

经济数学基础

第二版 上册

○ 主编 侯风波

经济数学基础

Jingji Shuxue Jichu

(第二版)上册

主编 侯风波



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是在普通高等教育“十五”国家级规划教材《经济数学基础》(第一版)的基础上,结合高职院校经济管理类专业培养高技能人才的需要,从高职院校学生实际出发,按从易到难的原则编写的高职院校经济数学课程教材。本书为上册,其内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分学的应用、一元函数积分学、多元函数微分学、常微分方程、符号计算系统 Mathematica 及其应用共 8 章,书末还配有本书习作题和总复习题的全部答案。本书特别注意培养学生用数学概念、思想、方法消化吸收经济概念、经济原理的能力,把实际问题转化为数学模型的能力,利用计算机求解数学模型的能力。

本书配套的光盘为《经济数学基础教学系统》,包括供教师使用的《经济数学基础》(第二版)教学课件和供学生使用的学习指导及助学课件。

本书可作为高职高专经济管理类专业经济数学课程通用数学教材,也可供从事经济管理工作人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础. 上册 / 侯风波主编. --2 版. --北京: 高等教育出版社, 2012. 9
ISBN 978-7-04-035672-4

I. ①经… II. ①侯… III. ①经济数学-高等职业教育-教材 IV. ①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第 161734 号

策划编辑	崔梅萍	责任编辑	崔梅萍	封面设计	张雨微	版式设计	余 杨
插图绘制	于 博	责任校对	胡美萍	责任印制	毛斯璐		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landracom.com
印 刷	国防工业出版社印刷厂		http://www.landracom.com.cn
开 本	850mm × 1168mm 1/16	版 次	2004 年 6 月第 1 版
印 张	14.75		2012 年 9 月第 2 版
字 数	290 千字	印 次	2012 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	27.60 元(含光盘)
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 35672-00

第二版前言

《经济数学基础》(第一版)出版已经8年,在这8年中有许多高职高专院校使用此书作为经济数学课程教材,同时,有许多教师希望结合当前高职高专院校生源变化以及人才培养目标的优化尽快对本教材进行修订完善,并对本教材的进一步完善提出了许多有益的建议,在此一并表示深深的感谢!

在过去8年中,编者一直坚持结合高职院校人才培养目标进行经济数学教学研究及教改实践,主持的《以应用为导向的高职高专数学课程改革与建设》课题2009年9月获第六届高等教育国家级教学成果二等奖。其主要成果有:

1. 确立了以培养“吸收、转化、求解、创新”四方面能力为主线的高职高专数学课程教学改革理念。即高职数学课在应用型人才培养中应该培养学生下面四方面的主要能力:

- ① 利用数学知识消化、吸收经济概念和经济原理的能力;
- ② 把实际问题转化为数学模型的能力;
- ③ 利用计算机和相应软件包求解数学模型的能力;
- ④ 结合具体教学内容培养学生的思维能力。

2. 确立了“高职数学课程两配合的教学模式”。为了培养学生利用数学解决专业实际问题的能力,利用选修课的时间,以数学实验课和数学实践课的形式,进行培养学生利用数学知识、数学软件和计算机解决专业实际问题能力的教学改革。该项改革极大地调动了学生“学数学,用数学”的热情;创新了高职数学课程教学“必修课与选修课,理论课与实践课”两配合的教学模式,其中作为必修课的经济数学理论课以培养学生“吸收、转化、求解、创新”四方面能力为主线,采用真实案例启动教学;在实践课上,通过让学生自己动手完成与其专业密切联系的真实课题,通过“做、学、教”一体化的教学方法训练学生用数学解决实际问题的能力。

3. 确立了高职数学课程建设的“四五二”建设模式。经济数学课程改革与建设的“四五二”课程建设模式包括四大操作环节,五大建设内容及两个确实保证。四大操作环节是:制定课程建设规划,具体落实规划,定期课程评估,再定新的课程建设规划。五大建设内容有师资队伍建设、教学质量建设、教学条件建设、教学改革建设、教书育人建设。它们既是课程建设的核心内容,也是课程建设的重点工作。两个确实保证是:对教学上遇到的重大教学课题,要确实保证立项专门研究,以求重点突破;对每一个教学周期及每项教学建设与改革工作都要保证及时总结。

4. 为了方便学生的自主性学习和教师的创造性教学,建设了包括网上自测系统、网上在线答疑系统、经济数学助学课件、经济数学电子教案、经济数学网络课程、数学建模等丰富教学资源的经济数学精品课程网站。

5. 确立了课程教学资源整体建设理念。为了及时固化和升华教学改革成果,根据高职高专经济类专业培养应用型人才的需要,基于既方便学生学,又方便教师教的目的,把课程质量标准、主教材、电子教案、练习册、学生指导书、教师教学法建议、应用案例库、自测题库的编写,以及教学方法、教学手段的制定由专人、按专题统一考虑整体建设。主教材的例题、习题、思考题与知识点相互呼应;例题、习题、思考题与知识

点的选择与层次编排遵从由浅入深、由易到难、难易适度、循序渐进、应用导向、启发思维的原则;在教学资源建设过程中,特别注意了启发式教学原则的贯彻,注意通过“已知”诱导启发学生理解“未知”,进而通过“特殊”联想“一般”,有意识地培养学生的联想能力和创造性思维。特别注意了教材及配套教学资源的适用性,例如,严格把思考题的作用限制在“帮助学生换个角度对有关知识点进行理解”的范围内,避免把思考题设计得过难。辅助教学资源的编写强调用情景真实的“案例实践”呈现问题,营造现实工作过程中待解决问题的情境;主张用问题启动学生的思维,鼓励学生基于解决问题的学习、基于案例实践的学习;通过设计各种情境真实的“案例实践”问题,开拓学生的创新思维与想象空间;充分利用各种信息为学生提供跨学科的知识链接,提高学生的综合素质与能力。

本书第一版引入了 **Mathematica** 符号计算系统,使经济数学的教学在 **Mathematica** 软件平台上进行,极大地调动了学生学习数学的积极性,提高了学生用数学解决实际问题的能力。自教材出版以来,凭借其“凝练、通俗、应用、能力”的特点,得到了许多同行教师及学生的厚爱。

为了适应教育信息化的需要,推动教学资源的现代化进程,本着精益求精的态度,吸收了众多读者的反馈意见,把《经济数学基础》(第二版)分为上下两册:上册包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分学的应用、一元函数积分学、多元函数微分学、常微分方程、符号计算系统 **Mathematica** 及其应用等内容;下册包括行列式与矩阵、线性方程组、线性规划、概率与统计等内容。本书是《经济数学基础》(第二版)(上册)。为了在更高层次上突出经济数学在科学技术和实际生活中的应用,本书结合具体内容引入了一些实际案例,以培养学生的应用能力。

本书修订过程中,在保持《经济数学基础》(第一版)深受大家欢迎且有较强适应性的内容相对稳定的前提下,主要做了如下工作:

1. 增加了一些与经济概念对应的例题与习题。
2. 增加了一些知识点的几何解释,使得一些知识点更形象直观、通俗易懂。
3. 增加了一些与知识点对应的易于理解的例题,去掉了一些难度较大的例题。
4. 增补了一些与知识点对应的易于理解的习题题及总复习题,删掉了一些难度较大的习题题及总复习题。
5. 书后增加了习题题及总复习题的答案。
6. 本书的配套光盘为《经济数学基础教学系统》,内容包括《经济数学基础电子教案》、《经济数学基础助学课件》以及本书思考题、习题题及每章总复习题的全部详细解答。

关于本书习题的使用有如下建议:

1. 《经济数学基础》(第二版)中的每节后的习题题可用于学生复习巩固本节有关知识点用。
2. 每章后的总复习题用于学有余力的学生复习巩固本章知识点,也为专升本奠定必要的基础。

本书框架结构设计及统稿、定稿由侯风波教授完成。参加本书编写的有承德石油高等专科学校的李仁芮、蔡谋全、唐世星、祖定利老师。

在本书出版过程中,得到了高等教育出版社崔梅萍编辑的大力支持与帮助,在此表示真挚的感谢!

由于我们水平所限,真诚希望读者及时反馈修改建议,可发至电子邮箱 h8218@126.com。

编者

2012年初夏于承德避暑山庄

第一版前言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材,又是教育部新世纪高职高专教育高等数学课程内容、体系改革与建设项目研究成果。本书是在充分研究当前我国高职高专大众化发展趋势下的教育现状,认真总结、分析、吸收全国高职高专院校经济管理类专业经济数学教学改革经验的基础上编写的。从高职高专教育人才培养目标出发,以教育部新修订的《高职高专教育高等数学教学基本要求》为指导,优选了教学内容。内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分学的应用、一元函数积分学、多元函数微分学、常微分方程、行列式与矩阵、线性方程组、线性规划、符号计算系统 Mathematica 及其应用共十一章。书后附有习题答案与提示。本书特别注意培养学生用数学概念、思想、方法消化吸收经济概念和经济原理的能力,把实际问题转化为数学模型的能力,利用计算机求解数学模型的能力。

本书以满足高职高专院校经济管理类专业经济数学教学需要为目标,在教学水平、科学水平、思想水平上均符合人才培养目标及本课程教学基本要求。本书取材合适、深度适宜、分量恰当,符合认知规律,富有启发性,便于学习,有利于激发学生学习兴趣及各种能力的培养。本书还有如下特色:

1. 在本书第十一章介绍了“符号计算系统 Mathematica 及其应用”,有利于培养学生用计算机及相应数学软件包求解数学模型的能力;
2. 在保证数学概念准确的前提下,尽量借助于几何直观,力求使抽象的数学概念形象化,便于读者理解;
3. 注重数学概念与实际问题的联系,特别是与经济问题的联系,例题丰富便于学习;
4. 结合具体内容进行数学建模训练,注重双向翻译能力的培养;
5. 理论推导或证明以解释清楚有关结论为度,不追求理论上的系统性;
6. 行列式采用归纳定义法,避开了逆序数定义法,适合高职高专学生学习的特点;
7. 矩阵乘法先引入行向量左乘列向量,再介绍两个矩阵的乘法,便于学生接受;
8. 课程的每一主题都尽量从几何、数值、代数三方面加以体现。
9. 在本书主编负责的网络课程中,给出了本书习题的全部答案及学法和教法建议,使用本书的学生和教师可以通过访问网络课程(<http://hv.hep.com.cn>)的相应板块得到帮助。

经济数学是高职高专学校经济管理类专业必修的一门重要的基础课程。它对培养和提高学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。

致教师:

经济数学中每一个重要概念都有其实际背景。从实际问题出发引出概念可激发学生的求知欲,提高教学效果。教师的教学活动表面上以完成教学基本要求(或教学大纲)中所规定的知识点的教学为目标,实质上,结合人才培养目标去思考确定课程的知识、能力、素质的具体培养目标才更有现实意义。高职高专教育以培养应用型人才为教育目标。那么,作为支持高职高专教育应用型人才培养目标的重要基础课

程——经济数学课程应该具体培养学生哪些方面的能力？学数学是为了用数学。这是人人都接受的观点。那么，用到哪儿？怎么用？却仁者见仁，智者见智。而诸如经济数学要学习后继课程服务、要培养学生的思维能力服务、要为获得新知识服务、要为解决实际问题服务等均在一定程度上引起了共识。但是，在一定程度上也存在着争议。通过多年的教学研究与实践，我们认识到：高职高专院校经济管理类专业的数学教育必须培养如下四方面的能力：一是用数学的思想、概念、方法消化吸收经济概念和经济原理的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力；四是培养创造性思维的能力。培养用数学思想、概念、方法消化吸收经济概念和经济原理的能力，必须重视数学概念的教学；培养学生把实际问题转化为数学模型的能力，必须重视数学建模训练；培养学生求解数学模型的能力，必须结合数学软件包进行数学教学。另外，数学是最好的思维体操，作为数学教师应有意识地去结合教学内容培养学生的逻辑思维、类比思维、发散思维及联想思维等各种思维能力，帮助他们欣赏数学美。进而，培养学生的创新能力。这些都是我们在教学中努力尝试的。在本书的编写过程中，也试着将这些观点与有关内容适度结合，但做得还远远不够。愿我们在今后的教学实践中共勉。

致学生：

为什么要学习经济数学？经济数学是学习后继课程的基础，是打开科学大门的钥匙，是高科技的核心。数学主要是研究现实世界中物质数量关系与空间形式的科学。现实世界中，凡是涉及量的大小、量的变化、量与量之间的关系，都要用到数学。客观世界中一切实在的物体都有形。因此，宇宙之大，粒子之微，光速之快……无处不用数学。要想实在地学到并掌握专业知识，必须掌握数学。

在学习经济数学过程中，必须特别注意如下4方面的问题：（1）要认真听课。同一个问题听老师讲懂要比自己看明白容易得多。（2）要善于记笔记。俗话说，好记性不如赖笔头。（3）要认真规范地做作业。这样不但有助于对所学知识的复习巩固，而且还有助于培养训练严谨认真的工作作风。（4）要善于用数学软件包 Mathematica 在计算机上求解数学模型，以训练用数学解决实际问题的能力。

本书可作为高职高专经济管理类各专业高等数学教材，也可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

本教材的基本教学时数不少于60学时，适用于二年制高职高专院校经济管理类专业；标有*号的内容要另行安排46学时，适用于三年制高职高专院校经济管理类专业。

参加本书编写的有侯风波（承德石油高等专科学校）、张学奇（承德石油高等专科学校）、孟庆才（河北工程技术高等专科学校）、杨建法（石家庄铁路职业技术学院）、刘清贵（石家庄职业技术学院）、吴素敏（石家庄职业技术学院）、蔡谋全（承德石油高等专科学校）、焦万堂（郑州工业高等专科学校）、高小明（番禺职业技术学院）、刘颖华（承德石油高等专科学校）。全书框架结构、统稿、定稿由侯风波承担。

教育部新世纪高职高专教育高等数学课程内容、体系改革与建设项目组（宣立新、任开隆、陈洪、朱卓宇、王建军、范书香）认真审阅了本书的全部原稿，提出了许多有价值的意见，在此，编者对项目组全体人员表示衷心的感谢。

由于我们水平所限，时间也比较仓促，对本书中的不足之处，敬请读者斧正。

编者

2003年12月30日

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第1章 函数	1
1.1 函数及其性质	1
1.1.1 函数的定义	1
1.1.2 函数的表示法	4
1.1.3 函数的几种特性	5
1.1.4 反函数	7
思考题 1.1	7
习题 1.1	7
1.2 初等函数	8
1.2.1 基本初等函数	8
1.2.2 复合函数	8
1.2.3 初等函数的定义	9
思考题 1.2	9
习题 1.2	9
1.3 经济中常用的函数	9
1.3.1 需求函数与价格函数	10
1.3.2 供给函数	11
1.3.3 总成本函数	11
1.3.4 收入函数与利润函数	12
思考题 1.3	15
习题 1.3	15
1.4 函数总复习	15
第2章 极限与连续	18
2.1 极限	18
2.1.1 数列的极限	18
2.1.2 函数的极限	20
2.1.3 极限的性质	23
思考题 2.1	24
习题 2.1	24
2.2 无穷小量与极限的运算	24
2.2.1 无穷小量	24
2.2.2 无穷大量	26
2.2.3 极限的运算	27
思考题 2.2	29

习题 2.2	29
2.3 两个重要极限与无穷小的比较	30
2.3.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	30
2.3.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	31
2.3.3 无穷小的比较	33
思考题 2.3	35
习题 2.3	35
2.4 函数的连续性	36
2.4.1 函数连续的定义	36
2.4.2 初等函数的连续性	39
2.4.3 闭区间上连续函数的性质	40
思考题 2.4	41
习题 2.4	41
2.5 极限总复习	41
第3章 导数与微分	44
3.1 导数的概念	44
3.1.1 两个实例	44
3.1.2 导数的定义	46
3.1.3 用定义求导数	47
3.1.4 导数的几何意义	49
3.1.5 变化率模型	50
3.1.6 可导与连续	52
思考题 3.1	53
习题 3.1	53
3.2 求导法则	53
3.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则	54
3.2.2 复合函数的求导法则	55
3.2.3 反函数的求导法则	57
3.2.4 基本初等函数的求导公式	59
3.2.5 三个求导方法	59
3.2.6 高阶导数	62
思考题 3.2	64
习题 3.2	65

3.3 微分及其在近似计算中的应用	65
3.3.1 两个实例	65
3.3.2 微分的概念	67
3.3.3 微分的几何意义	68
3.3.4 微分的运算法则	69
3.3.5 微分在近似计算中的应用	70
思考题 3.3	72
习题 3.3	72
3.4 导数与微分总复习	72
第4章 一元函数微分学的应用	75
4.1 拉格朗日中值定理与函数的 单调性	75
4.1.1 拉格朗日中值定理	75
4.1.2 两个重要结论	76
4.1.3 函数的单调性	76
思考题 4.1	77
习题 4.1	78
4.2 柯西中值定理与洛必达法则	78
4.2.1 柯西中值定理	78
4.2.2 洛必达法则	78
思考题 4.2	81
习题 4.2	81
4.3 函数的极值与最值	82
4.3.1 函数的极值	82
4.3.2 函数的最值	85
思考题 4.3	87
习题 4.3	87
4.4 函数图形的凹凸与拐点	87
4.4.1 曲线的凹凸及其判别法	87
4.4.2 拐点及其求法	88
4.4.3 曲线的渐近线	88
4.4.4 函数作图的一般步骤	90
思考题 4.4	91
习题 4.4	91
4.5 一元函数微分学在经济上的应用	92
4.5.1 再论成本函数、收入函数与利润 函数	92
4.5.2 边际分析	93
4.5.3 弹性与弹性分析	96
思考题 4.5	98
习题 4.5	98
4.6 一元函数微分学总复习	99

第5章 一元函数积分学	101
5.1 不定积分的概念及性质	101
5.1.1 不定积分的概念	101
5.1.2 基本积分公式	103
5.1.3 不定积分的性质	104
思考题 5.1	106
习题 5.1	106
5.2 不定积分的积分方法	106
5.2.1 换元积分法	106
5.2.2 分部积分法	112
思考题 5.2	115
习题 5.2	115
5.3 定积分的概念与性质	115
5.3.1 定积分问题举例	115
5.3.2 定积分的概念	117
5.3.3 定积分的几何意义	118
5.3.4 定积分的性质	119
思考题 5.3	122
习题 5.3	122
5.4 微积分基本公式	122
5.4.1 变上限积分函数及其导数	123
5.4.2 牛顿-莱布尼茨公式	124
思考题 5.4	126
习题 5.4	126
5.5 定积分的积分方法	127
5.5.1 定积分的换元法	127
5.5.2 定积分的分部积分法	129
思考题 5.5	130
习题 5.5	130
5.6 反常积分	131
5.6.1 无穷区间上的反常积分	131
5.6.2 Γ 函数	132
思考题 5.6	133
习题 5.6	133
5.7 定积分的应用	133
5.7.1 定积分应用的微元法	133
5.7.2 定积分的几何应用	134
5.7.3 定积分在经济上的应用	135
思考题 5.7	138
习题 5.7	138
5.8 一元函数积分学总复习	139
第6章 多元函数微分学	142

6.1 空间直角坐标系与向量的概念	142	7.2.1 可分离变量的一阶微分方程	173
6.1.1 空间直角坐标系	142	7.2.2 一阶线性微分方程	174
6.1.2 向量的概念及其线性运算	143	7.2.3 一阶微分方程在经济中的应用 举例	175
6.1.3 向量的坐标表示	144	思考题 7.2	177
6.1.4 向量的点积	146	习题题 7.2	177
6.1.5 平面与直线	147	7.3 常微分方程总复习	178
思考题 6.1	148		
习题题 6.1	149	* 第8章 符号计算系统 Mathematica	
6.2 空间曲面与曲线	149	及其应用	179
6.2.1 空间曲面的一般概念	149	8.1 初识符号计算系统 Mathematica	179
6.2.2 母线平行于坐标轴的柱面	149	8.1.1 用 Mathematica 作算术运算	180
6.2.3 二次曲面	150	8.1.2 用 Mathematica 作代数运算	182
思考题 6.2	150	8.1.3 系统的帮助	183
习题题 6.2	150	8.1.4 Notebook 与 Cell	183
6.3 多元函数的极限与连续	151	8.1.5 常用函数	184
6.3.1 多元函数的概念	151	8.1.6 变量	185
6.3.2 二元函数的极限与连续	152	8.1.7 自定义函数	187
思考题 6.3	153	8.1.8 表	187
习题题 6.3	153	8.1.9 解方程	188
6.4 偏导数	153	8.1.10 Which 语句	189
6.4.1 一阶偏导数	153	8.1.11 Print 语句	189
6.4.2 高阶偏导数	154	思考题 8.1	190
6.4.3 偏导数在经济学中的应用	155	习题题 8.1	190
思考题 6.4	159	8.2 用 Mathematica 做经济数学	190
习题题 6.4	159	8.2.1 用 Mathematica 求极限	190
6.5 全微分	159	8.2.2 用 Mathematica 进行求导运算	191
思考题 6.5	162	8.2.3 用 Mathematica 做导数应用题	192
习题题 6.5	162	8.2.4 用 Mathematica 做一元函数的 积分	193
6.6 多元函数的极值	162	8.2.5 用 Mathematica 解常微分方程	194
6.6.1 二元函数的极值	162	8.2.6 用 Mathematica 做向量运算和三维 图形	194
6.6.2 多元函数最大值与最小值	164	8.2.7 用 Mathematica 求偏导数与多元函数 的极值	196
6.6.3 条件极值	164	8.2.8 用 Mathematica 做数值计算	197
思考题 6.6	167	思考题 8.2	199
习题题 6.6	167	习题题 8.2	199
6.7 多元函数微分学总复习	167	8.3 Mathematica 总复习	200
* 第7章 常微分方程	170	习题答案	201
7.1 常微分方程的基本概念	170	参考文献	225
思考题 7.1	172		
习题题 7.1	172		
7.2 一阶微分方程	173		

第1章

函 数

千姿百态的物质世界无不处在运动、变化和发展之中. 16 世纪, 随着社会的发展, 为适应社会生产力发展的需要, 运动变化就成为自然科学研究的主题, 对各种变化过程和过程中的变量间的依赖关系的研究产生了函数概念. 函数是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型. 其思想是: 通过某一事实的信息去推知另一事实. 数学上最重要的函数是那些可根据某变量的取值而推知另一变量的取值的函数.

17 世纪笛卡儿把变量引入了数学, 使数学从研究常量进一步发展到研究变量, 从而产生了微积分. 微积分是研究变量以及变量间依赖关系即函数关系的一门学科, 用微积分研究经济问题离不开函数. 本章将在中学数学已有函数知识的基础上, 进一步研究函数的概念与性质, 为经济数学的学习打下必要的基础.

1.1 函数及其性质

函数的概念, 在 17 世纪之前, 一直与公式紧密关联, 到了 1837 年, 德国数学家狄利克雷 (Dirichlet, 1805—1859) 抽象出了直至今日为人们易于接受, 并且较为合理的函数概念. 本节分别介绍函数的概念、函数的表示法、函数的几种特性、反函数等概念.

1.1.1 函数的定义

引例 1.1.1 边长为 x 的正方形的面积为

$$A = x^2. \quad (1.1.1)$$

由式 (1.1.1) 可知, 当边长 x 取定一个数值后, 面积 A 通过式 (1.1.1) 也就有一个确定的数值与之对应.

引例 1.1.2 已知市场上鸡蛋的单价为 7 元/kg, 设购买 x kg 鸡蛋需要 y 元, 则

$$y = 7x \quad (1.1.2)$$

由式 (1.1.2) 可知, 当购买鸡蛋的数量 x 取定一个值后, 所需花费的钱数 y 通过式 (1.1.2) 也就有一个确定的数值与之对应.

引例 1.1.3 半径为 r 的圆的周长为

$$L = 2\pi r. \quad (1.1.3)$$

由式(1.1.3)可知,当半径 r 取定一个数值后,周长 L 通过式(1.1.3)也就取定唯一的一个数值.

总结以上3个例子,得到如下共同特点:

(1) 它们都有两个变量. 只要其中一个变量取定一个值后,另一个变量的值也就唯一地确定下来. 虽然,前者可以自由取值,但也有一定限制,如,上面3个例子中的边长 x ,购买量 x ,半径 r 均不能取负值. 以后,我们把在一个确定的范围内可能取不同数值的量称为变量;把在整个过程中,保持同一数值的量称为常量. 如上面3个例子中的7,2, π 均为常量, x,r 均为变量.

(2) 两个变量间都有一个规则来约束它们的取值. 这样的规则也称为两个变量之间的对应规律. 为了准确地揭示变量之间的这种对应规律,下面给出函数的定义.

定义 1.1.1 设有两个变量 x 和 y ,若当变量 x 在某一非空实数集 D 内任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的规律 f 有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中变量 x 称为自变量,变量 y 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$,通过对应规律 f ,函数 y 有唯一确定的值 y_0 与之对应,则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作

$$y_0 = y|_{x=x_0} = f(x_0).$$

函数值的集合,称为函数的值域,记作 M .

若函数在某个区间 I 上的每一点都有定义,则称这个函数在该区间上有定义. 区间 I 也称为该函数的定义区间.

函数的对应规律和定义域称为函数的两个要素. 两函数相同的充分必要条件是其定义域、对应规律分别相同. 例如 $\omega = \sqrt{u}$ 与 $y = \sqrt{x}$ 就是相同的函数.

例 1.1.1 $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ 就是一个特定的函数, f 确定的对应规律为:

$$f(\quad) = 2(\quad)^2 + 3(\quad) - 1.$$

例 1.1.2 设 $y=f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$,求 $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

解 $y|_{x=\frac{2}{\pi}} = f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

例 1.1.3 设 $f(x+1) = x^2 - 3x$,求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$,则 $x=t-1$,所以

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) = t^2 - 5t + 4,$$

所以

$$f(x) = x^2 - 5x + 4.$$

例 1.1.4 求函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的定义域.

解 为使 $y = \frac{1}{x-1}$ 有意义, 需要 $x-1 \neq 0$, 即 $x \neq 1$, 所以,

$$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

为所给函数的定义域.

例 1.1.5 求函数 $y = \ln(x-1)$ 的定义域.

解 为使 $y = \ln(x-1)$ 有意义, 需 $x-1 > 0$, 即 $x > 1$, 所以所求函数的定义域为 $(1, +\infty)$.

例 1.1.6 求函数 $y = \sqrt{2-x}$ 的定义域.

解 为使 $y = \sqrt{2-x}$ 有意义, 需 $2-x \geq 0$, 即 $x \leq 2$, 因此, $(-\infty, 2]$

为所给函数的定义域.

例 1.1.7 求函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 这是两个函数之和的定义域, 先分别求出每个函数的定义域, 然后求其公共部分即可.

使 $\sqrt{x^2 - x - 6}$ 有意义的 x 必须满足 $x^2 - x - 6 \geq 0$, 即

$$(x-3)(x+2) \geq 0,$$

解得

$$x \geq 3 \quad \text{或} \quad x \leq -2.$$

而使 $\arcsin \frac{2x-1}{7}$ 有意义的 x 必须满足 $\left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1$, 即

$$-7 \leq 2x-1 \leq 7,$$

解得

$$-3 \leq x \leq 4.$$

于是, 所求的函数定义域是

$$[-3, -2] \cup [3, 4].$$

例 1.1.8 说明函数 $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$ 是否相同?

解 因为 $y = \ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $y = 2 \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 因此 $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$ 不是相同的函数.

例 1.1.9 说明函数 $y_1 = 2\sqrt{x^2}$ 与 $y_2 = 2|x|$ 是否相同?

解 因为 $y_1 = 2\sqrt{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$y_2 = 2|x| \text{ 的定义域也为 } (-\infty, +\infty),$$

所以, 这两个函数的定义域相同.

又因为当自变量 x 在该定义域内任取一值 a 时,有 $y_1|_{x=a} = 2\sqrt{a^2} = 2|a|$, $y_2|_{x=a} = 2|a|$, 即 $y_1|_{x=a} = y_2|_{x=a}$, 因此, 所给的两个函数相同.

注意: y 是 x 的函数, 可以记作 $y = f(x)$, 也可以记作 $y = \varphi(x)$ 或 $y = F(x)$ 等, 但同一函数在讨论中应取定一种记法, 同一问题中涉及多个函数时, 应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律. 为方便起见, 有时也用记号 $y = y(x)$, $u = u(x)$, $s = s(x)$ 等表示函数.

1.1.2 函数的表示法

函数可以用至少三种不同的方法来表示: 表格法、图像法和公式法.

例 1.1.10 中央电视台每天都播报天气预报, 经统计, 某地 2011 年 9 月 19—29 日每天的最高气温如表 1.1.1 所示.

表 1.1.1

日期(9月)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高气温/℃	21	23	24	24	24	26	25	24	24	20	17

这个表格确实表达了温度是日期的函数(用表格形式表示函数的方法称为函数的表格表示方法, 简称表格法), 这里不存在任何计算温度的公式, 但是每一天都会产生出一个唯一的最高气温. 即, 对每个日期 t , 都有一个与 t 相应的唯一最高气温 N .

例 1.1.11 王先生到郊外去观景, 他匀速前进. 离家不久, 他发现一骑车人的自行车坏了, 便帮忙把自行车修好, 随后又上路了. 请把王先生离家的距离与时间的函数关系用图形描述出来.

解 王先生离家的距离与时间的函数图形如图 1.1.1 所示(用图形表示函数的方法称为函数的图像表示方法, 简称图像法).

例 1.1.12 (复利计算公式) 设初始本金(现值)为 P (元), 年利率为 r . 每年末将当年的本利和存入银行, 试求第 n 年末的本利和 S_n .

解 第 1 年末应得利息 Pr , 本利和用 S_1 表示, 则

$$S_1 = P + Pr = P(1 + r).$$

将本利和 S_1 再存入银行, 第 2 年年末的本利和为

$$S_2 = S_1 + S_1 r = P(1 + r) + P(1 + r)r = P(1 + r)^2.$$

再把本利和存入银行, 如此反复, 第 n 年末得本利和 S_n 为

$$S_n = P(1 + r)^n. \quad (1.1.4)$$

这就是以年为期的复利基本计算公式.

在例 1.1.12 中, 变量 S_n 与变量 n 之间的函数关系由式(1.1.4)给出. 用数学式子表示的函数称为函数的公式表示法, 也称为解析表示法, 并将这个式子称为解析式. 如引例 1.1.1 到引例 1.1.3 和例 1.1.1 到例 1.1.7 中的函数均由公式法表示.

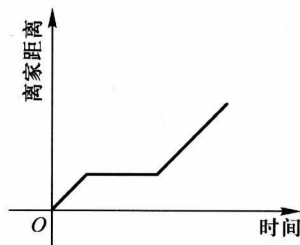


图 1.1.1

例 1.1.13 在例 1.1.11 中,根据王先生具体的骑车及停下来帮人修车的时间,给图 1.1.1 标明具体的数值,如图 1.1.2,则函数关系可表示为

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3, & 1 < x \leq 3, \\ 3x - 6, & 3 < x \leq 5. \end{cases}$$

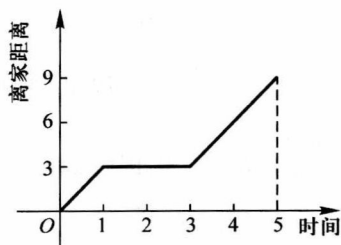


图 1.1.2

这也是由解析法表示的函数. 该函数 $f(x)$ 的定义域为 $D = [0, 5]$, 但它在定义域内不同的区间上是用不同解析式来表示的, 这样的函数称为分段函数. 分段函数是定义域上的一个函数, 不要理解为多个函数, 分段函数需要分段求值, 分段作图.

例 1.1.14 作出下面分段函数的图形:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 3 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

解 该分段函数的图形如图 1.1.3 所示.

以上用解析法表达的函数关系都是自变量与因变量各占等号的一边, 明显地揭示出了由自变量通过怎样的运算关系得到因变量. 这样表达的函数, 称为显函数.

用解析法表示函数还有一种是因变量 y 与自变量 x 的数量关系由方程来确定, 如 $x^2 + y^2 = a^2$, $6x + 3y = 1$ 等. 在这种表达式中, x 与 y 的函数关系隐含在方程之中. 如方程 $6x + 3y = 1$ 隐含着 $y = -2x + \frac{1}{3}$, 方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 隐含着 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 及 $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$. 通常把未解出因变量的方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的 x 与 y 之间的函数关系叫做隐函数.

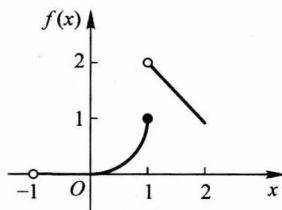


图 1.1.3

1.1.3 函数的几种特性

1. 有界性

定义 1.1.2 设函数 $f(x)$ 在数集 I 上有定义, 若存在正数 M , $\forall x \in I$ (其中 $\forall$ 读作“对任意的”), 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界, 否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

若 $f(x)$ 在区间 I 上有界, 也称 $f(x)$ 为区间 I 上的有界函数. 否则称 $f(x)$ 为无界函数.

例 1.1.15 说明 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界; $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

解 对于任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $|\sin x| \leq 1$, 因此 $f(x) = \sin x$ 在

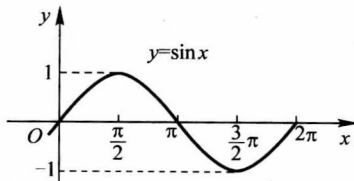


图 1.1.4

$(-\infty, +\infty)$ 上有界;

对于任意给定的大正数 $M (M > 1)$, 取 $a = \frac{1}{M+1} \in (0, 1)$, 有 $|\varphi(a)| = \left| \frac{1}{a} \right| = M+1 > M$, 因此 $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

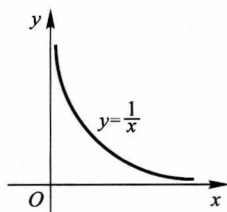


图 1.1.5

2. 单调性

定义 1.1.3 对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加, 区间 I 称为单调递增区间; 若 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少, 区间 I 称为单调递减区间. 单调递增区间和单调递减区间统称为单调区间.

例 1.1.16 指出下面各图所示函数的单调区间:

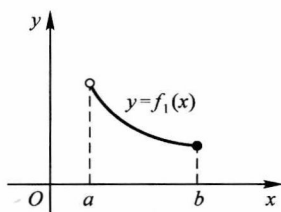


图 1.1.6

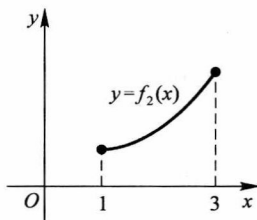


图 1.1.7

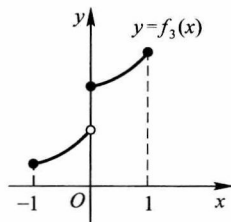


图 1.1.8

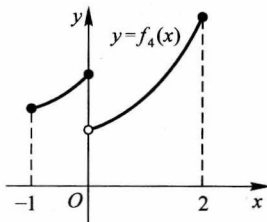


图 1.1.9

解 (1) 图 1.1.6 中, 函数 $f_1(x)$ 的单调递减区间为 $(a, b]$;

(2) 图 1.1.7 中, 函数 $f_2(x)$ 的单调递增区间为 $[1, 3]$;

(3) 图 1.1.8 中, 函数 $f_3(x)$ 的单调递增区间为 $[-1, 1]$;

(4) 图 1.1.9 中, 函数 $f_4(x)$ 的单调递增区间有 $[-1, 0]$ 和 $(0, 2]$.

3. 奇偶性

定义 1.1.4 设数集 D 关于原点对称, 若对于任意 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例 1.1.17 设 $f(x) = x^2$, 证明 $f(x)$ 为偶函数.

证 因为 $f(x) = x^2$, 所以 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$; 所以 $f(x)$ 为偶函数 (图 1.1.10).

例 1.1.18 设 $g(x) = x^3$, 证明 $g(x)$ 为奇函数.

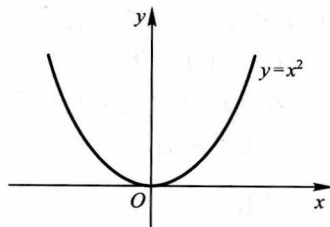


图 1.1.10