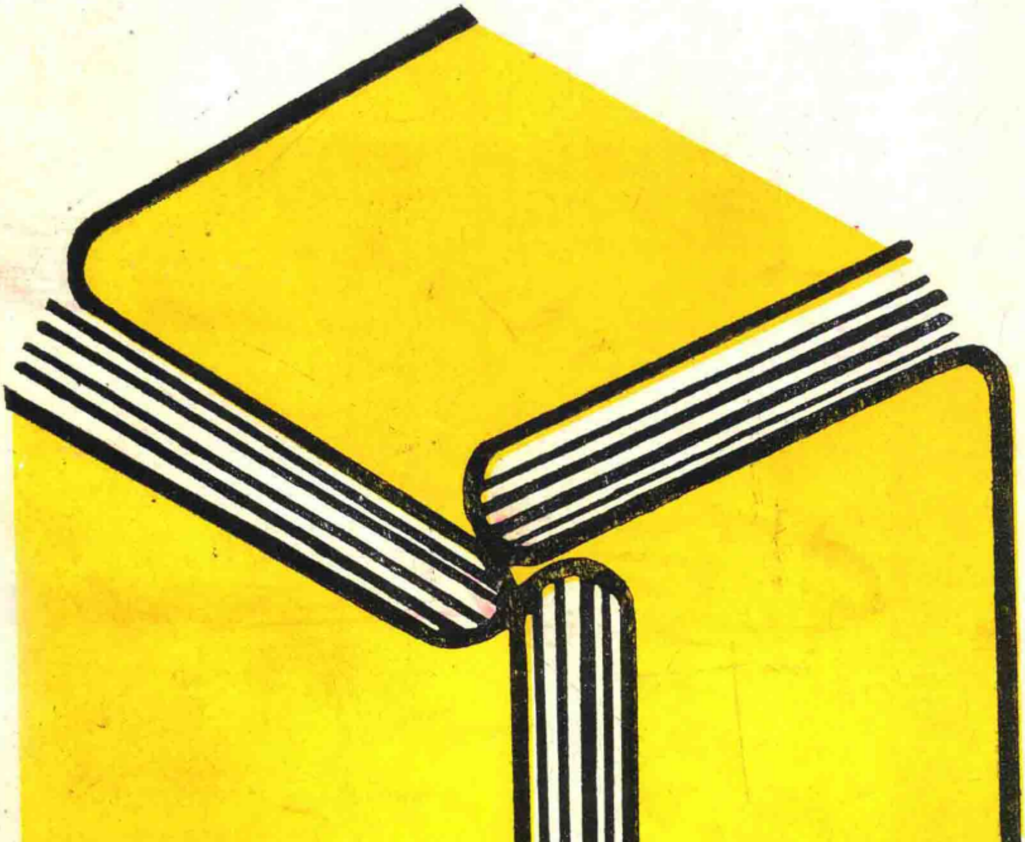
SHUXUE

FENXI

数学分析 (4)

诸少民　罗桂诗　黄树荣



广　州　暨　南　大　学

一九九二年七月

目　录

第十八章　隐函数定理及其应用

§1　隐函数 …… (1)
一　隐函数的概念　二　隐函数定理
§2　隐函数组 …… (13)
一　隐函数组的概念　二　隐函数组定理
三　反函数组与坐标变换　四　函数行列式的性质
§3　隐函数定理的几何应用 …… (25)
一　平面曲线的切线与法线　二　空间曲线的切线和法平面
三　曲面的切平面与法线
§4　条件极值 …… (35)
一　条件极值　二　拉格朗日乘数法

第十九章　含参量积分

§1　含参量正常积分 …… (46)
§2　含参量非正常积分 …… (55)
一　含参量非正常积分一致收敛性概念
二　含参量非正常积分一致收敛判别法
三　含参量非正常积分的性质
§3　欧拉积分 …… (74)
一　Γ函数及其性质　二　B函数及其性质
三　Γ函数与B函数的关系

第二十章　重积分

§1　二重积分概念 …… (84)
一　实例　二　二重积分的定义及其存在性
三　二重积分的性质
§2　二重积分的计算 …… (90)
一　化二重积分为累次积分　二　用极坐标计算二重积分
三　二重积分的一般变换
§3　三重积分 …… (110)
一　三重积分概念　二　化三重积分为累次积分
三　三重积分换元法
§4　重积分的应用 …… (121)
一　曲面的面积　二　重心
三　转动惯量　四　吸引力
§5　n重积分 …… (128)

§6　非正常重积分 …………………………………………………………………… (130)
一　无界区域上的二重积分　　　　二　无界函数的二重积分

第二十一章　曲线积分与曲面积分

§1　第一型曲线积分与第一型曲面积分 ………………………………………………… (139)
一　第一型曲线积分与第一型曲面积分概念
二　第一型曲线积分与第一型曲面积分的性质
三　第一型曲线积分与第一型曲面积分的计算
§2　第二型曲线积分 …………………………………………………………………… (148)
一　第二型曲线积分概念　　　　二　第二型曲线积分的计算
三　第一型与第二型曲线积分的关系
§3　格林公式·曲线积分与路线无关的条件 ……………………………………………… (158)
一　格林公式　　　　二　曲线积分与路线无关的条件
§4　第二型曲面积分 …………………………………………………………………… (168)
一　曲面的侧　　　　二　第二型曲面积分概念
三　第二型曲面积分的计算　　　　四　第一型与第二型曲面积分的联系
§5　奥高公式与斯托克斯公式 …………………………………………………………… (176)
一　奥高公式　　　　二　斯托克斯公式

第十八章　隐函数定理及其应用

§1　隐函数

一　隐函数的概念

迄今为止，我们讨论的函数大多是用自变量的某个算式来表示．如

一元函数　$y=x^2+1$

二元函数　$y=xy+x^y$

三元函数　$u=x\sin\dfrac{z}{y}+2ye^{xy}$

通常称为显函数。

除此之外，也有些函数是由方程确定的。

设给定一个含两个变量的方程

$$F(x,y)=0$$

若存在一个定义在区间 I 上的一元函数

$$y=f(x)\qquad x\in I$$

它满足方程　$F(x,y)=0$，即使得恒等式

$$F[x,f(x)]\equiv 0,\qquad x\in I$$

成立，则称函数 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**。

例 1　讨论方程　$F(x,y)=xy+y-1=0$

解　从方程可以解出 y，表达成初等函数的形式：

$$y=\frac{1}{1+x},\qquad (x\neq -1,-\infty<y<+\infty)$$

显然有恒等式

$$F(x,y)=x\left(\frac{1}{1+x}\right)+\left(\frac{1}{1+x}\right)-1\equiv 0$$

成立，按照隐函数的定义，方程 $xy+y-1=0$ 确定一个隐函数 $y=\dfrac{1}{1+x}$。

例 2　讨论方程 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$。

解 从方程解出 y_1 及 y_2:

$$y_1=\sqrt{1-x^2}, \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$$
$$y_2=-\sqrt{1-x^2}, \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 0)$$

显然有恒等式

$$F(x,y_1)\equiv 0$$
$$F(x,y_2)\equiv 0$$

成立,按照隐函数的定义,方程 $x^2+y^2-1=0$ 确定两个隐函数 $y_1=\sqrt{1-x^2}$, 和 $y_2=-\sqrt{1-x^2}$。

注 如限制 x 和 y 的变化范围为 $-1\leqslant x\leqslant 1, y>0$,或者再缩小一些,限制在点 $P(0,1)$ 的 $\frac{1}{2}$ 邻域,即 $U=\{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<y<\frac{3}{2}\}$ 内讨论,则方程 $x^2+y^2-1=0$ 只确定一个隐函数 $y=\sqrt{1-x^2}$。

例 3 讨论方程 $F(x,y)=x^2+y^2-c=0 \quad (c\neq 0)$。

解 (1) 当 $c>0$ 时,仿上例 1,2 的方法讨论,原方程确定两个隐函数

$$y_1=\sqrt{c-x^2}, \qquad (-\sqrt{c}\leqslant x\leqslant\sqrt{c},\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{c})$$
$$y_2=-\sqrt{c-x^2}, \qquad (-\sqrt{c}\leqslant x\leqslant\sqrt{c},\ -\sqrt{c}\leqslant y\leqslant 0)$$

(2) 当 $c<0$ 时,因为不论给定 x 为何值,满足方程的任何 y 值都不存在,故原方程不确定任何隐函数。

从几何直观上看,二元函数

$$z=F(x,y)=x^2+y^2-c \qquad (c\neq 0)$$

表示以 $(0,0,-c)$ 为顶点,开口向上的旋转抛物面,当 $c>0$ 时,顶点在 xy 平面下方,此时曲面 $z=x^2+y^2-c \quad (c>0)$ 与平面 $z=0$ 相交,交线就是方程 $x^2+y^2-c=0 \quad (c>0)$,它确定两个隐函数

$$y_1=\sqrt{c-x^2} \qquad (\text{上半园})$$
$$y_2=-\sqrt{c-x^2} \qquad (\text{下半园}).$$

当 $c<0$ 时,顶点在 xy 平面上方,此时曲面 $z=x^2+y^2-c \quad (c<0)$ 与平面 $z=0$ 不相交.即 xy 平面上任何点 (x,y) 都不能使等式 $x^2+y^2-c=0 \quad (c<0)$ 成立,按定义,原方程不确定任何隐函数。

一般地,方程 $F(x,y)=0$ 都可以看成曲面 $z=F(x,y)$ 与平面 $z=0$ 的交线。如果交线存在,这一交线就确定一个或几个函数,它就是方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数。

上面三例,都可以从方程 $F(x,y)=0$ 解出 $y=f(x)$,然后按定义证实隐函数存在。

例 4 讨论方程 $F(x,y)=y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$。

解 上述方程不能解出 $y=f(x)$，我们把它写成

$$x=y-\frac{1}{2}\sin y=\psi(y)$$

即 x 是 y 的函数。

由于 $\frac{dx}{dy}=1-\frac{1}{2}\cos y>0$，故 $\psi(y)$ 是递增函数。

按反函数存在定理，$x=\psi(y)$ 的反函数 $y=f(x)$ 存在，即存在一个函数 $y=f(x)$，使下面的恒等式

$$f(x)-x-\frac{1}{2}\sin[f(x)]\equiv 0$$

成立，于是按照隐函数定义，方程 $y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 确定一个隐函数 $y=f(x)$。

在一般情形下，我们主要关心一个方程 $F(x,y)=0$ 能否确定隐函数以及这个隐函数的连续性和可微性问题，而不计较这个函数能否解得出来。关于这个问题的解决，主要看二元函数 $z=F(x,y)$ 所具有的性质。

二 隐函数定理

定理 1 若

(i) 二元函数 $z=F(x,y)$ 在以 $P(x_0,y_0)$ 为内点的某一个区域 D 内具有连续的偏导数 $F_x(x,y)$ 和 $F_y(x,y)$（本条件蕴含 $F(x,y)$ 在 D 内连续）；

(ii) $F(x_0,y_0)=0$；

(iii) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则

1° 在 P 的某邻域 $U(P)$ 内，方程 $F(x,y)=0$ 唯一地确定一个定义在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内的函数 $y=f(x)$，使得

$$F[x,f(x)]\equiv 0,\qquad x\in U(x_0)$$

且有 $$y_0=f(x_0);$$

2° $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内连续；

3° $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有连续导数，且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

注 本定理的证明方法，常见的有两种。第一种称为几何证法，它是利用函数单调性和根的存在定理来证，具有鲜明的直观性。第二种称为逐次逼近法，它是利用构造一列函数逐次逼近的方法来证，具有较深刻的思想性。下面只讲几何证法。

证 1° 先证存在唯一的函数 $y=f(x)$ 满足本定理的第一个结论。

由条件(iii)，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，不妨设 $F_y(x_0,y_0)>0$，由于 $F_y(x,y)$ 连续，根据二元连续函数保号性，$F_y(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某个方形邻域 $D_1=\{(x,y)\mid |x-x_0|<\beta,|y-y_0|<\beta\}\subset D$ 上也大于 0。

由于 $F_y(x,y)$ 在整个 D_1 上大于 0，因此将 $x=x_0$ 固定，让 y 在 $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ 上变化，这样它也大于 0：

$$F_y(x_0,y)>0 \qquad [y_0-\beta,y_0+\beta].$$

这表明一元函数 $F(x_0,y)$ 在区间 $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ 上严格递增。

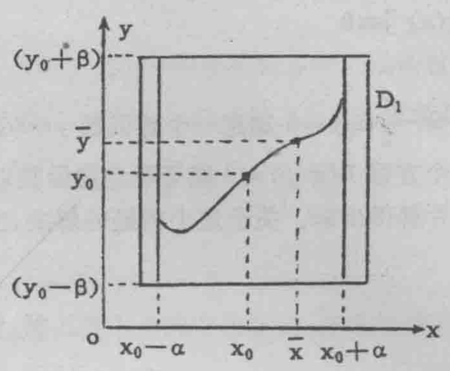


图 18—1

再加上条件(ii)，$F(x_0,y_0)=0$，所以有

$$F(x_0,y_0-\beta)<0 \quad , \quad F(x_0,y_0+\beta)>0. \tag{1}$$

现在固定 $y=y_0-\beta$，让 x 变化，考虑一元连续函数 $F(x,y_0-\beta)$。由于在点 x_0 处 $F(x_0,y_0-\beta)<0$，根据一元连续函数的保号性，$F(x,y_0-\beta)$ 在 x_0 的某个邻域 $(x_0-\eta_1,x_0+\eta_1)$ 内也小于 0：

$$F(x,y_0-\beta)<0.$$

又固定 $y=y_0+\beta$，考虑 $F(x,y_0+\beta)$，与上同理，$F(x,y_0+\beta)$ 也在 x_0 的某个邻域 $(x_0-\eta_2,x_0+\eta_2)$ 内大于 0：

$$F(x,y_0+\beta)>0.$$

取 $\alpha=\min(\eta_1,\eta_2)$，于是在邻域 $U(x_0)=(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内同时有

$$F(x,y_0-\beta)<0, \qquad F(x,y_0+\beta)>0. \tag{2}$$

下证方程 $F(x,y)=0$ 在 $U(x_0)$ 内确定一个隐函数。

任意固定一个 $\bar{x}\in U(x_0)$，由上知

$$F(\bar{x},y_0-\beta)<0, \qquad F(\bar{x},y_0+\beta)>0.$$

上式说明一元连续函数 $F(\bar{x},y)$ 在 $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ 两端异号，由根的存在性定理知道，必定存在一点 $\bar{y}\in(y_0-\beta,y_0+\beta)$，使

$$F(\bar{x},\bar{y})=0. \tag{3}$$

又因 $F_y(\bar{x},y)>0$，从而 $F(\bar{x},y)$ 严格递增，因此，使 $F(\bar{x},\bar{y})=0$ 的 $\bar{y}$ 必定唯一。

由于 $\bar{x}$ 的任意性，这就证明对于区间 $U(x_0)=(x-\alpha,x+\alpha)$ 内任意一点 x，恒有区间 $(y_0-\beta,y_0+\beta)$ 上唯一的一个 y 与之对应，使适合 $F(x,y)=0$；从而 x 和 y 之间确定了函数关系，它可以唯一地表示为

$$y=f(x) \qquad x\in U(x_0)$$

且有恒等式

$$F(x,f(x))\equiv 0 \qquad x\in U(x_0)$$

成立。

比较 $F(x_0,y_0)=0$ 和 $F[x_0,f(x_0)]=0$，可推得 $y_0=f(x_0)$。

2° 证 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内连续

设 x_1 是 $U(x_0)$ 内任意一点，记 $y_1=f(x_1)$

现对任给 $\varepsilon>0$，作两条平行线：

$$y=y_1-\varepsilon, \qquad y=y_1+\varepsilon.$$

仿上式(1)的推证，可得

$$F(x_1,y_1-\varepsilon)<0, \qquad F(x_1,y_1+\varepsilon)>0. \tag{4}$$

又因 $F(x,y)$ 连续，仿上式(2)的推证，一定存在 x_1 的某个邻域 $U(x_1)=(x_1-\delta,x_1+\delta)$，在此邻域内，同时有

$$F(x,y_1-\varepsilon)<0, \qquad F(x,y_1+\varepsilon)>0. \tag{5}$$

设 x 是 $U(x_1)=(x_1-\delta,x_1+\delta)$ 内任意一点，再仿上式(3)的推证，在 $(y_1-\varepsilon,y_1+\varepsilon)$ 内存在唯一一点 y，使

$$F(x,y)=0. \tag{6}$$

上式表明，当 x 落在 x_1 的 δ 邻域内时，对应的 y 就落在 y_1 的 ε 邻域内，即是说：任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $|x-x_1|<\delta$ 时，有 $|y-y_1|<\varepsilon$，按定义，$f(x)$ 在点 x_1 连续。

由于 x_1 是 $U(x_0)$ 内任意一点，故此 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内连续。

3° 证 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有连续导数

设 $x, x+\triangle x$ 是 $U(x_0)$ 内任意两点，记

$$y=f(x), \qquad y+\triangle y=f(x+\triangle x)$$

由隐函数定义可知

$$F(x,y)=0, \qquad F(x+\triangle x, y+\triangle y)=0.$$

利用二元函数中值公式可得

$$\begin{aligned}0&=F(x+\triangle x, y+\triangle y)-F(x,y)\\&=F_x(x+\theta\triangle x, y+\theta\triangle y)\triangle x+F_y(x+\theta\triangle x, y+\theta\triangle y)\triangle y \quad (0<\theta<1)\end{aligned}$$

即
$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=-\frac{F_x(x+\theta\triangle x, y+\theta\triangle y)}{F_y(x+\theta\triangle x, y+\theta\triangle y)}.$$

令 $\triangle x\to 0$，由于 $y=f(x), F_x(x,y), F_y(x,y)$ 的连续性，有

$$\lim_{\triangle x\to 0} F_x(x+\theta\triangle x, y+\theta\triangle y)=F_x(x,y),$$
$$\lim_{\triangle x\to 0} F_y(x+\theta\triangle x, y+\theta\triangle y)=F_y(x,y)\neq 0.$$

所以

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

即 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内可导，并且 $f'(x)$ 在 $U(x_0)$ 内连续。

定理1有以下几点说明：

1) 定理1是一个局部性定理，即是说，对于使 $F_y(x,y)\neq 0$ 的点 $P(x_0,y_0)$，总可以在点 P 的充分小邻域内，由方程 $F(x,y)=0$ 确定唯一的隐函数 $y=f(x)$，但在大范围内，则未必唯一，例如方程

$$F(x,y)=x^2-y^2=0$$

在点 $P(1,1)$ 处有 $F_y(1,1)=(-2y)_{(1,1)}=-2\neq 0$，它在点 P 的邻域 $U(P)=\{(x,y)\,|\,|x-1|<\delta, |y-1|<\delta, \delta<1\}$ 内确定唯一的连续函数

$$y=x \qquad 1-\delta<x<1+\delta$$

并且满足条件 $y|_{x=1}=1$ （图 18－2）
然而若把范围扩大到整个平面，则下面两个连续函数

$$y=x, \qquad -\infty<x<+\infty$$

与 $$y=|x|, \qquad -\infty<x<+\infty$$

都满足方程 $F(x,y)=x^2-y^2=0$ 以及条件 $y|_{x=1}=1$，唯一性遭到破坏。（图 18－3）

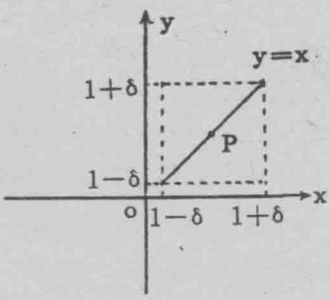


图 18—2

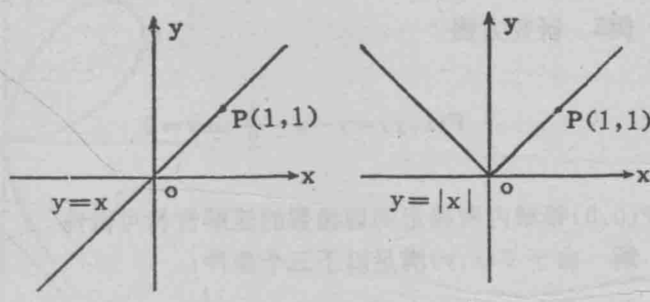


图 18—3

2） 定理1的条件 $F_y(x_0,y_0)\neq0$ 是重要的，没有这个条件，不管把 $P(x_0,y_0)$ 的邻域取得多么小，方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数仍可能不唯一。
例如方程

$$F(x,y)=x^2+y^2-1=0$$

在点 $P(1,0)$ 处，$F_y(1,0)=(2y)|_{(1,0)}=0$，不满足定理1的条件(iii)，由图18－4看出，在点 p 的任何邻域内，总是有两个连续函数

$$y=\sqrt{1-x^2} \qquad \text{（上半园）}$$

与 $$y=-\sqrt{1-x^2} \qquad \text{（下半园）}$$

同时满足方程 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 以及条件 $y|_{x=1}=0$，破坏了唯一性。

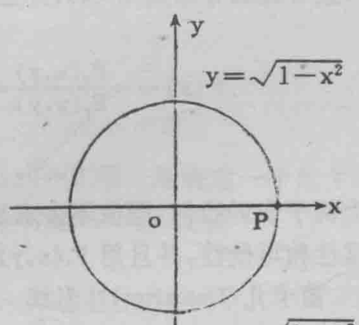


图 18—4

3） $F_y(x_0,y_0)\neq0$ 并非必要条件，例如方程

$$F(x,y)=x-y^3=0$$

在 $P(0,0)$ 处虽有 $F_y(0,0)=0$，但仍然确定唯一的连续函数（且在大范围内）

$$y=x^{\frac{1}{3}} \qquad -\infty<x<+\infty$$

而且满足条件 $y|_{x=0}=0$。

4) 从证明1°、2°的过程可以看到，条件(iii)只是保证 $F(x,y)$ 关于 y 严格递增(或递减)，因此，如果仅仅要求隐函数唯一存在和连续，不要求可微性，则可以把条件减弱为：(i) $F(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内连续； (ii) $F(x_0,y_0)=0$； (iii) 在此邻域内 $F(x,y)$ 关于 y 严格递增(或递减)。

5) 若把定理1的条件 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 改为 $F_x(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 确定 x 为 y 的函数： $x=g(y)$。

例5 研究方程

$$F(x,y)=y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$$

在 $P(0,0)$ 邻域内所确定的隐函数的连续性和可微性。

解 由于 $F(x,y)$ 满足以下三个条件：

(i) $F_x(x,y)=-1$, $F_y(x,y)=1-\frac{1}{2}\cos y$ 在 $P(0,0)$ 邻域内连续；

(ii) $F(0,0)=0$；

(iii) $F_y(0,0)=\frac{1}{2}>0$

由定理1知方程 $F(x,y)=y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 唯一地确定一个定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $y=f(x)$，且有连续导函数 $f'(x)$，并且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}=\frac{2}{2-\cos y}$$

这个例子告诉我们，即使不去求出隐函数 $y=f(x)$ 的显式表达式，我们仍能利用所给方程确定它的连续性和可微性，并且用 $F_x(x,y)$ 和 $F_y(x,y)$ 把 $f'(x)$ 表达出来。

例6 笛卡儿(Descartes)叶形线

$$x^3+y^3-3axy=0$$

在哪些点的邻域内能确定唯一有连续导数的隐函数 $y=f(x)$？

解 令 $F(x,y)=x^3+y^3-3axy$，

显然 $F_x(x,y)=3x^2-3ay$, $F_y(x,y)=3y^2-3ax$ 连续。

1° 在 $F_y(x,y)=3y^2-3ax\neq 0$ 的点 (x,y) 附近，方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 都能确定唯一有连续导数的隐函数 $y=f(x)$，并可用下面公式把 $f'(x)$ 算出来：

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{3x^2-3ay}{3y^2-3ax}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

2° 在曲线 $x^3+y^3-3axy=0$ 上，使 $F_y(x,y)=0$ 的点可由下面方程组解出：

$$\begin{cases} x^3+y^3-3axy=0, \\ F_y(x,y)=3y^2-3ax=0. \end{cases}$$

求出两点：$O(0,0)$ 以及 $B(\sqrt[3]{4}a,\sqrt[3]{2}a)$，在这两点的任何邻域内，每一个 x 对应的 y 值不唯一，所以方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 在这两点不能确定隐函数 $y=f(x)$（图18—5）。

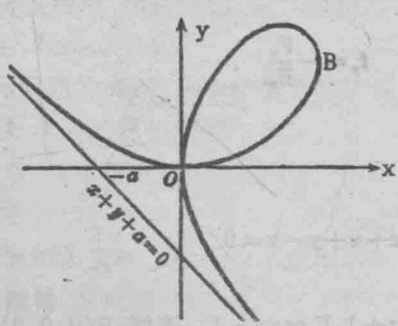


图 18—5

前面介绍的隐函数定理，可以推广到含有多个变量的方程上面去。

定理 2 若

(i) 函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$ 在以 $P(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)$ 为内点的 $n+1$ 维空间区域 D 内具有连续的偏导数 $F_{x_1},F_{x_2},\cdots,F_{x_n},F_y$；

(ii) $F(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)=0$；

(iii) $F_y(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)\neq 0$.

则

1° 在点 P 的某一邻域 U(P)（n+1 维）内，方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 唯一地确定一个定义在点 $Q(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的某一邻域 U(Q)（n 维）内的 n 元连续函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得

$$F[x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n)]\equiv 0,\qquad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U(Q)$$

且有 $$y^0=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0);$$

2° $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 U(Q) 内具有连续的偏导数：$f_{x_1},f_{x_2},\cdots,f_{x_n}$，而且

$$f_{x_1}=-\frac{F_{x_1}}{F_y},\quad f_{x_2}=-\frac{F_{x_2}}{F_y},\cdots,f_{x_n}=-\frac{F_{x_n}}{F_y}.$$

特别地，对于三个变量的方程

$$F(x,y,z)=0.$$

在满足相应的条件后，可推得

1° 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域 $U(P)$ 内，方程 $F(x,y,z)=0$ 唯一地确定一个定义在点 $Q(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $U(Q)$ 内的二元连续函数 $z=f(x,y)$，使得

$$F[x,y,f(x,y)]\equiv 0 \qquad (x,y)\in U(Q)$$

且有 $z_0=f(x_0,y_0)$；

2° $z=f(x,y)$ 在 $U(Q)$ 内有连续偏导数 f_x,f_y，而且

$$f_x=-\frac{F_x}{F_z}, \qquad f_y=-\frac{F_y}{F_z}.$$

例 7 讨论方程

$$F(x,y,z)=xyz+x+y-z=0$$

解 因为 $F_x=yz+1,F_y=xz+1,F_z=xy-1$ 连续；$F(0,0,0)=0$； $F_z(0,0,0)=-1\neq 0$ 所以方程 $F(x,y,z)=0$ 唯一确定一个定义在点 $Q(0,0)$ 的某一邻域 $U(Q)$ 内的二元连续函数 $z=f(x,y)$ 且有连续偏导数

$$f_x=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1+yz}{1-xy}, \qquad f_y=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1+xz}{1-xy}$$

注意 若已知原方程确实存在连续可微的隐函数，则其导数或偏导数也可直接应用复合函数微分法得到，以方程 $F(x,y,z)=0$ 为例说明。

设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的连续可微隐函数，按定义有：

$$F[x,y,f(x,y)]=0.$$

两端分别求 x 或 y 的偏导数，由复合函数微分法得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0. \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

因假设 $F_z\neq 0$，于是有

$$f_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \qquad f_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

与定理结果相同。

用此法再计算一次例 7 的偏导数：

在方程 $$xyz+x+y-z=0$$

两端分别求 x 或 y 的偏导数，得

$$yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}+1-\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}+1-\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

整理后得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+yz}{1-xy},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1+xz}{1-xy}.$$

与利用公式计算的结果相同。

例 8 设 $F(xz,yz)=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解 令 $u=xz,v=yz$，则得

$$F(u,v)=0.$$

用复合函数微分法，两端对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

注意到 z 是 x,y 的函数，故此

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z+x\frac{\partial z}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial x}.$$

记 $$\frac{\partial F}{\partial u}=F_1,\qquad \frac{\partial F}{\partial v}=F_2.$$

于是有 $$F_1\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2\cdot y\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

整理得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{zF_1}{xF_1+yF_2}.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$再对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF_1+yF_2)^2}\Big\{(xF_1+yF_2)\Big[F_1\frac{\partial z}{\partial x}+z\Big(F_{11}\Big(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\Big)+F_{12}y\frac{\partial z}{\partial x}\Big)\Big]$$

$$-\Big[F_1+x\Big(F_{11}\Big(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\Big)+F_{12}y\frac{\partial z}{\partial x}\Big)+y\Big(F_{12}\Big(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\Big)+F_{22}y\frac{\partial z}{\partial x}\Big)\Big]zF_1\Big\},$$

其中 $F_{11}=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$， $F_{12}=\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}$， $F_{22}=\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$.

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 代入化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF_1+yF_2)^3}\{y^2z^2(F_1^2F_{22}-2F_1F_2F_{22}+F_2^2F_{11})-2zF_1^2(xF_1+yF_2)\}$$

例 9　方程　$xy+z\ln y+e^{xz}=1$ 在点 $P(0,1,1)$的某个邻域内能否确定出哪一个变量是其余两个变量的函数？

解　设　$F(x,y,z)=xy+z\ln y+e^{xz}-1$,

则　$F_x=y+ze^{xz}$，　$F_y=x+\frac{z}{y}$，　$F_z=\ln y+xe^{xz}$　连续，且 $F(0,1,1)=0$，　$F_x(0,1,1)=2$，　$F_y(0,1,1)=1$，　$F_z(0,1,1)=0$。所以在 $P(0,1,1)$的某个邻域内，可以确定 x 为变量 y,z 的函数 $x=f(y,z)$。也可以确定 y 为变量 x,z 的函数 $y=g(x,z)$。

例 10　用隐函数定理研究反函数的存在性，并求反函数的导数。

设　(i)　$y=f(x)$在 x_0 某邻域 $U(x_0)$内有连续导数 $f'(x)$；

(ii)　$f(x_0)=y_0$；

(iii)　$f'(x_0)\neq 0$.

则　$y=f(x)$在 y_0 的某邻域 $U(y_0)$内有反函数 $x=g(y)$存在，且有

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

证　考虑方程 $F(x,y)=y-f(x)=0$。

由所给条件容易推出 $F(x,y)$满足定理 1 所有条件：

(i)　$F_x=-f'(x)$，$F_y=1$ 连续；

(ii)　$F(x_0,y_0)=y_0-f(x_0)=0$；

(iii)　$F_x(x_0,y_0)=-f'(x_0)\neq 0$.

于是方程　$F(x,y)=0$ 确定 x 为 y 的函数 $x=g(y)$，其导数是

$$g'(y)=-\frac{F_y}{F_x}=-\frac{1}{-f'(x)}=\frac{1}{f'(x)},$$

$x=g(y)$就是 $y=f(x)$的反函数。

§1　习　题

1.　方程 $\cos x+\sin y=e^{xy}$能否在原点的某邻域内确定隐函数 $y=f(x)$或 $x=g(y)$？

2. 方程 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z=9$ 在点$(1,-2,1)$的某邻域内能否确定出其中一个变量是另外两个变量的函数？

3. 求下列方程确定的函数的导数或偏导数：

(1) $x^2y+3x^4y^3-4=0$， 求 $\frac{dy}{dx}$；

(2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$， 求 $\frac{dy}{dx}$；

(3) $e^{-xy}-2z+e^z=0$， 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$；

(4) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z=5$， 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$；

(5) $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$，求 z 对 x，y 的一阶与二阶偏导数；

(6) $F(x,x+y,x+y+z)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；

(7) $z=f(x+y+z,xyz)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$.

4. 求微分：

(1) $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$， 求 dz，d^2z；

(2) $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$， 求 d^2z.

5. 设 f 是一元函数，问应对 f 提出什么条件，方程

$$2f(xy)=f(x)+f(y)$$

在点(1,1)的邻域内就能确定出唯一的 y 为 x 的函数？

§2 隐函数组

一 隐函数组的概念

本节讨论由方程组确定隐函数组的问题。

给定两个含四个变量的方程，它们组成如下方程组：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \tag{1}$$

若存在定义在平面区域 D 上的两个二元函数

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases} \quad (x,y)\in D \tag{2}$$

它们满足方程组(1)，即有恒等式

$$\begin{cases} F[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0 \\ G[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0 \end{cases}$$

成立，则称(2)是由方程组(1)确定的隐函数组。

二　隐函数组定理

究竟方程组(1)需要具备哪些条件，才能确定其中两个变量是其余两个变量的连续、可微函数，请看下面定理。

定理3　若

(i)　四元函数 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 在以 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 为内点的四维区域 W 内具有对各个变量的连续偏导数；

(ii)　$F(P)=0$，　$G(P)=0$；

(iii)　在 P 点处函数行列式

$$\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}_P \neq 0. \tag{3}$$

则

1°　在 P 的某邻域 U(P) 内，方程组(1)唯一地确定一个定义在点 $Q(x_0,y_0)$ 的某邻域 U(Q) 内的二元隐函数组

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

使得

$$\begin{cases} F[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0 \\ G[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0 \end{cases} \qquad (x,y)\in U(Q)$$

且有　　$u_0=u(x_0,y_0)$，　$v_0=v(x_0,y_0)$；

2°　$u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 U(Q) 内连续；

3°　$u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 U(Q) 内具有连续偏导数。

证　利用一个方程的隐函数定理证明

因为

$$\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}_P \neq 0.$$

故　F_u，F_v 中至少有一个在 P 点不为 0，不妨设 $F_v|_P\neq 0$. 于是由隐函数定理，方程

$$F(x,y,u,v)=0$$