期，在每一个连续区间内单调递减，以直线 $x=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为渐近线，如图1-9.

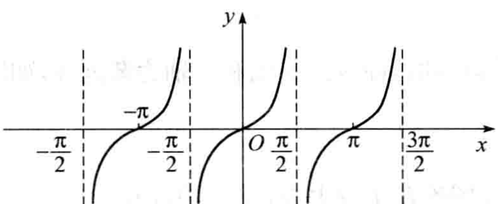

图 1-8

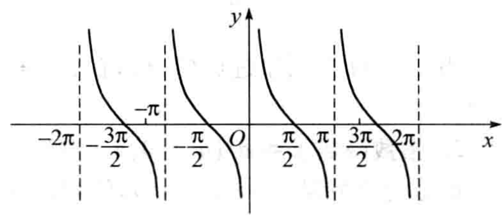

图 1-9

6. 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，在定义域内单调递增，有界，如图 1-10.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$，在定义域内单调递减，有界，如图 1-11.

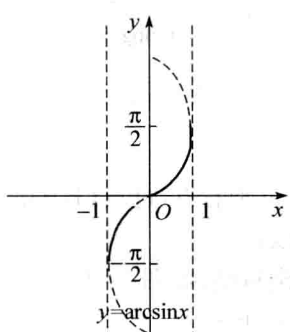

图 1-10

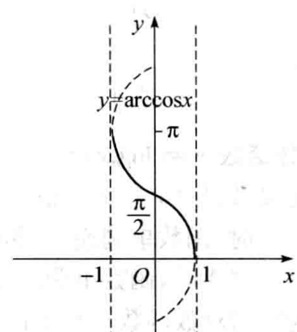

图 1-11

反正切函数 $y = \arctan x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，在定义域内单调递增，有界，渐近线为 $y = \frac{\pi}{2}$ 和 $y = -\frac{\pi}{2}$，如图 1-12.

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $(0, \pi)$，在定义域内单调递减，有界，渐近线为 $y = 0$ 和 $y = \pi$，如图 1-13.

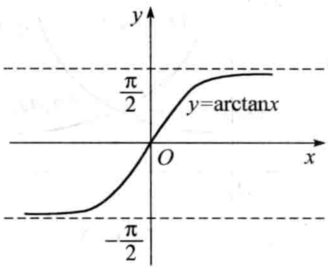

图 1-12

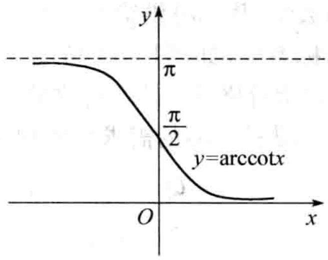

图 1-13

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \ln(3 - x)$；　　(2) $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x}{x-2}$；

(3) $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-5}$；　　(4) $y = \arcsin(x-1)$.

2. 设 $f(x) = \dfrac{x}{1+2x}$，求 $f(2)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} -x-1, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$，并作出函数图象.

§1-2　函数关系的建立

一、经济类函数

1. 需求函数

在经济活动中，作为市场中的一种商品，消费者对它的需求量受到许多因素的影响，其中市场价格是影响需求量的一个很重要的因素，忽略其他因素的影响，则某种商品的市场需求量 Q 是该商品的价格 p 的函数，即

$$Q = Q(p), p \geqslant 0.$$

2. 供给函数

如果市场的每一种商品直接由生产者提供，生产者的供给量也会受到许多因素的影响，其中市场价格是影响供给量的一个很重要的因素，忽略其他因素的影响，则某种商品的供给量 S 是该商品的市场价格 p 的函数，即

$$S = S(p), p \geqslant 0.$$

一般地，商品的需求量随商品的价格上涨而减少，因此商品的需求函数Q是商品价格p的减函数；商品的供给量随商品的价格上涨而增加，因此商品的供给函数S是商品价格p的增函数.

3. 均衡价格

价格的变化，引起供求的变化，供求的变化也会导致价格的涨落. 当商品的需求价格和供给价格相一致时的价格称为均衡价格，这时商品的供求量称为均衡数量. 我们将供给函数S和需求函数Q的曲线画在同一坐标系中，如图1-14所示. 它们相交于点(p_0,Q_0)处，p_0是均衡价格，Q_0是均衡数量.

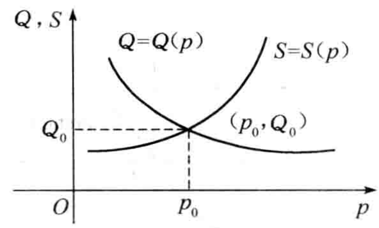

图1-14

例1 某种商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q=-p^2+4p+12,$$
$$S=p^2-4.$$

求该商品的市场均衡价格和均衡数量.

解 由市场均衡条件$Q=S$，得

$$-p^2+4p+12=p^2-4,$$

整理得 $2p^2-4p-16=0$,

解此二次方程得 $p_1=4, p_2=-2$,

显然，p_2不符合题意，故舍去. 因此有

$$p_0=4, Q_0=12.$$

即该商品的市场均衡价格为4，市场均衡数量为12.

4. 收益函数

收益是指生产者出售商品的收入，总收益是指将一定量的商品出售后所得到的全部收入；平均收益是指出售一定量的商品时，每单位商品所得的平均收入，即每单位商品的售价.

若以销量q为自变量，总收益R为因变量，R与q之间的函数关系称为总收益函数. 若已知需求函数$Q=Q(p)$，则总收益函数可记作

$$R=R(q)=qP=qQ^{-1}(q), q\geqslant 0.$$

其中$P=Q^{-1}(q)$是价格函数.

例2 已知某种商品的需求函数是$Q=3000-5p$，试求该商品的收益函数，并求出销售200件该商品时的总收益.

解 由需求函数可得 $5p=3000-q, p=600-0.2q$.

该商品的收益函数$R(q)=qp=600q-0.2q^2$,

由此可得销售200件该商品时的总收益

$$R=600\times 200-0.2\times 200^2=112000(\text{万元}).$$

5. 成本函数

成本是指生产特定产量的产品所需要的费用总额，它包括两部分：固定成本和可变成本. 固定成本是在一定限度内不随产量变动而变动的费用，如厂房、设备等. 可变成本是随产量变动而变动的费用，如原材料、能源等.

若以 q 表示产量，C 表示总成本，则 C 与 q 之间的函数关系称为总成本函数，记作

$$C = C(q) = C_0 + V(q), \quad q \geqslant 0.$$

其中 $C_0 \geqslant 0$ 是固定成本，$V(q)$ 是可变成本.

6. 利润函数

利润是生产者收入扣除成本后的剩余部分. 总利润函数定义为总收益函数 $R = R(q)$ 与总成本函数 $C = C(q)$ 之差，记作 $L(q)$，即 $L = R - C$，或

$$L(q) = R(q) - C(q).$$

其中 q 是产品数量.

例 3 已知生产某种商品 q 件时的固定成本为 10 万元，可变成本为 $5q + 0.2q^2$ 万元，销售每件商品的价格为 9 万元. 求：

(1) 利润函数与平均利润函数；

(2) 生产 10 件产品的总利润与平均利润；

(3) 生产 20 件产品时的总利润.

解 由题意知，总成本 $C = 10 + 5q + 0.2q^2$，该商品的收益函数是 $R(q) = 9q$(万元).

(1) 总利润 $L(q) = R(q) - C(q) = 9q - (10 + 5q + 0.2q^2) = -0.2q^2 + 4q - 10$，

平均利润 $\bar{L}(q) = \dfrac{L(q)}{q} = -0.2q + 4 - \dfrac{10}{q}$.

(2) 生产 10 件该商品的利润为

$$L(10) = -0.2 \times 10^2 + 4 \times 10 - 10 = 10(\text{万元}),$$

此时的平均利润是

$$\bar{L}(10) = \frac{L(10)}{10} = 1(\text{万元}).$$

(3) 生产 20 件该商品的总利润为

$$L(20) = -0.2 \times 20^2 + 4 \times 20 - 10 = -10(\text{万元}).$$

从上面这个例子我们发现，利润并不是随销售量的增加而增加的.

7. 银行复利问题

例 4 年初 100 元现金存入银行，扣税后年利率为 2.05%，试用复利公式计算第 10 年末的本利和.

解 分析：设本金 A_0，年利率为 r，计息年数为 n，本利和为 A_n，则

第一年末的本利和为 $A_1 = A_0(1 + r)$，第二年末的本利和为 $A_2 = A_0(1 + r)^2$，……，第 n 年末的本利和为 $A_n = A_0(1 + r)^n$.

若每年底结算一次，则 10 年末的本利和为

$$A_{10} = 100(1 + 0.0205)^{10} \approx 131.08 \text{ 元}.$$

在本题中，如果每年分 m 次计息，每期利率可认为是 $\dfrac{r}{m}$，第 n 年末的本利和为 $A_n = A_0\left(1 + \dfrac{r}{m}\right)^{mn}$.

8. 抵押贷款问题

例 5 设一套商品房价值 40 万元，王某自筹了 20 万元，要购房还需借款 20 万元，借款月

利率为 0.5%，条件是每月还一些，25 年还清，假如还不起，房子归债权人. 问：王某具备什么能力才能贷款购房呢?

解 分析：起始借款 20 万元，借款月利率 $r=0.005$，借期(月) $=12$(月/年)$\times 25$(年) $=300$(月)，每月还 x 元，y_n 表示第 n 月仍欠债主的钱，则

$$y_0=200000, y_1=y_0(1+r)-x, y_2=y_1(1+r)-x=y_0(1+r)^2-x[(1+r)+1],$$

$$y_3=y_2(1+r)-x=y_0(1+r)^3-x[(1+r)^2+(1+r)+1],\cdots,$$

$$y_n=y_{n-1}(1+r)-x=y_0(1+r)^n-x[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)+1]$$

$$=y_0(1+r)^n-\frac{x[(1+r)^n-1]}{r}$$

当贷款还清时，$y_n=0$，可得

$$x=\frac{y_0 r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

将 $n=300, r=0.005, y_0=200000$ 代入得 $x=1288.6$

即王某如果不具备每月还贷 1288.6 元的能力，就不能贷款.

二、工程类函数

例 6 曲柄连杆机构(如图 1-15)是利用曲柄 OA 的旋转运动，通过连杆 AB 使滑块 B 做往复直线运动. 设曲柄 OA 的长度为 r，连杆 AB 的长度为 l，曲柄以等角速度 ω 绕 O 旋转，求滑块 B 的运动规律.

解 假设曲柄 OA 开始做旋转运动时，A 在 D 处. 设滑块 B 的运动规律为 $S=S(t)$，由图 1-15 可知，

$S=OC+CB$.

由 $OC=r\cos\varphi, CA=r\sin\varphi, \varphi=\omega t$，可得 $OC=r\cos\omega t$，$CA=r\sin\omega t$.

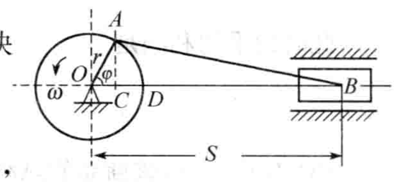

图 1-15

由于在 Rt$\triangle ABC$ 中，$CB=\sqrt{AB^2-CA^2}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$，因此滑块 B 的运动规律为

$$S=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}, t\in[0,+\infty).$$

例 7 电脉冲发生器产生一个三角脉冲，其波形如图 1-16 所示，写出电压 u(V) 与时间 t(μs) 之间的函数关系式.

解 当 $0\leqslant t<6$ 时，电压 u 由 0V 直线上升到 8V，线段 OA 的方程是 $u=\frac{4}{3}t$；

当 $6\leqslant t\leqslant 12$ 时，电压 u 由 8V 直线下降到 0V，线段 AB 的方程是 $u=-\frac{4}{3}t+16$.

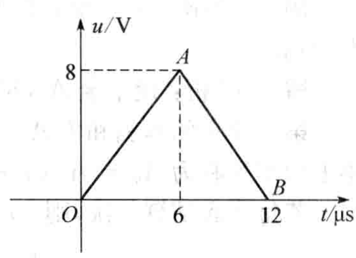

图 1-16

综上，可得 $0\sim 12$(μs) 这段时间内电压 u 与时间 t 的函数解析式：

$$u=\begin{cases}\frac{4}{3}t, & 0\leqslant t<6,\\ -\frac{4}{3}t+16, & 6\leqslant t\leqslant 12.\end{cases}$$

习题 1－2

1. 已知需求函数为 $Q=\frac{75-3p}{3}$，供给函数为 $S=\frac{2p-15}{9}$，求市场的均衡价格 p.
2. 设某商品的需求函数为 $Q=200-5p$，试求：(1) 该商品的收益函数；销售 20 件该商品时的总收益和平均收益.
3. 设某商品的成本函数是线性函数，并已知产量为零时，成本为 10000 元；产量为 100 件时成本为 40000 元. 试求：(1) 固定成本和成本函数；(2) 产量为 200 时的总成本和平均成本.
4. 设某产品的市场需求函数为 $Q=125-5p$（其中 Q 表示需求量，p 表示价格）. 若生产该产品的固定成本为 100（百元），多生产一个产品成本增加 2（百元），且工厂自产自销，产销平衡. 试求工厂的利润函数 L.
5. 银行存款的月利率是 0.6%，年利率是 2.25%，小李有现金 2000 元，想存入银行一年后取出. 请你帮他算一下，是一次性存取合算，还是每月取出后再存合算？假设个人存款需缴纳利息税 0.37%，请你帮他再算一下，哪种存法合算？
6. 设一套商品房价值 30 万元，小张自筹了 15 万，要购房还需贷款 15 万元. 假设贷款月利率为 0.5%，条件是每月还一些，20 年还清. 问小张每月应还贷款多少元？
7. 用半径为 R、中心角为 α 的扇形，做成一个母线长为 R 的无底正圆锥体. 试将这圆锥体体积 V 表示成 α 的函数，并指明定义域.
8. 旅客乘坐火车时，可免费随身携带不超过 20kg 的物品，超过 20kg 部分收费 0.5 元/kg，超过 50kg 部分再加收 50%. 试列出收费 y 与物品质量 x 间的函数关系.

§1－3　自变量 $x\to\infty$ 时函数的极限

一、数列的极限

例 1　观察下列数列的变化趋势：

(1) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$

(2) $1,\frac{5}{2},\frac{5}{3},\frac{9}{4},\frac{9}{5},\cdots,\frac{2n+(-1)^n}{n},\cdots$

(3) $1,-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$

解　观察上述数列，不难发现：

(1) 当 n 无限增大时，分母无限增大，分子为常数 1，数列的通项 $a_n=\frac{1}{2^n}$ 无限地趋近于常数 0.

(2) 当 n 无限增大时，数列的通项 $a_n=\frac{2n+(-1)^n}{n}=2+\frac{(-1)^n}{n}$ 无限地趋近于常数 2.

(3) 当 n 无限增大时，分 n 为奇数与偶数两种情况，数列的通项 $a_n=(-1)^{n+1}$ 始终是 1 与 -1，而不能趋近于一个确定的常数.

定义 1　对于无穷数列 $\{a_n\}$，如果当项数 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 无限地趋近于