Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

考研数学主观题 23天突破500题

数学一

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

◎ 清华大学 王 欢
◎ 北京大学 王德军 主编
◎ 首都师范大学 童 武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

考研数学主观题 23天突破500题

数学一

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

◎清华大学 王欢
◎北京大学 王德军 主编
◎首都师范大学 童武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学主观题 23 天突破 500 题. 数学一 / 王欢主编.
—北京:中国石化出版社,2014.1
ISBN 978-7-5114-2495-2

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 285746 号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京柏力行彩印有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092 毫米 16 开本 13.25 印张 339 千字
2014 年 3 月第 1 版 2014 年 3 月第 1 次印刷
定价:32.00 元(赠送 MP3 光盘)

前　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括：

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》
《考研数学标准模拟试卷精解数学二》
《考研数学标准模拟试卷精解数学三》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　98考点全突破数学一》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　70考点全突破数学二》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　102考点全突破数学三》
《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》
《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》
《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学一》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学二》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学三》
《考研数学主观题23天突破500题　数学一》
《考研数学主观题13天突破500题　数学二》
《考研数学主观题22天突破500题　数学三》
《考研数学客观题26天突破1500题　数学一》

《考研数学客观题15天突破1500题　数学二》

《考研数学客观题27天突破1500题　数学三》

《考研数学最后冲刺超越135分　数学一》

《考研数学最后冲刺超越135分　数学二》

《考研数学最后冲刺超越135分　数学三》

本套书的编写特点如下：

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧，高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套丛书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

第一部分　高等数学

第 1 天　函数、极限与连续

1. 求$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

【解析】属 1^∞ 型

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)}$$

由于
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)=\pi\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}=-\frac{\pi}{2},$$

故原式$=e^{-\pi/2}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x+x^2/2)e^x-\sqrt{1+x^3}}{x^3}$.

【解析】[解法一]

$$\because\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x=\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]=1+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x^3}=(1+x^3)^{1/2}=1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

$$\therefore\quad\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-\sqrt{1+x^3}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]-\left[1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{3}$$

[解法二]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-(1+x^3)^{1/2}}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-1}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^3)^{1/2}-1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x}{3x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{6x^2}e^x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$$

3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

【解析】这是 n 项和式和极限，当各项分母均相同是 n 时，n 项和式

$$x_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n}$$

是函数 $\sin\pi x$ 在[0，1]区间上的一个积分和，于是可由定积分 $\int_0^1 \sin\pi x\mathrm{d}x$ 求得极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n$.

为了求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$，首先通过放缩化简 n 项和数列：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0};$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}\quad\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

据夹逼准则，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}=\frac{2}{\pi}$$

4. 设 $x_1=10$，$x_{n-1}=\sqrt{6+x_n}$（$n=1$，2，…），试证数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限.

【证明】首先，显然有 $x_n>0$，$\{x_n\}$有下界.

证明 x_n 单调减：用归纳法 . $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6+10}=4<x_1$；设 $x_n<x_{n-1}$则

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+x_{n-1}}=x_n$$

由此，x_n 单调减. 由单调且有界准则，$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$，求 a：在恒等式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$两边取极限，得 $a=\sqrt{6+a}$取得 $a=3$（$a=-2$ 舍去，因为 $x_n>0$，$a\geqslant0$）.

5. 设 $f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i\neq1$，$i=1$，…，$n$.

求：（Ⅰ）$\lim\limits_{x\to0}f(x)$；（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

【解析】（Ⅰ）$$\lim_{x\to0}f(x)=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}\right]$$
$$=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\right]$$
$$=\exp\left(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

（Ⅱ）记 $a=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

则 $$a\left(\frac{1}{n}\right)^{1/x}=\left(\frac{a^x}{n}\right)^{1/x}\leqslant f(x)\leqslant\left(\frac{na^x}{n}\right)^{1/x}=a$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}a\left(\frac{1}{n}\right)^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}a=a$$

∴ $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

6. 求函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$$

的反函数及其定义域.

【解析】(1) 在区域$(-\infty, 1)$内，$y=x$ 的反函数就是它本身，又因函数 $y=x$ 的值域为$(-\infty, 1)$，故其反函数 $x=y$ 的定义域也为$(-\infty, 1)$，于是有 $y=f^{-1}(x)=x(-\infty<x<1)$.

(2) 在区间$[1, 4]$上，由 $y=x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{y}$，因 $x\in[1, 4]$，故 $x=\sqrt{y}$，又函数的值域为$[1, 16]$，故其反函数定义域为$[1, 16]$．于是 $y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}(1\leqslant x\leqslant 16)$.

(3) 在区间$(4, +\infty)$上由 $y=2^x$ 解出 $x=\log_2 y$. 因函数 $y=2^x$ 的值域为$(16, +\infty)$，故其反函数定义域为$(16, +\infty)$，于是 $y=\log_2 x(16<x<+\infty)$.

综上所述，所求反函数也是一分段函数，它的表达式为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty\end{cases}$$

7. 证明：函数$f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$在$(-\infty, +\infty)$上有界.

【证明】利用不等式 $2|ab|\leqslant a^2+b^2$，有

$$|f(x)|\leqslant 1+\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 2$$

故$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上有界.

8. 设$f(x)$满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中 a，b，c 是常数，且 $|a|\neq|b|$．试证：$f(x)$是奇函数.

【证明】在所给方程中，用$\dfrac{1}{x}$代替 x 得：$af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$，联立原方程，消去$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx,$$

又$|a|\neq|b|$，所以$f(x)=\dfrac{c}{a^2-b^2}\left(\dfrac{a}{x}-bx\right)$. 将 $-x$ 代入$f(x)$表达式得

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=-\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)=-f(x)$$

所以$f(x)$为奇函数.

9. 设$f(x)$是在$(-\infty, +\infty)$上以 T 为周期的连续函数.

(1) 如果$f(x)$是奇函数，则函数 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}t$ 也是以 T 为周期的周期函数；

(2) 如果 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\neq 0$，则函数 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可表示成线性函数与以 T 为周期的周期函数之和.

【证明】(1) 由周期函数及奇函数的积分性质，得

$$F(x+T)=\int_0^{x+T}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{T}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)$$

所以，$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k，有

$$G(x)=\int_a^x[f(t)-k+k]\,\mathrm{d}t=\int_a^x[f(t)-k]\,\mathrm{d}t+k(x-a)$$

由于 $k(x-a)$ 是线性函数，所以只需证明当 k 取某一值时 $g(x)=\int_a^x[f(t)-k]\,\mathrm{d}t$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质，得

$$g(x+T)=\int_a^{x+T}[f(t)-k]\,\mathrm{d}t=\int_a^{x}[f(t)-k]\,\mathrm{d}t+\int_x^{x+T}[f(t)-k]\,\mathrm{d}t$$

$$=g(x)+\int_0^{T}f(t)\,\mathrm{d}t-kT$$

取 $k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $g(x+T)=g(x)$，即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

10. 设 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x)\,(a^2\neq1)$，其中 $\varphi(x)$ 是已知函数，在 $x\neq1$ 时有定义，求 $f(x)$ 的表达式.

【解析】题中给出了关于 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的一个复合函数的等式，此类题目的[解法一]般是利用变量代换，设法得到一个方程组，然后解出 $f(x)$. 为此，令 $t=\frac{x}{x-1}$，则 $x=\frac{t}{t-1}$，代入原等式得

$$f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right)$$

于是得到关于 $f(x)$，$f\left(\frac{x}{x-1}\right)$ 的二元一次方程组：

$$\begin{cases}f\left(\frac{x}{x-1}\right)-af(x)=\varphi(x),\\ f(x)-af\left(\frac{x}{x-1}\right)=\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right),\end{cases}$$

解得 $f(x)=\frac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$

11. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$.

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi+n\pi]$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0,$$

这里用到当 $n\to\infty$ 时，$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to0\,(n\to\infty)$，又 $|(-1)^n|=1$ 是有

界量，根据有界量乘无穷小仍是无穷小量知$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=0$.

12. 求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

【解析】由于

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2},$$

又因为$\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$$

根据有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，所以

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$$

13. 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^n)}{\ln^m(1+x)}(m,\ n\in N^*)$.

【解析】因当$x\to0$时，$\ln(1+x^n)\sim x^n$，$\ln^m(1+x)\sim x^m$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^n)}{\ln^m(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}\infty, & n<m,\\ 1, & n=m,\\ 0, & n>m\end{cases}$$

14. 设$x_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解析】因为$\frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+1}\leqslant\frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}\leqslant\frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n}(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$，所以

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}$$

又因为

$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=e^{\frac{1}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}=e^{\frac{1}{n}}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}},\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1-e)e^{\frac{1}{n}}\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=e-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=1\cdot(e-1)=e-1,$$

由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e-1$

15. 求$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{11\cdot12\cdot13\cdot\cdots\cdot(10+n)}{2\cdot5\cdot8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$.

【解析】令$x_n=\frac{11\cdot12\cdot13\cdot\cdots\cdot(10+n)}{2\cdot5\cdot8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$，则$0<x_n=\frac{11}{1}\cdot\frac{12}{2}\cdot\frac{13}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{10+n}{3n-4}\cdot\frac{1}{3n-1}$

显然，当$n>7$时就有$3n-4>10+n$，此时(即当$n>N=7$时)

$$0<x_n<\frac{C}{3n-1},$$

其中 $C=\frac{11}{1}\cdot\frac{12}{2}\cdot\frac{13}{5}\times\cdots\times\frac{17}{17}$. 若取 $y_n=0$，$z_n=\frac{C}{3n-1}$，则 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$，故所求极限为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

16. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

【解析】

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x[1-e^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{x[e^{(x-1)\ln x}-1]}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$$

（因 $e^{(x-1)\ln x}-1\sim(x-1)\ln x$，$x\to1$ 时）

$$\xlongequal{\text{洛必达}}-\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)\ln x+(x-1)}{(1/x)-1}=-\lim_{x\to1}\left[\frac{(2x^2-x)\ln x+x(x-1)}{1-x}\right]$$

$$=1-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x}{1-x}\xlongequal{\text{洛必达}}1-\lim_{x\to1}\frac{(4x-1)\ln x+(2x-1)}{-1}$$

$$=1+\lim_{x\to1}[(4x-1)\ln x+(2x-1)]=1+1=2$$

17. 求 $\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{1-\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\varphi^2}$（$n$ 为正整数）.

【解析】原式 $\xlongequal{\text{洛必达}}\lim\limits_{\varphi\to0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}+\frac{2}{\cos2\varphi}\frac{\sin2\varphi}{2\varphi}+\cdots+\frac{n}{\cos n\varphi}\cdot\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\right)\right.$

$$\left.\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{4}$$

18. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

【解析】利用 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，分别取 $n=1,2,\cdots$，求和得 $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

故

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{4}$$

19. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

【解析】设 $x_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$. 因为 $x_{n+1}=x_n\cdot\frac{2n+1}{2n+2}<x_n$，且 $x_n>0$，所以由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

又因为

$$\frac{1}{x_n}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}>\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}=x_n\cdot(2n+1),$$

即 $x_n^2<\dfrac{1}{2n+1}$，所以 $0<x_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$，由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

20. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$.

【解析】先将 n 项乘积化简为下述形式：

$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n}=2^{[1-(1/2)^n]}$，

再在上式两端求极限，得到

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})=\lim_{n\to\infty}2^{[1-(1/2^n)]}=2$$

21. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2+ax+b}=1$，求 a 与 b 的值.

【解析】因为 $x\to1$ 时，$\sin(x-1)\sim x-1$，所以原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+ax+b}=1$. 又因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$，所以 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$. 由此得 $1+a+b=0$. 把 $b=-1-a$ 代入原式得

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1+a)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1+a}=1$$

因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to1}(x+1+a)=0$，故得 $a=-2$，$b=1$

22. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=0$，求正整数 n 的值.

【解析】用等价无穷小代换分别得到：

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2/2)\cdot x^2}{x\cdot x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^{3-n}=0,\quad \lim_{x\to0}\frac{x\cdot x^n}{x^2}=\lim_{x\to0}x^{n-1}=0,$$

因而 $3-n>0$，$n-1>0$. 由 $1<n<3$ 得 $n=2$.

23. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，求常数 a 和 b 的值.

【解析】因为分母为 x^2，将 $\ln(1+x)$ 展至 2 阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式：

$$\ln(1+x)=x-(1/2)x^2+o(x^2),$$

则

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{x-(1/2)x^2+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x-(1/2+b)x^2+o(x^2)}{x^2}=2$$

于是必有 $1-a=0$，$-(1/2+b)=2$，解之得：$a=1$，$b=-5/2$

24. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 问 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处是否连续？

【解析】注意到 $\lim\limits_{x\to0+0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to0-0}2^{\frac{1}{x}}=0$，应先计算 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限：

$$f(0+0)=\lim_{x\to0+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1-(1/2^{\frac{1}{x}})}{1+(1/2^{\frac{1}{x}})}=1,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$$

因 $f(0+0)\neq f(0-0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在，因而在 $x=0$ 处不连续.

25. 试确定 a，b 的值，使 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$.

【解析】(1) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，则必要求

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty，\text{即}\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{(-a)(-1)}{e^0-b}=\frac{a}{1-b}=0$$

因此，当 $a=0$，$b\neq 1$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

(2) 若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 存在. 因为

$$\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=e\left(e^{x-1}-\frac{b}{e}\right)/[(x-a)(x-1)],$$

又当 $x\to 1$ 时，$x-1\to 0$，$e^{x-1}-1\sim x-1$，所以当 $b=e$ 时，有

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(x-1)}{(x-a)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e}{x-a}=\frac{e}{1-a}$$

因此，当 $a\neq 1$，$b=e$ 时，$x=1$ 是 $f(x)$ 的所在间断点. 综上知，$a=0$，$b=e$.

第 2 天　导数与微分

1. 设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0$，$x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

【证明】[证法一]用拉格朗日中值定理证，不妨设 $x_2>x_1>0$，要证的不等式是

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

在 $[0,x_1]$ 上用中值定理，有

$f(x_1)-f(0)=f'(\xi)x_1$，$0<\xi<x_1$；

在 $[x_2,x_1+x_2]$ 上用中值定理，又有

$f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\eta)x_1$，$x_2<\eta<x_1+x_2$；

由 $f''(x)<0$，$f'(x)$ 单调减，而 $\xi<x_1<x_2<\eta$，有 $f'(\xi)>f'(\eta)$. 由此，

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)=f(x_1)$$

[证法二]作为函数不等式来证明. 要证

$$f(x_1+x)<f(x_1)+f(x)\text{，}x>0$$

令 $\varphi(x)=f(x_1)+f(x)-f(x_1+x)$，则 $\varphi'(x)=f'(x)-f'(x_1+x)$

由 $f''(x)<0$，$f'(x)$ 单调减，$f'(x)>f'(x_1+x)$，$\varphi'(x)>0$，由此，$\varphi(x)>\varphi(0)=f(x_1)+f(0)-f(x_1)=0(x>0)$. 改 x 为 x_2 即得证.

2. 证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两上不同实根.

【证明】记 $k=\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x>0$，方程化为 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-k$

令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 由 $f'(x)=0$ 解得唯一驻点 $x=\mathrm{e}$，且 $f'(x)$ 在此由正变负，$x=\mathrm{e}$ 是极大点也是最大点，最大值为 $f(\mathrm{e})=k>0$；又由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，知 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 各有且仅有一个零点，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有两个零点.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\leqslant M$，$f(a)=0$，证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2.$$

【证明】由题设对 $\forall x\in[a,b]$，可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉氏微分中值定理，于是有

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)\text{，}\xi\in(a,x)$$

$\because$　$f'(x)\leqslant M$，$\therefore$　$f(x)\leqslant M(x-a)$. 由定积分比较定理，有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M(x-a)\,\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(b-a)^2$$

4. 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导且 $f(a)=f(b)$. 证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

【证明】利用拉格朗日中值定理可得到结果：由 $f(x)\neq c$，有 $f(x)\neq f(a)$. 因而 $\exists x_0\in(a, b)$，$f(x_0)\neq f(a)$

若 $f(x_0)>f(a)=f(b)$，在 $[a, x_0]$ 上使用拉格朗日中值定理，则 $\exists\xi\in(a, x_0)\subset(a, b)$，

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0;$$

若 $f(x_0)<f(a)=f(b)$，在 $[x_0, b]$ 上使用拉格朗日中值定理，则 $\exists\xi\in(x_0, b)\subset(a, b)$，

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}>0$$

5. 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数，并且
$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证：
(1) 在开区间 (a, b) 内 $g(x)\neq 0$；
(2) 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

【证明】(1) 反证法. 假设 $\exists c\in(a, b)$，使 $g(c)=0$，则由罗尔定理，
$\exists\xi_1\in(a, c)$ 与 $\xi_2\in(c, b)$，使 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$；从而由罗尔定理，又 $\exists\xi\in(\xi_1, \xi_2)\subset(a, b)$，$g''(\xi)=0$. 这与 $g''(x)\neq 0$ 矛盾.

(2) 即证 $f(x)g''(x)-f''(x)g(x)$ 在 (a, b) 存在零点，注意

$$f(x)g''(x)-f''(x)g(x)\text{在}(a, b)=(f(x)g'(x)-f'(x)g(x))',$$

考查 $f(x)g''(x)-f''(x)g(x)$ 在 (a, b) 的原函数，令
$\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\Rightarrow\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$. 由罗尔定理，$\exists\xi\in(a, b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$.
亦即

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

6. 试证明方程 $xe^{2x}-2x-\cos x=0$ 有且仅有两个实根，并且是一正、一负.

【证明】利用零点存在定理及导数的性质.
令 $F(x)=xe^{2x}-2x-\cos x$，有
$F(0)=-1<0$，$F(1)=e^2-2-\cos 1>0$，$F(-1)=-e^{-2}+2-\cos 1>0$，
所以在 $(-1, 0)$ 与 $(0, 1)$ 内，$F(x)=0$ 各至少有一实根，$F'(x)=2xe^{2x}+e^{2x}-2+\sin x$，故当 $x<-1$，$F'(x)<0$，而 $F(-1)>0$，故在 $(-\infty, -1)$ 内，$F(x)=0$ 无实根. $F''(x)=4xe^{2x}+4e^{2x}+\cos x$，可见在 $(-1, +\infty)$ 内 $f''(x)>0$，所以在 $(-1, +\infty)$ 内 $f(x)=0$ 至多有两个实根，而前面已证 $F(x)=0$ 至少有两个实根. 故 $F(x)=0$ 有且仅有两个实根，且一正一负.

7. 如果 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，证明：

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}<\tan\alpha-\tan\beta<\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}.$$