GAODENG SHUXUE
JIQI MATLAB SHIXIAN

高等数学及其MATLAB实现

（下册）

任玉杰　张世泽◎主编

中山大学出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS

GAODENG SHUXUE

JIQI MATLAB SHIXIAN

高等数学及其MATLAB实现

（下册）

任玉杰　张世泽◎主　编

郝世栋　孙贺琦
刘国志　何万里◎副主编

中山大学出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学及其 MATLAB 实现（下册）/任玉杰，张世泽主编 . —广州：中山大学出版社，2014. 4
ISBN 978 - 7 - 306 - 04561 - 4

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①任… ②张…　Ⅲ. ①Matlab 软件—应用—高等数学—教材
Ⅳ. ①O13 - 39

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 114523 号

出 版 人：徐　劲
策划编辑：赵丽华
责任编辑：赵丽华
封面设计：曾　斌
责任校对：张礼凤
责任技编：何雅涛
出版发行：中山大学出版社
电　　话：编辑部 020 - 84111996，84113349，84111997，84110779
　　　　　发行部 020 - 84111998，84111981，84111160
地　　址：广州市新港西路 135 号
邮　　编：510275　　　　　　传　真：020 - 84036565
网　　址：http://www. zsup. com. cn　　E-mail:zdcbs@ mail. sysu. edu. cn
印 刷 者：佛山市浩文彩色印刷有限公司
规　　格：787mm × 960mm　1/16　　24 印张　　584 千字
版次印次：2014 年 4 月第 1 版　　2014 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：1 ~ 2500 册　　定　　价：35. 00 元

前　言

本套教材分为《高等数学及其 MATLAB 实现（上册）》、《高等数学及其 MATLAB 实现（下册）》、《高等数学及其 MATLAB 实现辅导》和多媒体课件。它是高等数学课程教学内容和体系改革的研究成果，也是根据作者多年来的教学和科研经验，集思广益，广泛吸取国内外一些相关教材之所长，在此基础上把教学内容、教学体系、教学手段改革融为一体的新型改革教材。本套教材在如下几方面进行了新的探索：

（1）从数学统一性的观点，从全面素质教育的高度，打破了传统的大学数学教学体系，设计了一套新大学课程体系，将计算机数学软件 MATLAB 的相关内容分别融入高等数学、线性代数和概率与数理统计课程之中，增加了实验环节，形成非数学专业的三门必修课——高等数学及其 MATLAB 实现、线性代数及其 MATLAB 实现和概率与数理统计及其 MATLAB 实现。向学生传授一套完整地、科学地解决一类问题的方法，使学生能够适应将来的工作和科研环境需要。

（2）在计算手段的处理上，采用了手工计算和计算机计算各有侧重的处理手法。在高等数学的内容处理上，采用了以手工计算为主、计算机计算为辅的策略。为了使学生理解和掌握高等数学的理论和方法，在每节都配备了 A 组的基本题和 B 组的提高题；每章还给出了复习题以供学生进行手工计算；在每章最后加入了用计算机软件 MATLAB 作数学实验的内容，通过计算机模拟仿真，给出极限、连续、微积分中值定理、微积分的几何应用等内容的可视化动态图形，加深学生对它们的理解，并给出了用计算机处理实际问题的算例和程序，使学生了解用计算机软件进行科学计算的方法。

（3）在内容安排上，考虑到目前我国硕士研究生数学入学考试的要求和师资队伍的结构等问题，将非数学专业的学生必须掌握的高等数学的全部内容安排在每章的前几节，而数学实验内容安排在每章的最后；在下册还附有近年考研真题，以便学生根据情况选用，拓宽学生的视野。

（4）作者把多年在大学数学实验教学中编写的一些 MATLAB 程序和例题融入到本书中，书中的数学方法都配备了 MATLAB 计算程序和作图程序，具有科研和实用价值。

（5）加强数学应用能力和科学计算能力的培养。本书在讲解数学内容的同时，力求突出在解决实际问题中有重要应用的数学思想方法，揭示重要数学概念和方法的本质。把数学建模的最基本的内容和方法融入教材，便于学生在学习微积分的同时学会用数学方法将实际问题转化为数学模型，然后用计算机程序进行科学计算。此外，在教材中除保留了几何应用和物理应用外，还增加了经济应用（如边际分析、资本现值和投资问题等）和上机实验的应用问题。在每章的最后一节中，列举了大量的用 MATLAB 计算和绘图的例题和上机实验的习题，使学生在学会用微积分解决实际问题的同时，也学会用计算机软件解决对应问题的方法，从而培养学生数学应用能力和科学计算能力，使学生能够适应将来的工作和科研

环境。

（6）在数学实验环节，作者利用编写的动态演示程序等画图程序，动态地显示函数和数列求极限的动态变化过程、微积分定理的几何意义等，从几何方面直观地帮助学生理解有关的概念和定理。用这种将数学软件 MATLAB 融入教学之中，增加数学实验环节，加强应用和几何直观，增加应用性的例题和习题，每章配有上计算机计算的数学实验课题的手段，培养学生的科学计算能力，使学生的知识、能力和素质都能够得到提高。应该说，这是原有教学过程的一个飞跃。

相应地，这套教材对教师也提出了更高的要求。教师不但要能讲授知识，而且要会应用计算机软件，还要改进教学方法，能够进行创新研究。这当然有利于教师能力和教学水平的提高。

本书由大连工业大学任玉杰教授策划，并负责全书大纲的设计、修改和统稿。本书由任玉杰教授和营口理工学院院长张世泽教授担任主编，由营口理工学院郝世栋教授、孙贺琦教授、刘国志教授和何万里副教授担任副主编。本书各章编写分工如下：任玉杰编写第四章和第五章；张世泽、王维、刘倩倩和刘绍华编写第一章、第二章和第三章，郝世栋、孙贺琦、刘国志、何万里、李印、苗晨、鲁鑫、施宏远、康健、谢晓洁、杨秀珍、薄宏和苏兴杰参编其余部分。

本书的编写得到了营口理工学院、大连工业大学和中山大学南方学院有关领导的大力支持，还得到了有关同行、任玉杰教授的硕士研究生导师滕素珍教授和博士研究生导师张鸿庆教授的热情支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

教学改革教材应该多模式、多品种，本书只是对其中一种模式所做的初步探索和尝试，在内容精简和实现数学机械化以及培养学生数学应用能力和科学计算能力等方面，我们虽然也作了一些努力，但仍感觉差距很大。真诚地欢迎同行、读者和专家提出不同的意见，并希望广大读者对教材中的错误、缺点和不足之处提出批评和指正。最后，我们也真诚地欢迎对本教材有兴趣的同行参加试用。

任玉杰

2013 年 7 月

目　　录

第一章　多元函数微分法及其应用

函数 $y=f(x)$ 只有一个自变量，这种函数叫做一元函数，但在实际问题中，通常一个变量的变化受到多种因素的影响和制约，即一个因变量依赖于多个自变量，这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题，本章将在一元函数微分学的基础上讨论多元函数的微分法及应用.

§1.1　多元函数的基本概念

1.1.1　区域

一元函数中经常用到邻域和区间的概念，多元函数也需用相应的概念.

1. 邻域

设 $p_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一点，δ 是某一正数，所有与点 $p_0(x_0, y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $p(x, y)$ 的全体，称为点 p_0 的 δ 邻域，记为 $U(p_0, \delta)$，即

$$U(p_0, \delta)=\{p \mid |pp_0|<\delta\},$$

也就是

$$U(p_0, \delta)=\left\{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

邻域 $U(p_0, \delta)$ 的几何意义是以 $p_0(x_0, y_0)$ 为中心，$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $p(x, y)$ 的全体.

点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(P_0, \delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0, \delta)=\{P \mid 0<|P_0P|<\delta\}.$$

注意：如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

2. 区域

在 xOy 平面上由几条曲线所围成的部分称为平面区域，围成平面区域的曲线称为该区域的边界，包括边界在内的区域称为闭区域，不包括边界的区域称为开区域，包括部分边界的区域称为半开区域，如果区域延伸到无穷远处，则称为无界区域，否则称为有界区域，有界区域总可以包含在一个以原点为圆心的相当大的圆域内.

例如：$\{(x, y) \mid x+y>0\}$ 为开区域，且是无界开区域，如图 1-1 所示. $\{(x, y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$ 为有界开区域，如图 1-2 所示. $\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant k^2\}$ 和 $\{(x, y) \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 都为闭区域，且为有界闭区域，如图 1-3 和图 1-4 所示.

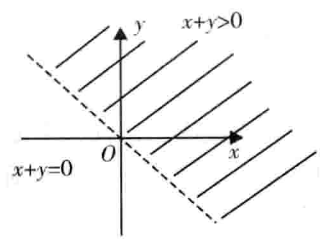

图 1 - 1

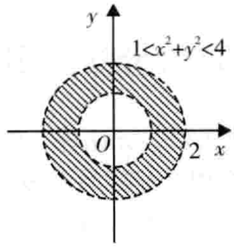

图 1 - 2

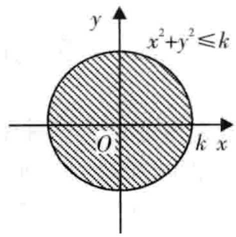

图 1 - 3

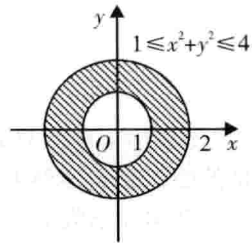

图 1 - 4

3. n 维空间

数轴上的点与实数一一对应，全体实数表示数轴上一切点的集合，即直线. 二元有序数组(x, y)的全体表示平面直角坐标系中一切点的集合，即平面；三元有序数组(x, y, z)的全体表示空间的一切点的集合，即空间. 一般地，当 n 为自然数时，n 元有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体称为 n 维空间，n 维空间记为 R^n.

n 维空间中两点 $p(x_1, \cdots, x_n)$及 $Q(y_1, \cdots, y_n)$间的距离定义为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}. \tag{1}$$

n 维空间中，点 p_0 的邻域为

$$U(p_0, \delta) = \{p \mid |pp_0| < \delta, p \in R^n\}.$$

1.1.2 多元函数的概念

定义 1 设 D 为一个非空的 n 元有序数组，f 为对应规则，使对于每一个有序数组$(x_1, \cdots, x_n) \in D$ 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的 n 元函数，记为

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), (x_1, x_2, \cdots, x_n \in D).$$

称变量 $x_i(i = 1, 2, \cdots, n)$为自变量，y 为因变量，D 为函数的定义域，z 为函数的值域，$z = \{y \mid y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D\}$.

当 $n = 1$ 时，为一元函数，记为 $y = f(x)$, $x \in D$.

当 $n = 2$ 时，为二元函数，记为 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

当 $n \geqslant 2$ 时，n 元函数统称为多元函数.

多元函数的定义域是使函数有意义的自变量所确定的点集. 例如，二元函数 $z = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$的定义域为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$(如图 1 - 5 所示)是一个有界开区域. 二元函数 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$，对于 D 中的任意一点 $M(x, y)$必有 z 与其对应；三元有序数组$(x, y, f(x, y))$，所有空间的点 $P(x, y, f(x, y))$组成的图形为一个曲面(如图 1 - 6 所示).

例如，$z = x^2 + y^2$ 的图形为一抛物面(如图 1 - 7 所示).

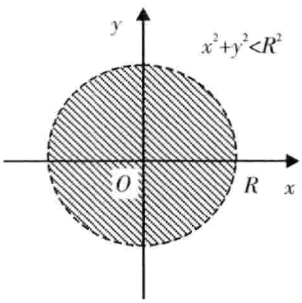

图 1－5

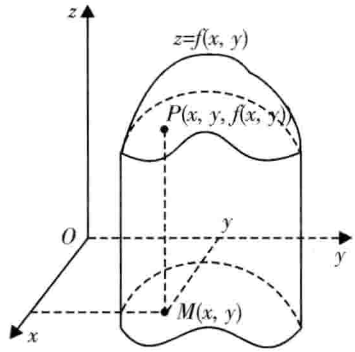

图 1－6

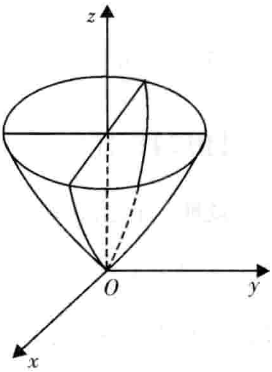

图 1－7

又如，$x^2+(y-1)^2+z^2=1$ 是一个以(0，1，0)为球心，1 为半径的球面，而 $z=\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}$ 为该球的上半部(如图 1－8 所示)，$z=-\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}$ 为该球的下半部.

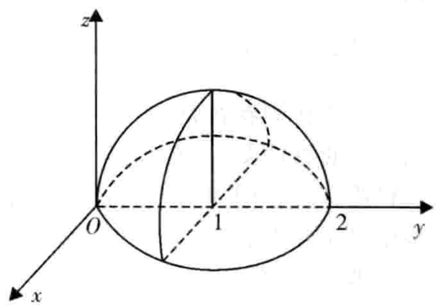

图 1－8

我们讨论的是单值函数，遇到多值函数时，可以找出它们的全部单值分支再加以讨论.

1.1.3　多元函数的极限

以二元函数为例，当 $p(x,\ y)\to p_0(x_0,\ y_0)$ 时，$|pp_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$，且 p 以任何方式趋于点 p_0 时，函数的对应值 $f(x,\ y)$ 都无限趋近于一个确定的常数 A，我们就说当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时，函数 $f(x,\ y)$ 以 A 为极限.

定义 2　设函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $p_0(x_0,\ y_0)$ 的某邻域内有定义(p_0 可以除外)，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，恒有 $|f(x,\ y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称当$(x,\ y)$趋于$(x_0,\ y_0)$时，函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=A \quad 或 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y)=A.$$

二元函数的极限也称二重极限.

【例 1】证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x+y)=5$.

证明　因为 $|(3x+y)-5|=|(3x-3)+(y-2)|\leqslant 3|x-1|+|y-2|$，

而 $$|x-1|\leqslant\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2},$$

且 $$|y-2|\leqslant\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2},$$

所以，当 $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ 时，有 $|3x+y-5|<3\delta+\delta=4\delta$.

所以，只需取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$，则当 $0<\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ 时，恒有 $|(3x+y)-5|<\varepsilon$

成立.

所以，$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x+y)=5.$

【例 2】设 $f(x,\ y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2\neq 0)$，求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,\ y)=0.$

证明 任给 $\varepsilon>0$，要使

$$\left|(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2=(x-0)^2+(y-0)^2<\varepsilon$$

成立，只需取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ 即可，则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，总有

$$\left|(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立.

所以，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$

二重极限存在是指 $p(x,\ y)$ 以任何方式趋于 $p_0(x_0,\ y_0)$ 时函数都无限接近于 A，如果只沿某一直线或某一曲线趋于 $p_0(x_0,\ y_0)$，使函数无限接近某一定值时，还不能由此断定函数的极限存在，但如果以不同的方式趋于 $p_0(x_0,\ y_0)$，而函数值不同，则可以断定这个函数的极限是不存在的.

考察函数

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\ (x,\ y\text{ 不同时为 }0),\\ 0\ (x=y=0).\end{cases}$$

显然，当点 $p(x,\ y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0,\ 0)$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,\ 0)=\lim\limits_{x\to 0}0=0$；

当点 $p(x,\ y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,\ 0)$ 时，$\lim\limits_{y\to 0}f(0,\ y)=\lim\limits_{y\to 0}0=0.$

可见，点 $p(x,\ y)$ 以这两个特殊方式(沿 x 轴或 y 轴)趋于原点时，函数的极限存在且相等，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,\ y)$ 不存在. 因为如果 $p(x,\ y)$ 沿 $y=kx$ 趋于原点，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{k}{1+k^2},$$

这个极限值随 k 的不同而改变，并不趋于一个常数，因此，当 $p(x,\ y)$ 沿直线趋于 $(0,\ 0)$ 时，函数 $f(x,\ y)$ 的极限不存在.

1.1.4 多元函数的连续性

定义 3 设函数 $z=f(x,\ y)$ 满足条件

(1) 在点 $p_0(x_0,\ y_0)$ 的某邻域内有定义，

(2) 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,\ y)$ 存在，

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0)$，

则称函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $p_0(x_0,\ y_0)$ 处连续.

如果函数 $z=f(x,\ y)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称函数 $z=f(x,\ y)$ 在区域 D 内连续.

二元函数的连续性概念可以推广到 n 元函数 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$.

如果 $z=f(x,\ y)$ 在点 $p_0(x_0,\ y_0)$ 处不连续，则点 p_0 称为 $z=f(x,\ y)$ 的间断点，间断点也可能形成一条曲线.

如已经讨论过的函数

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\ (x,\ y\text{ 不同时为 }0),\\ 0\ (x=y=0),\end{cases}$$

当 $x\to0$，$y\to0$ 时，极限不存在，所以 $(0,\ 0)$ 点是该函数的一个间断点.

再如 $f(x,\ y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$，$x^2+y^2=1$ 时，函数无定义，所以该单位圆圆周上的点都是间断点.

与一元连续函数类似，多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零)都是连续函数，多元连续函数的复合函数仍为连续函数. 一切多元初等函数在其定义域内是连续函数. 此外，还有如下性质：

性质 1　(最大、最小值定理)在有界闭区域 D 上的多元连续函数，一定有最大值和最小值.

性质 2　(介值定理)在有界闭区域 D 上的多元连续函数，如果在 D 上取得两个不同的函数值，则它在 D 上取得介于这两个值之间的任何值至少一次.

特别地，如果 C 是在 D 上的最小值 m 和最大值 M 之间的一个数，则在 D 上至少有一点 Q 使 $f(Q)=C$.

【例 3】求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解　$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2^2-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\dfrac{1}{4}$.

习题 1.1

A 组

1. 已知函数 $f(x,\ y)=x^2+y^2-x\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,\ ty)$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；　(2) $z=\dfrac{x}{\sqrt{y}}$；　(3) $z=\sqrt{xy}$；

(4) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　(5) $z=\ln(-x-y)$.

3. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$;　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$;　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to0}}\frac{\sin(xy)}{y}$;　(5) $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$;　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$.

4. 函数 $z=\frac{1}{x-y}$在何处间断?

B 组

1. 试证明函数 $F(x, y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系

$$F(xy, u, v)=F(x, v)+F(x, u)+F(y, u)+F(y, v).$$

2. 求下列函数的定义域.

(1) $z=x+\sqrt{y}$;　(2) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;　(3) $z=x+\arcsin y$;

(4) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$;　(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}\,(R>r)$;

(6) $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

3. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x}$;　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

4. 证明函数 $f(x, y)=\frac{x-y}{x+y}$在(0, 0)点处极限不存在.

§1.2 偏 导 数

1.2.1 偏导数的定义及其几何意义

在一元函数中，我们是从研究函数的变化率引入导数的概念的. 对于多元函数也需要讨论它的变化率，由于多元函数的自变量不止一个，所以因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多. 本节我们首先考虑多元函数中一个自变量的变化率，而把其余的自变量看成常数，不妨以二元函数 $z=f(x, y)$ 为例，引出二元函数 z 对自变量 x 的偏导数定义.

定义 4 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定为在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x},\ z_x'\Big|\text{或}f_x'(x_0,\ y_0),$$

即

$$f_x'(x_0,\ y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 处对 y 的偏导数为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta y},$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}$，$z_x'\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}f_y'(x_0,\ y_0)$.

如果函数 $z=f(x,\ y)$ 在区域 D 内每一点 $(x,\ y)$ 处对 x 的偏导数都存在，则这个偏导数就是 x 与 y 的函数，这个函数称为函数 $z=f(x,\ y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记作 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$z_x'$ 或 $f_x'(x,\ y)$.

类似地，$z=f(x,\ y)$ 对自变量 y 的偏导函数记作 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$z_y'$ 或 $f_y'(x,\ y)$.

显然，$f_x'(x_0,\ y_0)$ 与 $f_y'(x_0,\ y_0)$ 分别是 $f_x'(x,\ y)$ 与 $f_y'(x,\ y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 处的函数值，以后在不至于混淆的情况下，偏导函数也简称为偏导数.

在求偏导数时，不需要新的方法，因为只有一个变量在变动，而另一个变量已看成常量，是一元函数的求导问题，即求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时只是把 y 暂时看成常量，而对 x 求导数；求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时把 x 暂时看成常量，而对 y 求导数.

对于三元以至于 n 元函数的偏导数，可以类似于二元函数的偏导数加以推广. 例如，设三元函数 $u=f(x,\ y,\ z)$ 在点 $(x,\ y,\ z)$ 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x'(x,\ y,\ z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y,\ z)-f(x,\ y,\ z)}{\Delta x},$$

其中 y，z 看成常量.

【例 1】 求 $z=x^2y^2+x+1$ 在点 $(1,\ 0)$ 处的偏导数.

解　把 y 看成常量，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2+1$.

把 x 看成常量，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y$.

将点 $(1,\ 0)$ 代入上面的结果，得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=2\times 1\times 0+1=1$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=0$.

【例 2】 求 $z=x^2\sin(3y)$ 的偏导数.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin(3y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos 3y\cdot 3=3x^2\cos 3y$.

【例 3】 求 $f(x,\ y)=\arctan\frac{x}{y}$ 的偏导数.