北大燕园

李正元·李永乐考研数学

2015

# 数学

数学二

# 全真模拟经典400题

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐

中国政法大学出版社

北大燕园

2015年李正元·李永乐考研数学

# 数学全真模拟经典400题

## 数学二

主　编　北　京　大　学　李正元
　　　　清　华　大　学　李永乐





中国政法大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

2015年李正元·李永乐考研数学．数学全真模拟经典400题．数学二/李正元，李永乐主编．—北京：中国政法大学出版社，2014.6
ISBN 978-7-5620-5481-8

Ⅰ.①2…　Ⅱ.①李…　②李…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第131426号

---

| | |
|---|---|
| 出版者 | 中国政法大学出版社 |
| 地　址 | 北京市海淀区西土城路25号 |
| 邮寄地址 | 北京100088信箱8034分箱　邮编100088 |
| 网　址 | http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社） |
| 电　话 | (010)58908285(总编室)　58908433(编辑部)　58908334(邮购部) |
| 承　印 | 北京旺都印务有限公司 |
| 开　本 | 787mm×1092mm　1/16 |
| 印　张 | 11.25 |
| 字　数 | 245千字 |
| 版　次 | 2014年6月第1版 |
| 印　次 | 2014年6月第1次印刷 |
| 定　价 | 23.80元 |

# 前　言

本套书（**李正元·李永乐考研数学系列——《数学复习全书》、《数学历年试题解析》及《数学全真模拟经典400题》**等）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本套书在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性、前瞻性”，“较适合考生的需要”，我们深感欣慰。**《2015年考研数学全真模拟经典400题》**根据考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

《经典400题》特点：

**1. 每题均全新优化设计，综合性强**

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计了10套模拟试题。在内容设计上，每道题均涉及两个或两个以上知识点，这些题涵盖新大纲大部分重要考查知识点。通过这10套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

**2. 注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细**

我们在设计这10套试题时，无论是选择题、填空题，还是解答题（包括证明题），每道题设有：①分析——该题的解题思路和方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项、涉及的重要结论。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据考研数学大纲为2015年考研读者全新优化设计的一本全真模拟训练套题，本书中的试题难度略高于2014年考研试题，解答题（包括证明题）体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；选择题与填空题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第三阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析与解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

**特别提醒考生注意：**

（1）本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学，考研辅导经验丰富，并且是各自领域的专家学者，具有足够的专业素养。更重要的是，本书编撰者认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求，归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律，尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。

（2）为了提高考生数学分析和解决问题的能力，本书所编题目难度较大，有的题目涉及3个以上的考点，综合运用性比较高，概念运用性较强，如果考生在做本书试题感到棘手时，请不要着急，更不能泄气，应静下心来，仔细分析题目所考查的是哪些知识点，回忆《数学复习全书》所介绍的解题方法，然后再动手做题。

因此，我们希望考生认真对待本书中每道题，一定要动手做题，不要一看了事，建议考生对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在2015年考研数学考试中，您肯定会感到有些题“似曾相识”、甚至“一见如故”。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如人意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

编者

2014年6月

# 目　　录

# 模拟试卷　卷(一)

**一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．**

(1)　当 $n\to\infty$ 时数列 $1-\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n$ 是 $\frac{1}{n}$ 的

(A)　同阶非等价无穷小．　　(B)　等价无穷小．

(C)　高阶无穷小．　　(D)　低阶无穷小．

(2)　设 $f'(1)=a$，则数列极限 $I=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=$ ______．

(A)　$0$．　　(B)　$a$．　　(C)　$2a$．　　(D)　$\frac{1}{2}a$．

(3)　设 $g(x)$ 可微，$f(x)=\ln^2(1+g(x))+2\ln(1+g(x))$，$f'(1)=1$，$g'(1)=\frac{1}{2}$，则 $g(1)=$

(A)　$1$．　　(B)　$0$．　　(C)　$2$．　　(D)　$-\frac{1}{2}$．

(4)　设 $P(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且以 $T$ 为周期，则 $\int_0^T P(x)\mathrm{d}x=0$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{$*$}$$

有解 $y=y(x)\neq 0$ 且以 $T$ 为周期的

(A)　必要非充分条件．　　(B)　充分非必要条件．

(C)　充分且必要条件．　　(D)　既不充分也不必要条件．

(5)　设 $f(x)$，$g(x)$ 均有二阶连续导数且满足 $f(0)>0$，$f'(0)=0$，$g(0)=0$，则函数 $u(x,y)=f(x)\int_1^y g(t)\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处取极小值的一个充分条件是

(A)　$f''(0)>0$，$g'(x)<0(0\leqslant x\leqslant 1)$．　　(B)　$f''(0)<0$，$g'(x)>0(0\leqslant x\leqslant 1)$．

(C)　$f''(0)>0$，$g'(x)>0(0\leqslant x\leqslant 1)$．　　(D)　$f''(0)<0$，$g'(x)<0(0\leqslant x\leqslant 1)$．

(6)　设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$，则

(A)　$I_2>1>I_1$．　　(B)　$I_2>I_1>1$．

(C)　$1>I_2>I_1$．　　(D)　$1>I_1>I_2$．

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,且方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解,则

(A) 当 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解时,必有 $m = n$.

(B) 当 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解时,必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$.

(C) 当 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解时,必有 $m < n$.

(D) 当 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解时,必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < m$.

(8) 下列矩阵中不能相似对角化的是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

## 二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 数列极限 $I = \lim\limits_{n \to \infty} \left[ \dfrac{4}{\pi} \arctan \dfrac{n+1}{n} \right]^n =$ ________.

(10) 曲线 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t$ 的全长 = ________.

(11) 微分方程 $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ 的通解是________.

(12) 积分 $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x =$ ________.

(13) 累次积分 $I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} x \mathrm{d}x =$ ________.

(14) 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^4$,则 $\boldsymbol{A}^{-1} =$ ________.

## 三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 设 $\alpha \geqslant 5$ 为常数,$m$ 为何值时极限

$$I = \lim_{x \to +\infty} [(x^\alpha + 8x^4 + 2)^m - x]$$

存在并求此极限值.

(16) 设函数 $y = y(x)(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) = t - \sin t \\ y = \psi(t) = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 确定,它在$[0, 2\pi]$ 连续,$(0,2\pi)$ 可导.

(Ⅰ) 求 $y = y(x)$ 的单调性区间与凹凸性区间.

(Ⅱ) 设该参数方程确定的曲线 $L$ 的形心为$(\bar{x},\bar{y})$,求 $\bar{y}$.

(17) 设曲线 $y = y(x)$ 上任意一点的切线在 $y$ 轴上的截距与法线在 $x$ 轴上的截距之比为 3,求 $y(x)$.

(18) 设 $F(u,v)$ 有连续的偏导数,$a,b,c$ 为常数,$F'_u, f'_v$不同时为零,方程 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right) = 0$ 确定隐函数 $z = z(x,y)$,求$(x-a)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y-b)\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\mathrm{d}z$.

(19) (Ⅰ)设有一块平板竖放在比重为$\rho$的液体中,选择位于液体表面的某点为原点$O$,沿铅直线向下方向为$Ox$轴正方向,深度为$x$的地方平板宽度为$f(x)$,平板浸入液体的最小深度和最大深度分别为$a$和$b$,试用微元法导出整块平板所受的液体的侧压力的积分表达式.

(Ⅱ)有一椭圆形薄板,长半轴为$a$,短半轴为$b$,薄板垂直立于液体中,而其短轴与液面相齐,液体的比重为$\rho$,求薄板所受的侧压力。

(20) 求二重积分:

(Ⅰ)$J = \iint\limits_D x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant x, x^2 + y^2 \geqslant 2x\}$

(Ⅱ)$J = \iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant ax\}$,$a > 0$为常数.

(21) (Ⅰ)设$f(x)$在$(0, +\infty)$可导,$f'(x) > 0(x \in (0, +\infty))$,求证$f(x)$在$(0, +\infty)$单调上升.

(Ⅱ)求证:$f(x) = (n^x + 1)^{-\frac{1}{x}}$在$(0, +\infty)$单调上升,其中$n$为正数.

(Ⅲ)设数列$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (n^k + 1)^{-\frac{1}{k}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(22) **(本题满分 11 分)**

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,a,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,17,-1,7)^{\mathrm{T}}$,

(Ⅰ) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,求 $a$ 的值;

(Ⅱ) 当 $a=3$ 时,求与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$;

(Ⅲ) 当 $a=3$ 时,证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可表示任一个 4 维列向量.

(23) **(本题满分 11 分)**

已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量,满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=4\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(Ⅱ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量;

(Ⅲ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}^*-6\boldsymbol{E}$ 的秩.

# 模拟试卷　卷(二)

**一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.**

(1)　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

(A)　可去间断点.　　(B)　跳跃间断点.

(C)　第二类间断点.　　(D)　连续点.

(2)　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n x^n+x^{2n}}$ 在区间 $(0,4)$ 内某点 $a$ 处的导数 $f'(a)$ 不存在,则必有

(A)　$a=\dfrac{1}{2}$.　　(B)　$a=1$.　　(C)　$a=2$.　　(D)　$a=3$.

(3)　曲线 $y=\dfrac{e^x}{1+x}$ 与 $y=e^x$ 在其交点处的切线的夹角 $\theta=$ ______.

(A)　$\dfrac{\pi}{3}$.　　(B)　$\dfrac{\pi}{4}$.　　(C)　$\dfrac{\pi}{6}$.　　(D)　$\dfrac{\pi}{2}$.

(4)　反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\cdot e^{|x|}\,dx$

(A)　收敛,且取值为零.　　(B)　收敛,且取正值.

(C)　发散.　　(D)　收敛,且取负值.

(5)　设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数且 $f(x,y)(y\,dx+x\,dy)$ 为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分,则下列等式成立的是

(A)　$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$.　　(B)　$x\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(C)　$-x\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.　　(D)　$x\dfrac{\partial f}{\partial y}=y\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

(6)　以 $y_1=e^x\cos 2x$, $y_2=e^x\sin 2x$ 与 $y_3=e^{-x}$ 为线性无关特解的三阶常系数齐次线性微分方程是

(A)　$y'''+y''+3y'+5y=0$.　　(B)　$y'''-y''+3y'+5y=0$.

(C)　$y'''+y''-3y'+5y=0$.　　(D)　$y'''-y''-3y'+5y=0$.

(7)　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是 $n$ 阶矩阵,并满足 $\boldsymbol{ABAC}=\boldsymbol{E}$,则下列结论中不正确的是

(A)　$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{E}$.　　(B)　$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{CAB}$.

(C)　$\boldsymbol{BA}^2\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$.　　(D)　$\boldsymbol{ACAB}=\boldsymbol{CABA}$.

(8) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}$,则下列矩阵中与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价、合同但不相似的是

(A) $\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

## 二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 微分方程 $(3y-2x)\mathrm{d}y=y\mathrm{d}x$ 的通解是________.

(10) 曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的斜渐近线方程为________.

(11) 设 $y=f(x)$ 二阶可导, $f'(x)\neq 0$,它的反函数是 $x=\varphi(y)$,又 $f(0)=1$, $f'(0)=\sqrt{3}$, $f''(0)=-1$,则 $\dfrac{|\varphi''(1)|}{[1+\varphi'^2(1)]^{3/2}}=$________.

(12) 设曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\ln\tan\dfrac{t}{2}+\cos t,\end{cases}$ 则对应于 $t\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的曲线段的弧长 $s=$________.

(13) 设动点 $P(x,y)$ 在曲线 $9y=4x^2$ 上运动,且坐标轴的单位长是 1cm. 如果 $P$ 点横坐标的速率是 30cm/s,则当 $P$ 点经过点(3,4) 时,从原点到 $P$ 点间距离 $r$ 的变化率是________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&a\\1&a&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非零矩阵,满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$,则矩阵 $\boldsymbol{B}=$________.

## 三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) **(本题满分 10 分)**

设 $x>0$ 时, $F(x)=\int_1^x f\left(\dfrac{t}{x}\right)\mathrm{d}t-\int_1^x f\left(\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$,其中函数 $f(x)$ 在区间$(0,+\infty)$上连续且单调增加. 试证: $F(x)$ 在$(0,+\infty)$也单调增加.

(16) **(本题满分 10 分)**

(Ⅰ)求不定积分 $J=\int \frac{dx}{\sin^3 x}$,

(Ⅱ)设心脏线的极坐标方程为 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$,求它绕极轴旋转一周所产生的旋转体的侧面积 $A$.

(17) **(本题满分 10 分)**

(Ⅰ)设 $f(x)=4x^3+3x^2-6x$ 求 $f(x)$ 的极值点;

(Ⅱ)设有 $x=\int_0^y e^{-t^2}dt$,它的反函数是 $y=y(x)$,求 $y=y(x)$ 的拐点.

(18) **(本题满分 10 分)**

设半径为 1 的球正好有一半沉入水中,球的比重为 1,现将球从水中取出,要做多少功?(假设在球从水中取出的过程中水面的高度不变.)

(19) 设 $u = u(x,t)$ 有二阶连续导数,并满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

其中 $a > 0$ 为常数.

(Ⅰ) 作自变量替换 $\xi = x - at, \eta = x + at$,导出 $u$ 作为 $\xi,\eta$ 的函数的二阶偏导数所满足的方程.

(Ⅱ) 求 $u(x,t)$.

(20) **(本题满分 10 分)**

计算二重积分 $I = \iint\limits_D \left| \frac{1}{4} - \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(y - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \right| \mathrm{d}\sigma$,其中积分区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

(21) **(本题满分 10 分)**

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内二次可导,且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M = 2$,最小值 $m = 0$,求证:若 $f(x)$ 的最大值点或最小值点至少有一个是区间 $(0,1)$ 内的点,则在 $(0,1)$ 内必存在两点 $\xi$ 与 $\eta$,使得 $|f'(\xi)| > 2$, $|f''(\eta)| > 4$ 成立.

(22) **(本题满分 11 分)**

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶反对称矩阵,

(Ⅰ) 证明:$\boldsymbol{A}$ 可逆的必要条件是 $n$ 为偶数;当 $n$ 为奇数时,$\boldsymbol{A}^*$ 是对称矩阵;

(Ⅱ) 举一个 4 阶不可逆的反对称矩阵的例子;

(Ⅲ) 证明:如果 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,那么 $-\lambda$ 也必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(23) **(本题满分 11 分)**

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -a\\ 2 & a & -2\\ -a & -1 & 1\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量,并指出 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化的条件.

# 模拟试卷　卷(三)

**一、选择题**:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)　下列函数

① $f(x) = \cos x^{\frac{2}{3}}$;　　② $f(x) = \sin x^{\frac{2}{3}}$;

③ $f(x) = (1-\cos x)^{\frac{2}{3}}$;　　④ $f(x) = (\sin x^2)^{\frac{1}{3}}$,

中在点 $x = 0$ 处可导的是

(A) ①,②.　　(B) ②,③.　　(C) ③,④.　　(D) ①,③.

(2)　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内二阶可导且 $f''(x) > 0$,则 $\forall x > 0, h_1 > 0, h_2 > 0$,有

(A) $\dfrac{f(x)-f(x-h_1)}{h_1} > f'(x) > \dfrac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}$.

(B) $\dfrac{f(x)-f(x-h_1)}{h_1} < f'(x) < \dfrac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}$.

(C) $f'(x) < \dfrac{f(x)-f(x-h_1)}{h_1} < \dfrac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}$.

(D) $f'(x) > \dfrac{f(x)-f(x-h_1)}{h_1} > \dfrac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}$.

(3)　设 $f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$, $g(x)$ 在 $x = 0$ 连续且满足 $g(x) = 1 + 2x + o(x)\,(x \to 0)$. 又 $F(x) = f[g(x)]$,则 $F'(0) =$

(A) 4e.　　(B) 4.　　(C) 2.　　(D) 2e.

(4)　设 $f(x) = \begin{cases} \pi\cos\pi x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x-1, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t)dt$,则 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上

(A) 有界,不可积.　　(B) 可积,有间断点.

(C) 连续,有不可导点.　　(D) 可导.

(5)　设函数 $F(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 某邻域有连续的二阶偏导数,且 $F(x_0,y_0) = F'_x(x_0,y_0) = 0$, $F'_y(x_0,y_0) > 0$, $F''_{xx}(x_0,y_0) < 0$. 由方程 $F(x,y) = 0$ 在 $x_0$ 的某邻域确定的隐函数 $y = y(x)$,它有连续的二阶导数,且 $y(x_0) = y_0$,则

(A) $y(x)$ 以 $x = x_0$ 为极大值点.　　(B) $y(x)$ 以 $x = x_0$ 为极小值点.

(C) $y(x)$ 在 $x = x_0$ 不取极值.　　(D) $(x_0, y(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(6)　设 $I_i = \iint\limits_{D_i} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma, i = 1,2,3$,其中 $D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$,

$D_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 2R^2\}$,　$D_3 = \{(x,y) \mid |x| \leqslant R, |y| \leqslant R\}$,