中法工程师学历教育系列教材

ALGEBRAIC METHODS FOR NONLINEAR CONTROL SYSTEMS (Second Edition)

非线性控制系统的代数方法（第二版）

（中英文版）

Giuseppe Conte
Claude H. Moog 著
Anna Maria Perdon

于黎明 译

科学出版社

中法工程师学历教育系列教材

非线性控制系统的代数方法

(第二版)

Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems

(Second Edition)

(中英文版)

Giuseppe Conte
Claude H. Moog　　著　　于黎明　译
Anna Maria Perdon

科学出版社
北京

图字：01-2013-8291

内 容 简 介

本书以微分代数学方法为出发点，分析动态系统，结合经典控制理论的概念，深入浅出地讲解了非线性系统的可观性、可达性、模型匹配以及非线性系统标准化实现等问题。偏重于理论上分析理解并佐以实例说明非线性系统的性质。

本书可作为工科院校数学、控制工程等专业的本科生和研究生教材，也可供相关专业的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性控制系统的代数方法: 汉英对照/ (法) 宫特 (Conte,G.) 等著; 于黎明译. —2 版. —北京: 科学出版社, 2013
书名原文: Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems
中法工程师学历教育系列教材
ISBN 978-7-03-038121-7

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①宫… ②于… Ⅲ. ①非线性控制系统-微分代数-高等学校-教材-汉、英 Ⅳ. ①O231.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 147745 号

丛书策划：匡 敏 余 江
责任编辑：余 江 / 责任校对：张怡君
责任印制：闫 磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 5 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2013 年 5 月第一次印刷 印张：21
字数：394 000

定价：65.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

北京航空航天大学中法工程师学院
工程师教材融合编委会

主　任　熊　璋

副主任　于黎明　　徐　平

编　委（按拼音排序）

艾迪列娜·米内	马克·波利
麦尔勒·贵龙姆	萨日娜
王　梅	伊夫·杜拉克
殷传涛	张　巍
张心婷	

编　辑（按拼音排序）

卞文佳	陈　辉	陈　威	陈晓径
崔　敏	段　斐	方　乐	林立婷
马纪明	牛　薇	宋　萌	唐宏哲
田　原	王乐梅	王　敏	王　峥
王竹雅	于　雷	于　珊	张　莉
张　澎	张晓雯		

丛书序

我国《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010-2020年）》明确提出，要“适应国家经济社会对外开放的要求，培养大批具有国际视野、通晓国际规则、能够参与国际事务和国际竞争的国际化人才”，为此教育部于2010年启动了“卓越工程师教育培养计划”，并把培养国际化工程人才作为我国高等工程教育改革发展的战略重点之一。通过与国际高水平大学开展人才培养合作，借鉴国外先进经验，引入国外优质教育资源并结合自身优势，面向国家发展战略需求，建立植根于本土的工程师学历教育体系，是培养具有国际竞争力工程师人才的重要途径，也是贯彻落实“人才强国”战略、提升我国国际竞争力的重要举措。

采用精英培养模式的法国工程师学历教育对法国乃至世界经济、社会发展起到了重要的推进作用，许多工程师院校在世界范围内享有盛誉。为此，近年来我国许多大学对这种培养模式进行了深入研究，并成立了多家中法合作的工程师培养机构。这些具有国际化教育目标与理念的办学机构与项目，已经成为我国高等工程教育的重要组成部分，取得的成功经验深刻影响着我国高等工程教育改革与创新进程。

作为我国教育部批准的第一家中法教育合作培养通用工程师人才的教育机构，北京航空航天大学中法工程师学院于2005年由北京航空航天大学与法国中央理工大学集团合作建立，在创立和实施我国的国际通用工程师学历教育过程中，通过借鉴法国工程师培养理念，引进国外优质教育资源，结合北京航空航天大学自身优势，建立了卓越工程师培养本-硕统筹课程体系，赢得了国内外教育界、工业界的广泛认同与赞誉，并通过了法国工程师职衔委员会（CTI）和欧洲工程教育EUR-ACE 体系的认证，成为迄今为止国内唯一一家具有在本土颁发法国和欧洲工程师文凭资质的办学机构，培养出来的毕业生得到了用人单位的普遍欢迎和高度评价。

为把探索实践过程中取得的成功经验和优质课程资源与国内外高校分享，我们在北京市教委和科学出版社的支持下，组织出版了这套《中法工程师学历教育系列教材》，其中包括由法国著名预科教师和法国工程师学院一线教师领衔编写的

法文版、英文版和中文版的预科数学、物理、工业科学教材，以及适合工程师培养阶段的专业教材。本套教材可作为中法合作办学单位的预科和专业教材，也可作为其他相关专业的参考教材。

希望本套教材能为我国卓越工程师的教育培养作出贡献！

熊璋

北京航空航天大学中法工程师学院院长

2013 年 5 月

译　者　序

《非线性控制系统的代数方法》一书由 Giuseppe Conte 教授、Claude H. Moog 教授和 Anna Maria Perdon 教授合著。英文版第一版于 1999 年作为 Springer 出版社关于控制和信息科学方向的讲义出版，被许多学校选为相关专业研究生课程的教材。随着教学经验和科学研究的进一步丰富，2007 年该书的英文版第二版由 Springer 出版社再次出版发行。

非线性控制理论在现代社会的发展和取得的巨大成绩在很大程度上取决于微分几何方法和工具的系统使用。微分几何方法，以非线性系统可控性的研究为起点，从 20 世纪 70 年代逐步进入控制领域的应用，到 80 年代，微分几何方法的应用进一步发展，取得了许多成绩，但与此同时，它的局限性也逐步显现。

而在 80 年代末期，非线性控制系统中微分代数方法的引进又打开了另一扇窗，它很好地解决了当时遇到的微分几何所无法解决的问题。微分代数理论能够如此流行的一个很重要原因是它本身的简洁性。与想要真正有效地使用微分几何方法所需要的数学知识相比，微分代数方法所需要的理论基础是很有限的。渐进的概念和线性化问题的解决，充分说明了微分代数理论的简洁特性。关于这一理论另一个优势就是，在动态系统和控制领域应用过程中的广泛适用性。

与国内相关非线性控制、微分代数系统控制理论方面的书籍相比较，本书仅仅需要掌握关于系统和控制理论的基本概念就可以阅读。本书循序渐进，以微分代数方法为出发点，分析动态系统，结合经典控制理论的概念，深入浅出地讲解了非线性系统的可观性、可达性、模型匹配以及非线性系统标准化实现等问题。偏重于理论上分析理解非线性系统并佐以一定的实例验证。逻辑结构与国内自动控制理论的相关教材非常契合，便于中国读者理解。

本书在国内的出版首先要感谢南特中央理工大学，法国国家科研研究院实验室的 Claude H. Moog 教授，也是英文版原书的第二作者。Claude H. Moog 教授和译者有着多年的科研合作，共同商讨了中英文版的出版事宜。其次要感谢北京航空航天大学中法工程师学院与中法联合实验室 LIA2MCIS，因为工程师教材融合编委会的精选以及经费的支持保证了本书的顺利出版。还要感谢参与翻译与研讨

的译者的研究生：卢杨、刘宏亮、郭丽丽、邢天天等。最后要感谢科学出版社的大力支持和匡敏分社长、余江编辑的精心编辑。

书中不当之处，敬请读者批评指正。

于黎明

2013 年 4 月于北京航空航天大学

第二版前言

本书第一版是在 20 世纪末出版的，出版以后就成为研究生、 暑期学校以及一个关于非线性系统研讨会的教科书。由于在这些活动中积累了经验，增加了一些合理性改进意见。关于建模的章节扩充包含了非线性标准化实现部分，因非线性控制系统状态空间的分析和综合的日渐重要性而引入。增加的重点仍在对结构性质的分析，不涉及稳定性，只是对少量相关问题进行探究。关于系统结构的章节添加了更多的资料和关于系统逆的启发性实例。在书的结尾还添加了关于输出反馈的章节使其更具有实用性。最后以机器人、机械以及其他领域各种实例来说明。

本书中关于微分代数算法的章节已经删去， 因为有此专著出版。

本书中的习题答案可以在如下网站找到：http://www.springer.com/1-84628-594-1。

第一版前言

非线性控制理论在现代社会的发展和取得的巨大成绩，在很大程度上取决于微分几何方法和工具的系统使用。在 19 世纪 70 年代微分几何学首先要考虑的一个问题是对非线性系统的控制。关于这个主题研究的早期工作凸显了微分几何这一研究工具的有效性和可行性，激发了很多后来的研究者的兴趣[9,111,154,155]。

在 20 世纪 80 年代，微分几何这一工具在非线性控制中的应用得到很大的开发。而一个最根本的思想[75, 87]就是尽最大可能总结几何方法在非线性中的应用，而这一工具最初是在研究线性理论[6, 160]中提出的。相关研究在当时取得了重要的结论，诸如扰动解耦、非交互控制问题、模型匹配等几个控制问题的解决方案。关于这些已经取得的方法翔实全面地描述在参考文献[86]、[126]中。

在 20 世纪 80 年代后期，人们开始认识到已经发展成熟的微分几何工具的限制，尤其是在处理诸如系统逆矩阵和动态反馈综合的时候。

在同时期，非线性控制系统中微分代数方法的引进打开了又一扇窗[49]，它很好地解决了当时遇到的微分几何所无法解决的问题。在几个作者的共同努力研究下，微分代数学以新的研究方法为特征，以代数特性，研究新出现的问题并再次探究已经解决的问题，包括转置（逆）、非交互控制和标准型的简化等。

在今天，代数法在非线性控制领域已经得到广泛的应用，近几年也陆续出版了相关书籍，集中在非线性系统理论应用原理与代数理论。在这些书籍中有很多知识点，很好地支撑了在控制领域的研究，而且也为一些棘手的问题拓展了思路。

代数法能够如此流行的一个很重要的原因是它本身的简洁性，与想要真正有效地使用微分几何方法所需要的数学知识相比，代数方法所需要的理论基础是很有限的。渐进可达性的概念和线性化问题的解决充分说明了微分代数理论的简洁特性。在这两个问题中，基于相对度和函数的元素求导，就可以更加深入地分析和定义相关的动态特性。代数法的简洁性保证了非线性控制的工程性课程教学的实用和有效。本书基于此，为解决复杂系统分析和综合问题提供了突出简洁性的有效算法。

关于这一理论另一个有利的性质就是其在动态系统和控制领域广泛的适用性。尽管本书仅仅就连续时间系统进行了讨论，但事实上本书所讲的理论对于很多离散非线性系统也是适用的。详见参考文献[4]、[68]。不仅如此，对于时变系统包

括最近研究出的时间延迟系统与其他理论[13,120]相比，显得更加全面并且能够深入到问题的实质。

仅仅需要掌握关于系统和控制理论的基本概念就可以阅读本书，这本书按照循序渐进的思路编排，第一部分描述背景和基本概念，定义及基于数学的准备知识包括外微分法的符号等，之后研究像能控性、能观性等基本性质。同时也给出了结构算法和系统规范分解。第二部分介绍了该理论在控制问题中的应用，尤其是过程控制，可达性滤波$\{\mathcal{H}_k\}$的反馈线性化问题的解决方案在第三章提到，此子空间独立于输入而可被观测，介绍了干扰解耦的子空间$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$方法。第四章论述非交互系统和模型匹配问题，第五章介绍了输出滤波$\{\varepsilon_k\}$和结构算法。

最后在第三部分，微分代数中，较简单但全面地引进微分代数的概念，从微分代数的角度重新分析第一部分，所描述的概念不仅能够增加读者的专业知识而且能够加深对代数算法核心思想的理解。基于微分代数理解非线性系统方法是在20世纪80年代提出的[49, 52, 54]，微分代数和微分代数理论的引进[86, 126]与其他利用了微分几何法或者Volterra等其他方法[48]相比，这个方法似乎更能够消除级数概念中的缺点，可得到逆补偿器。另外，这一理论与各种分析和综合问题相联系，提供了具有启发性的视角和结论[44, 52, 54, 64, 136]。尽管微分代数方法更加适合于多项式和有理式，但对于一般性的系统模型描述仍然是适用的[50,141]。在本书中我们仅介绍关于微分代数理论的基本概念和动态系统在微分代数中的基本概念。目的是帮助读者对之前所学的概念建立起联系。

作者在此答谢北大西洋公约组织为编号CRG89101的联合研究项目经费支持，这个项目中研究的几个结论也在本书中提及。最后作者想要感谢在联合研究中J.W. Grizzle和M.D. di Benedetto对本书的帮助，感谢M. Fliess, A. Isidori, A. Glumineau, E. Aranda, J.B. Pomet, R. Andiarti, Ü. Kotta和Y.F. Zheng 有价值的讨论，感谢L.A. Márquez Martínez和R. Pothin对本书仔细读审。感谢E. LeCarpentier.的帮助。

第一章　准 备 知 识

通常，以数学模型来描述动态系统，表征系统的物理现象的时间历程特性。在当前系统和控制理论发展过程中，对系统模型的描述进行了精细化研究，提出了公理特性[99]、行为特征点[133, 159]以及模块理论[54]等。

本章基于传统的控制理论，将动态系统描述为一阶微分方程：

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，独立的状态变量 $t \in \mathbb{R}$ 空间；状态变量 $x(\cdot)$ 隶属于 $\mathbb{R}^n$ 空间，输入 $u(\cdot)$ 隶属于 $\mathbb{R}^m$ 空间，输出 $y(\cdot)$ 隶属于 $\mathbb{R}^p$ 空间，f, g, h 是一般函数表达式。由第一定律决定的物理系统可以用上述数学模型来表达，或至少作用于局部空间区域。在机器人、机械、汽车等工业、经济和生物领域，基于此模型的控制与设计行之有效[101, 147]。在模型建立中有两点需要考虑：通用性和实用性。针对具体问题，一般函数 f, g, h 可以用特殊表达方式。

可见动态系统的建模涉及不确定度和近似程度，我们所感兴趣的模型是在标准工作状态验证可行便认定在大多数工作状态下可行，即去除病态工作点的系统工作范围内可行。这种建模方法称之为对“属”的考虑，即开放子集的概念。由此形成对描述动态系统的数学模型所需要的限制条件。为更好地理解这一建模的思想，来看式(1.1)的向量域 $g(x)$。采用式(1.1)描述系统，所独立的输入通常是对系统产生独立的影响。否则，输入变量间有耦合，输入向量 u 有降价的必要。因此 $g(x)$有最大阶数的要求。也就是，$g(x)$中的元素不可能是 C^∞ 函数。如果元素有 C^∞ 函数，如 $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & 如果x<0 \\ 0, & 如果x \geqslant 0 \end{cases}$，对非零的 x 都会使向量空间阶数不可能最大或比最大阶数小。换句话说，对于 C^∞ 函数，“属”的概念没有意义。如果以解析函数或亚纯函数来表示，如 1.2 节中介绍，动态系统的数学模型表达式将有所不同。

1.1　解析函数和亚纯函数

定义 1.1　如果对于域 I 属于实数域，定义函数 F 对于 I；如果在点 x_0 附近点

都能展开成泰勒级数，那么在 x_0 处函数 F 解析；如果在任一点都解析，则函数 F 在定义域 I 解析。

解析函数例子很多像多项式函数，三角函数、有理函数等在定义域内任何一点都是解析函数。但函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{如果}x\neq 0 \\ 0, & \text{如果}x=0 \end{cases}$ 就不是解析函数。因为在 $x=0$ 处它不是解析的（见图 1.1）。我们所感兴趣的解析函数拥有的性质如下：

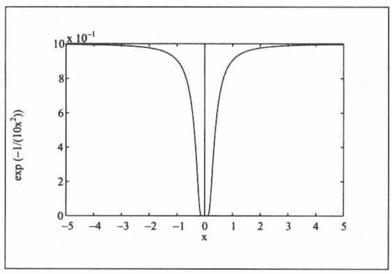

图 1.1　$\exp(-1/(10x^2))$ 的图像

命题 1.2　$I\subseteq\mathbb{R}$ 为开区间，函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在 I 上解析。则有：

(i) $f\equiv 0$ 在 I 上成立；

(ii) f 在 I 上的零点孤立成立。

函数 F 在定义域内恒为零或者在有限间断点为零。

证明　令 $Z(f)$ 表示 f 在 I 上零点的集合。对任意点 $\overline{x}\in Z(f)$，f 在 I 上解析。所以，存在邻域 $D(\overline{x},r)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-\overline{x}|<r\}\subseteq I$，使得对任意 $x\in D(\overline{x},r)$，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-\overline{x})^n$$

那么存在两种情况：$c_n=0(n=0,1,2,\cdots)$ 成立；或者，存在一个最小正整数 m，使得 $c_m\neq 0$ 且 $c_n=0(n<m)$ 成立。对于后一种情况，我们可以将上式写成

$$f(x)=(x-\overline{x})^m f_1(x) \tag{1.2}$$

其中

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+m}(x-\overline{x})^n \text{ 且 } f_1(\overline{x})\neq 0 \tag{1.3}$$

根据连续性条件，在邻域 $D(\overline{x},r_1)$ 内 $f_1(x)\neq 0$，同时在 $D(\overline{x},r_1)$ 内 $x\neq\overline{x}$ 处 $f(x)\neq 0$，

也就是说，$\bar{x}$ 是一个孤立的零点。用另一种方式，对于第一种情况，在 $D(\bar{x},r)$ 内 $f\equiv 0$，且 $\bar{x}$ 是 $Z(f)$ 的一个内点，$Z(f)$ 由孤点和内点组成。特别的，我们假设 $Z(f)$ 内至少存在一个点 $\bar{x}$ 是内点，使得 A 成为包含 $\bar{x}$ 的 $Z(f)$ 的连通部分。如果 A 的最小上界 $\sup\{A\}$ 包含于 I，则根据函数 f 连续性，它也将包含于 $Z(f)$。进而，由于它是内点而非孤点，它必将和 I 的最小上界 $\sup\{I\}$ 一致。当 $\sup\{A\}$ 不包含于 I 的时候，一致性仍然存在。这里，我们得到 $\sup\{A\}=\sup\{I\}$，同理 $\inf\{A\}=\inf\{I\}$。因此，在 I 内 $Z(f)=I$ 且 $f\equiv 0$ 成立。 ■

多项式函数存在有限的孤立的零点。函数 $f(x)=\sin x$ 存在着与 $x=k\pi$ 相关的无限个孤立零点，k 为正、负整数。非解析连续函数，零点不孤立的一个典型的例子是

例 1.3 函数 $f(x)$ 定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}\sin(1/x), & \text{如果} x\neq 0\\ 0, & \text{如果} x=0\end{cases}$$

这个函数不是解析的，因为 0 点是振荡点。(见图 1.2)

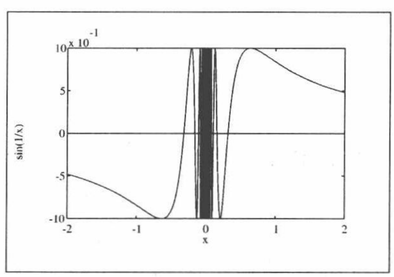

图 1.2 $\sin(1/x)$ 的图像

定义 1.4 函数形如

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}\sin(1/x), & \text{如果} x\neq 0\\ 0, & \text{如果} x=0\end{cases}$$

这个函数也不是解析函数。因为在 x=0 处，不解析。

在多变量中，可类比考虑在一个开放的区域中，有下列定义。

定义 1.5 对于函数 $f:D\to\mathbb{R}$，当在 $x_0\in D$ 的邻域能泰勒展开，便称此函数是解析的。命题 1.2 变为如下：

命题 1.6 对于函数 f: D 成为一个凸集开放域，函数 f: 在区域 D 中是解析

函数，则有

(i) $f \equiv 0$ 在 D 上成立；

(ii) f 在 D 上的零域为空。

证明 对于 D 中任意 x_1，如果存在，则取定义在 D 中 f 零域上的 x_0，穿过 x_1 和 x_0 的直线 L 上的点都是 f 的零点，因为在直线 L 上，f 是解析的，根据命题 1.2 $f(x_1)=0$。 ■

例 1.7 定义域为整个平面，$f(x_1,x_2)=x_1-1$，很容易看出对于任意定义域内 P，不存在任何 Z 的邻域(见图 1.3)。

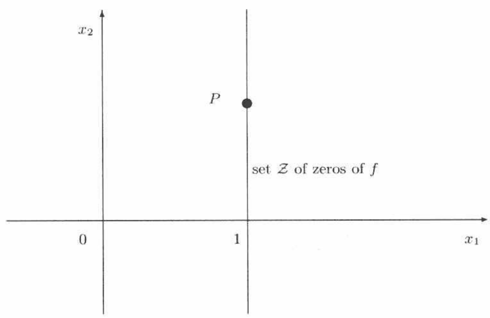

图 1.3 $f(x_1,x_2)=x_1-1$ 的零点

根据命题 1.6 定义在属于全体实数的非零解析函数，在一个开放且密集的实数域的子域中(零域显然是闭合的)，与 0 不同，换句话说它们与 0 不同。因此把一个矩阵，它的每一项都是解析的函数，并且是最大的非零行列式，其阶数定义为：一般阶。最大方阵的行列式是解析函数，一般阶就和定义于开放的密集域的矩阵的阶相等更进一步，一般阶和定义在任意点的矩阵的阶相等或者更大。

如果函数 $f(x)$ 是解析的，那么对于它的导函数而言，并不一定是解析的，然而在一个合适的代数框架中，我们可以给出一个非零解析函数的导函数的定义。为了解释这个，首先我们先定义：由“+”定义的加法和“·”定义的乘法使得定义于 $\mathbb{R}^r$ 到 $\mathbb{R}$ 的解析函数形成了一个环，定义为 $\mathcal{A}_r$。$\mathcal{A}_r$ 的一个重要的环形理论性知识是它的分母并不包含零因子[①]。C_∞ 函数也能形成一个环，但是环有零因子。

$$f_1(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{如果} x<0 \\ 0, & \text{如果} x \geqslant 0 \end{cases}$$

①在一个环 A 中，如果一个非零元素 x 与另一个非零元素 y 的乘积是 0 即 $x \cdot y=0$，则 x 称为零因子。

和

$$f_2(x)=\begin{cases}0, & \text{如果}x\leqslant 0\\ e^{-1/x^2}, & \text{如果}x>0\end{cases}$$

没有零因子的环叫做积分域。并且拥有几个较好的性质。在这里我们感兴趣的是积分域可以被置于一个较大的代数项目中，叫做系数领域。为每个非零元素提供了倒数的定义。这个 $\mathcal{A}_r$ 系数域的结构叫做 $\mathcal{K}_r$ 是很普通的，$\mathcal{K}_r$ 的元素是 $\mathcal{A}_r$ 中 $g\neq 0$ 的 (f,g) 对。只有当 $fg'=gf'$ 构成了等效关系 $\approx_R$ 即 $(f,g)\approx_R(f',g')$。$\mathcal{K}_r$ 中的元素将被写成 f/g。加法和乘积仍然是“+”，“·”。

f_1/f_2 以及 g_1/g_2 可以被如下定义

$$(f_1,g_1)+(f_2,g_2):=(f_1\cdot g_2+f_2\cdot g_1,g_1\cdot g_2)$$

$$(f_1,g_1)\cdot(f_2,g_2):=(f_1\cdot f_2,g_1\cdot g_2)$$

注意到上述定义在 K_r 中因为 $g_1\cdot g_2\neq 0$，并且和积的结果并不依赖于选择的对象。在上面的操作中，使得 $\mathcal{A}_r$ 中的 f 与 $\mathcal{K}_r$ 中的 $f/1$ 相映射。给了 $\mathcal{A}_r$ 中 f 就得到 $\mathcal{K}_r$ 中的 $1/f$，接下来我们将 f 写成 $f/1$，fg 写成乘法 $f\cdot g$。

任何分式函数都是亚纯函数，一个典型的例子是 $\tan x=\sin x/\cos x$。如果我们把这类函数看成是真的 N 维变量，则它们的定义域是开放且集中的，同时他们的零序列是空的。

1.2 控 制 系 统

在 1.1 节提到，我们可以精确地定义即将研究的动态系统是由一系列一阶微分方程组的形式组成

$$\Sigma=\begin{cases}\dot{x}(t)=f(x(t))+g(x(t))u(t)\\ y(t)=h(x(t))\end{cases}\tag{1.4}$$

其中自变量 $t\in\mathbb{R}$ 表征时间；$x(\cdot)\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量；$u(\cdot)\in\mathbb{R}^m$ 为输入向量；$y(\cdot)\in\mathbb{R}^p$ 为输出向量；f,g,h 是亚纯函数。另外，我们假定下面的假设是成立的。

假设 1.8 对给定的，形如(1.4)的系统，矩阵 $g(x)$ 的秩 $g=m$。

如上所述的动态系统通常被称为控制系统，如果 f 和 h 为非线性的且 g 非常量，则称为非线性控制系统。在这里，我们将变量 t 从式(1.4)中去除并不会引起什么歧义。通常我们倾向于将式(1.4)写成用状态空间表示法或内部表征法表征的

控制系统。状态变量不出现的外部表示法我们将会在第二章中连同它和内部表征法的联系一同讨论。

微分方程(1.4)代表的系统有一个值得注意的特征，它对输入变量u是仿射的。由于，更为一般的模型可以通过将式(1.4)替换成

$$\Sigma=\begin{cases}\dot{x}=f(x,u)\\ y=h(x)\end{cases} \tag{1.5}$$

原则上，对于我们要考虑的动态系统来说，那是一个重要的限制。上式中变量$x\in\mathbb{R}^n,u\in\mathbb{R}^m$以及$y\in\mathbb{R}^p$均表示通常的意义。且$f,g,h$为亚纯函数。然而，由式(1.4)定义出的仿射控制系统能够充分满足模型要求。

此外，这类仿射非线性控制系统非常接近基本系统的理论运行，概括了串并联组合形式，以及非常重要的对$u(t)=\alpha(x(t))+\beta(x(t))v(t)$的反馈。$\alpha(x)$和$\beta(x)$都是亚纯函数。而这些对于形如(1.5)所表示的系统则不正确。例如，$f(x,u)=\sin u$，选择反馈$u=1/x$将会带来并非亚纯函数的表征。虽然在一些情况下，我们要考虑到比上述模型更加广义及多样的反馈形式的对象，但通常我们仅处理对u存在仿射的表征。

1.3 线性代数背景

在假定非线性控制系统Σ形如式(1.1)的前提下，我们在这节将构建一系列用于定义和研究系统理论特性的代数设定。方法是简要而正式地引入微分形式的概念。这样选择的原因是简洁，且我们在本书的其他部分将仅对微分形式的抽象代数和正式性质充满兴趣。其他例如在文献[83]、[101]、[126]、[157]中描述的相同主题的处理方法，在某种正式的水平上，和我们在这里描述的相互认同。我们的方法和文献[19]中所用的在关键点上联系了起来，为了避免技术上的问题，文献[19]中的论证和技术结构这里不再详述。

系统Σ的状态空间是n维的，输入是m维的。首先让我们考察实多元多项式

$$C=\{x_i,i=1,\cdots,n;u_j^{(k)},j=1,\cdots,m,k\geqslant 0\}$$

对任意正整数r，我们用C的前r个元素表示在$\mathbb{R}^r$空间内的一个点的坐标。进一步，一个从$\mathbb{R}^r$到$\mathbb{R}$的函数，实际是$\mathcal{K}_r$的一个元素，将会被写成C的前r次多元多项式的函数。

偏导数$\partial/\partial x_i$和$\partial\big/\partial u_j^{(k)}$在所有从$\mathbb{R}^r$到$\mathbb{R}$的亚纯函数的$\mathcal{K}_r$域中存在，且被称为微分域结构。微分域和它的性质不会被明确地作为工具引入本书。但是，读者