大专
理科
教材

中学数学研究和教学法

初等代数

Chudeng Daishu

河南教育出版社

大专理科教材

初等数学研究与教学法

初 等 代 数

河南省高等学校教材编写组编

河 南 教 育 出 版 社

大专理科教材

初等数学研究与教学法

初 等 代 数

河南省高等学校教材编写组编

责任编辑　张国旺

河 南 教 育 出 版 社 出 版

河南第一新华印刷厂印刷

河 南 省 新 华 书 店 发 行

850×1168毫米32开本13.625印张 335 千字

1987年 5 月第 1 版　1987年5月第 1 次印刷

印数 1 — 5,040册

统一书号7356·348　定价2.55元

前　言

“初等数学研究与教学法”是高师院校数学系（科）的一门重要专业课。它是在学生掌握了一定的高等数学理论知识的基础上，继“心理学”、“教育学”之后而开设的。通过教学使学生掌握中学数学教学所必需的初等数学的基础知识、基本技能以及数学思想和方法；并具有分析和处理中学数学教材、掌握教学规律、采用相应教学法的能力。

本课程包括“初等数学研究”和“中学数学教学法”两部分。而各校近年来在选用教材时，除其第二部分多数采用同一版本（指“十三院校协编组”编出的“中学数学教材教法‘总论’”），标准基本一致外，对其第一部分却取材不一，要求也很不相同。根据这一情况，我们特参照部颁师范专科学校试用教学大纲，又充分考虑到师范本科教学的需要，编出本课程中第一部分“初等数学研究”的试用教材。为了便于配套使用，仍沿用“初等数学研究与教学法”这一整体名称，而在其下注明“初等代数”或“初等几何”部分，谨在此说明。本书可供高师院校数学系（科）教学用，也可作为中学数学教师的参考书。

本书立足于中学教材，从中学教学的需要出发，把初等数学的一些基本问题分别组成若干专题，并综合为“初等代数（包括初等函数）”和“初等几何（包括制图基本知识）”。力求做到：在内容上适当延伸和充实；在理论、观点和方法上予以提高。特别注意培养学生分析问题和解决问题的能力。且为了适应教学的不同需要，还编入一些选学内容（书中用号米标出）。

本书的编写工作是在河南省教育委员会的直接领导、组织下，和河南教育出版社的大力支持下完成的.这本教材是集体的创作，集中了各方面的智慧。编写时曾广泛征求了一些教师们的意见；初稿形成后又分别在开封师专、南阳师专等校试用；并通过反复修订最后成书。

本书分两册出版，其中，“初等代数”由河南师大李新田、杨志青、许昌师专宋芳启、开封师专吴松远、南阳师专蒋达基等同志执笔；“初等几何”由河南师大郭绶青、黄其俸、南阳师专张广新等同志执笔。并分别由宋芳启、郭绶青两同志进行了整理、统编。最后，由主编杨志青同志作统一审定。

由于时间仓促，书中难免存在缺点和错误，请读者批评指正。

编　者

1985.10

目　　录

绪论 ……………………………………………………（1）

一　关于代数的几个历史观点 ……………………（1）

二　作为教学科目的中学代数 ……………………（4）

第一章　数 ……………………………………………（7）

一　数系的扩展 ……………………………………（7）

二　整数的整除性 …………………………………（56）

三　近似计算初步 …………………………………（95）

第二章　式 ……………………………………………（113）

一　一般概念 ………………………………………（113）

二　多项式 …………………………………………（117）

三　分式 ……………………………………………（145）

四　根式 ……………………………………………（162）

五　指数式与对数式 ………………………………（173）

六　三角式与反三角式 ……………………………（184）

第三章　初等函数 ……………………………………（196）

一　函数概念 ………………………………………（196）

二　基本初等函数 …………………………………（203）

三　初等函数及其分类 ……………………………（230）

四　初等函数的性质 ………………………………（237）

五　初等函数图象的作法 …………………………（269）

第四章　方程 …………………………………………（279）

一　一般概念 ………………………………………（279）

二　方程的同解性 ……………………………………（282）
三　几种特殊类型的方程的解法 ………………………（294）
四　方程组的同解性 …………………………………（338）
五　方程组的解法 ……………………………………（353）
第五章　不等式 ……………………………………………（367）
一　不等式的基本概念和性质 …………………………（367）
二　不等式的证明 ……………………………………（369）
三　解不等式 …………………………………………（381）
四　不等式的应用 ……………………………………（413）

主要参考书 ……………………………………………（427）

绪　论

一　关于代数的几个历史观点

代数学是数学的一个重要的基础的分支，它经历了漫长而逐步演变的过程．现在我们所用的“代数学”这个名词是Algebra的语源，出于阿拉伯数学家阿里－赫瓦里斯米（Al.Khowarizmi.公元830年左右）所著的阿拉伯文的最古的代数学书里．早在这以前，人们已在计算和测量实践中，逐渐形成了数和图形的概念．并且为了解决实际问题，以经验为基础，规定了一些法则，使得算术和几何分别建立起来．对于算术来说，它仅用于数的计算．到了十六世纪，在欧洲的文艺复兴时期，文化有了惊人的发展，对数学的要求同样有所增强，原有的算术内容和它的实际应用就显得十分狭隘．于是，从法国的韦达（Franciscus，公元1540—1603年）开始，划时代地提出了用字母来代替数的做法．他通常在正数的情况下，用辅音字母表示已知量，用元音字母表示未知量．又为了找出一种求解各种代数方程的通用方法，把方程变成带有字母系数的最普遍的形式．他在代数中系统地引入字母符号之后，称一般的代数方程所表示的为“类的计算术”，用以区别“数的计算术”．并以此作为代数与算术的分界线．由于使用了以字母代替数的方法，便能运用自如地处理计算和代数式，大大提高了思考的效率和正确性．韦达的功绩是难以衡量的，所以后世把他称做“代数学之父”．事实告诉我们：代数学实际是从算术中溢出而逐渐形成的，是对算术的深化与变革，是从具体的数字计算到抽象的文字及文字表达式的计算的飞跃．当时，人们把

代数学看成是关于字母的运算、由字母表示的公式的变换，以及解代数方程一类的科学。这种观点一直被持续到十八世纪后期。

随着社会生产力的进一步发展，数学所研究的对象大大增加了，而且对数量关系一般都被归结到求解代数方程的问题上，从而代数方程的解法，当时竟被人认为是代数学的中心问题。不少人从已发现的四次代数方程的一般解法中，进一步注意到五次以上的代数方程的解法。更典型的是提出了研究关于一元 n 次代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的复杂的理论。在这一时期里，因为以研究代数方程的理论为中心，所以当时的代数学被人理解为研究方程理论的科学，或简称它是方程的科学。反映这种观点的代表作是十九世纪中叶谢尔(Issai Schur 1875—1941年)的两卷代数学，他把代数学定义为代数方程的理论。

在此之后，由于科学技术和社会经济上的需要，有待计算的数量关系已经突破了用文字代表数的运算的传统阶段，而逐渐涉及其它许许多多的十分广泛的对象。代数学的研究内容以及研究方法发生了巨大的变革，从原来以研究代数方程的理论为中心，转变到定义在任意性质的元素集上的代数运算和关系作为研究的基本对象。同时，因受到公理化思潮的影响，凡能成为一个系统的科学的基础的内容，都有意识地进行整理，并把它严密化和抽象化。代数方面则遵循了不同的公理系统，形成了不同的代数结构，从此代数学起了质的变化。所谓近世代数或抽象代数便应运而产生。当时人们把代数学理解为就是研究各种代数结构的科学。这种观点在十九世纪后半期已经形成，而在二十世纪开头几十年中仍然在继续着，并不断强化着。它似乎又回到韦达时代的代数学是字母计算学的观点，但是实际上已经上升到更高级的形态，看过1930—1931年出版的 Van der waerden 的两册《近

世代数学》，将有助于对这一观点的理解。

当然，代数学被抽去对象的具体特性和内容，一点也不表明它和现实是脱离的。恰恰相反，由于抽去了具体内容而具有许许多多抽象结构，利用这些结构研究现实情况中的各种各样的具体现象，却是十分经济的。事实上，它们与最新的应用数学互相渗透，有着密切的联系。例如，群、环、域，或布尔代数等等许多有实践意义的重要结构，在几何学、结晶学、电路设计、编码等现代科学技术领域中都有广泛的应用。

我们在上面是从不同的历史时期，系统地分别介绍了关于代数的几个不同观点。此外，也不难发现对于代数的理解，在一定历史条件下，唯物主义和唯心主义两种不同观点间的斗争不仅存在而且十分尖锐。表现在：代数所反映的是现实世界的规律和过程？还是把它看作人的思维的产物？十九世纪的数学家罗素（1872—1970年）持后一种看法。他曾说过："我们决不知道我们在这门学科（注：指数学）中说的是什么，也不知道我们所说的是否正确"。他还举例说："由'A是B和B是C'一定可以推出'A是C'。'A是B'成立是有条件的（主观的），而不是客观的。"事实并不象罗素的认识那样，当我们并不知道我们所说的是什么时，我们仍然可以断定我们的命题的正确性，因为它所反映的是现实世界的规律。可以断定，'A是B'完全是一个客观的判断，尽管这是一个极其普遍的判断。也就是说'A是B'决不是我们思维的产物，而是各种现实事物的集合之间实际存在的活生生的关系的反映。恩格斯（1820—1895年）对罗素的这种唯心主义的观点曾给以有力的批驳。他认为："纯数学的对象都是非常现实的材料。"关于这一论点的正确性我们早已清楚，即使是公理化的或抽象的代数，已被抽去了对象的具体特性和内容，但一点也不表明它和现实是脱离的，而且利用这些代数结构去研究实际领域中各个方面的规律和过程，它是十分具体的，仅仅是以定理形式叙述了这

许多事实的整体而已。出现上述的争论，正反映了两种针锋相对的不同观点。

二 作为教学科目的中学代数

作为教学科目的中学代数，就其性质或内容而言，都不同于作为一门科学的代数学。首先它服从于普通教育的培养目标，根据中学数学教学的目的，必须立足于让学生获得为参加社会主义革命和建设、以及学习现代科学技术所必需的基础知识和基本能力。按照这种要求，可列入中学代数这门课程的内容是很庞杂的，涉及到数学的很多分支的很多方面，因而必须有所选择。特别应该注意到当前科学技术和数学本身发展很快，学生在校期间只能学到一些基本的东西，毕业后在工作中所遇到的新问题，未必都能利用已学到的数学知识得到解决。这样，选取中学代数内容时，必须本着发展的观点，选定那些有利于学生进一步独立继续学习、便于开拓、适应发展需要的内容。此外，最好具有一定的弹性，以便能灵活地适应学生的不同水平和学生来日的不同需要，譬如增加一些可供选学的内容。目前从全国范围来说，新编的中学数学课本不止一种，正是适应不同情况的反映。我们看到，作为教学科目的中学代数，其内容一般包括以下几个方面。

1. 数的概念及其运算

先在算术数的基础上引进了负数，从而完成有理数集的扩充；紧接着又引进了无理数，进一步从有理数集扩充到实数集；最后引进了虚数，并完成了复数集的扩充。

从现行中学数学教材中不难看出，对数集本身的研究不在于讨论其结构，而是介绍某一数集里的各种代数运算（无理数运算未作介绍）。因为有理数的运算是运算的基础，所以把它放在十分重要的位置上。

2. 解析式及其恒等变换

主要讨论的是代数式与简单超越式的概念、性质和变换。其中关于解析式的恒等变换被看作重点内容，它是求解方程、研究函数的基础。

3. 方程和方程组

主要讨论各类方程（组）的解法。至于方程的同解理论以及对方程的讨论都是为解方程服务的。关于方程（组）的应用是联系实际的一个重要方面，应该给予重视。

4. 不等式和不等式组

包括一元一次不等式（组）和一元二次不等式的解法。对其它类型的不等式，只介绍如何化为一元一次或一元二次不等式，然后求解。关于不等式的证明，仅介绍一些常用的证明方法。在证明中注意培养学生的逻辑思维能力。此外，还讨论了不等式在求函数定义域、值域，研究函数的单调性，求极值、极限等方面的应用。

5. 函数

函数在中学代数课里占有十分重要的地位。函数的定义在初中和高中课本里曾两次出现。而高中阶段用"集合"、"映射"等新的观点给出函数概念，更有利于对这一概念的理解。其次，利用函数的图象来讨论函数的性质，或根据函数的性质绘出函数的图象，都体现了"数"、"形"结合的思想。学习函数的性质是为了实际应用，应该看成是研究函数本身的主要目的。

除了上面这五部分内容以外，还包括等差、等比数列；数学归纳法；排列与组合；二项式定理；概率初步和统计初步等。

中学代数的内容十分丰富，如何安排和如何处理也是值得注意的。上面举出的前五部分，相互间有密切的联系，为了保证能系统地学习这些内容，以交叉安排为宜；其余内容基本上属于离散的，可分别列为专题。在内容处理上，必须考虑这一课程的特

点，同时还要注意学生的年龄特征．因此，对严谨性方面的要求，不仅要保证内容的科学性，做到不出错误，而且又要有利于学生理解；对抽象性方面的要求，不仅要注意抽象能力的培养，也必须遵循认识事物的一般规律．在现行中学代数课本里，常是凭借一些相对具体的素材作为模型，让学生取得感性认识之后，再引出抽象的概念或抽象的数学结论．还应该指出，有些难度较大的内容，在中学代数课里只给学生一些初步的知识，或者只是渗透一些观念，要求不应过高．

第一章　数

数学是研究现实世界中空间形式和数量关系的科学．而数是其中最基本的研究对象，也是在生活或生产实际中应用最广泛的工具．关于数的概念的形成与扩展，数的运算及其性质，数的近似计算等都是中学数学课程中的重要内容，因此，有必要对它们进行深入的研究．

一　数系的扩展

1.数概念发展简史

（1）数概念的形成与发展

人类对于数有一个逐步深入的认识过程．最初阶段由于要比较某一物体集合和另一物体集合中物体的多少，便形成了多与少的概念，但还没能把单个的数从客观实体中分离出来．随后，人们才逐渐认识到每一个单个的数，是物体集合的一种性质．这种性质对于所有那些可以将其物体逐一对比的集合来说是共同的，对于那些不能将其物体逐一对比的集合来说是不同的．例如，{五只羊}，{五棵树}，{五个手指}等，具有“5”这个共同性质，而{6条鱼}就不具有这个共同的性质．人们经过千百万次地在许多物体集合之间进行比较，终于在实践中把数从具体物体的集合中分离出来，从而产生了抽象的自然数（正整数）概念．

随着人类社会的继续发展，人们需要对土地田亩进行丈量、对

天体运行进行观测。在这些测量的实践中，人们发现仅用正整数来表示测量的结果是不够的。例如，人们在进行天文观测时发现有时所用的单位不能使所测量的星体恰好置放在整数位上；这时必须把单位加以分划，以便用单位的一部分来更准确地表示星体的位置，这样便出现了正分数。从数学史书记载中得知，三千多年前埃及纸草书中就已经记有关于正分数的问题。引进正分数是对数的概念的第一次扩充。

数字符号 0，起始于巴比伦，到公元六世纪，印度数学家才开始在位值制的记数法中运用它。而在我国古代筹算中却是利用空位的办法来表示“0”的。但是，把“0”作为一个数来看却是很迟的事。由于引进数“0”，就把自然数集扩充为扩大的自然数集，这是数的概念的第二次扩充。

以后，为了表示具有相反意义的量，负数概念就出现了。我国远在公元一世纪成书的《九章算术》中，就指出了正负数的不同表示法和正负数的加减法则。在西方直到公元十七世纪，负数才在数学中占有确定的位置。引进负数是数的概念的第三次扩充。

数的概念的又一次扩展发生在古希腊。公元前五世纪，活跃在古希腊的毕达哥拉斯学派在研究用一个正方形的边长作为单位长，去度量这个正方形的对角线时，发现它们是不可公度的。为了得到不可公度线段比的精确数值，便导致了无理数概念的产生。当时只是用几何的形象来说明无理数的存在，至于严格的实数理论直到十九世纪七十年代才由三位大数学家戴德金、康托、魏尔斯托拉斯分别建立起来。引进无理数，形成实数集是数的概念的第四次扩充。

数的概念继续发展下去，则与前几次扩充的性质有所不同，它不是直接由于量的度量的需要，而是为了解决数学本身提出的问题的需要．早在人们解二次方程时就曾遇到有虚根的情况，不过当时认为这类方程是不能解的。到了公元1945年意大利数学

家塔尔塔里亚在解三次方程中大胆地引用了负数开平方的运算，得到了正确的答案。但是，当时许多数学家都不承认这种新数，他们对这种数很难理解，认为它是虚无飘渺的，故称之为虚数。二百年以后，复数的几何表示出现了，虚数得到了具体的解释，同时在解决实际问题方面也取得了很大的成功，虚数才被人们承认。引进虚数，形成复数集，这是数的概念的第五次扩充。

从上述数的发展简史中，我们可以看到，数的概念是逐步发展的，新数的产生是交错的。例如在人们还没有完全认识负数之前，早已知道无理数的存在；在实数理论还没有建立以前，已经运用虚数来解三次方程了。但是从大体上来看，数的概念的历史发展过程是按照以下的逻辑顺序：

自然数集$\xrightarrow{\text{添正分数}}$正有理数集$\xrightarrow{\text{添负有理数和零}}$有理数集$\xrightarrow{\text{添无理数}}$实数集$\xrightarrow{\text{添虚数}}$复数集。

在中小学数学课程中，关于数的概念的扩充，基本上就是按照上面的顺序进行的，只是较早地引进了数零。

（2）数的扩充原则

从历史上看，数集的每一次扩展，总是由于旧有的数集与解决具体问题的矛盾而引起的，这些问题有的是从实际问题提出的（例如，从自然数集逐步扩充到实数集）；有的则是从数学本身首先提出的（例如，从实数集扩充到复数集）。然后取得实际解释。

从数学教学上看，中学数学里的数的概念是在小学里的非负有理数集（也称算术数集）的基础上进行了三次扩充。

第一次：引入负数，把算术数集扩充为有理数集；

第二次：引入无理数，把有理数集扩充为实数集；

第三次：引入虚数，把实数集扩充为复数集。

在数的概念每次扩充后所得的新数集B，包含扩充前的旧数集A，并且新数集B具有旧数集A的主要性质，也使旧数集A不能

（或不一定能）施行的某种运算变为可施行了。一般来说，把数集A扩充到数集B要遵循下面的几条原则：

（Ⅰ）要增添新的元素，即A是B的真子集。

（Ⅱ）在数集B里定义的一些关系和运算，对于作为B的真子集A的元素，这样定义与原有的关系和运算的定义应是无矛盾的，并需保持它们在数集A中的一些主要性质。

（Ⅲ）数集B能解决数集A所不能解决的矛盾。在数集A中不能施行或不能永远施行的某种运算，在数集B中却能永远施行。

在数集扩展中，除了遵守上述几条原则之外，还应认识到以下两点：

第一，数集的每一次扩充，都解决了一定的矛盾，从而扩大了数的应用范围。但是，数集的每一次扩充也会失掉一些性质。例如，在自然数集中，每一个数都有它唯一的后继数，而扩充到有理数集以后，就不再具有这个性质了。又如，实数集具有顺序性，而扩充到复数集以后，就失去了这种顺序性。

第二，数集经过扩充到复数集后，是否还可以继续扩充呢？这个问题的回答是有条件的。如果要求满足数集扩充原则（Ⅱ）的全部性质，那么任何扩充都是不可能的。如果放弃某些要求，譬如：舍去乘法交换律，进一步扩充则是可能的，这时可以得到四元数系；如果再把条件减弱，即适当改变结合律的要求，还可以得到八元数系；如果舍去乘法的全部性质，就会得到更多种的扩张。究竟扩充到什么样的数系（统称为超复数）才能满足人类生产实践的需要，这就要由生产实践和科学技术发展的情况来决定。目前，人们已经认识到四元数系的实际意义，因为十九世纪的汉密尔顿发现的四元数同我们的时空世界是非常协调的；在时空世界中，一个物理点需要有四个实数才能加以描述。这时除了给出同三个已给数轴有关的长度、宽度和高度之外，还要加上物