全国高等教育自学考试创新型同步辅导系列

线性代数（经管类）

同步辅导·同步训练

程永莉 编

课程代码 04184

- 本章考纲解读 深度分析考点
- 考点考频分析 数字解密真题
- 重点知识串讲 全局掌握内容
- 同步强化训练 详解提升能力

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

全国高等教育自学考试创新型同步辅导系列

线性代数（经管类）

同步辅导·同步训练

程永莉　编

课程代码 04184

本章考纲解读　深度分析考点

考点考频分析　数字解密真题

重点知识串讲　全局掌握内容

同步强化训练　详解提升能力

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(经管类)同步辅导·同步训练/程永莉编.—天津:天津大学出版社,2014.4

(全国高等教育自学考试创新型同步辅导系列)

ISBN 978-7-5618-5032-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①程… Ⅲ.①线性代数—高等教育—自学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第075949号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨　欢
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647
网　　址	publish.tju.edu.cn
印　　刷	北京市通县华龙印刷厂
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	185 mm×260 mm
印　　张	15.5
字　　数	387千
版　　次	2014年4月第1版
印　　次	2014年4月第1次
定　　价	33.00元

前言

Preface

《线性代数(经管类)》是高等教育自学考试经济管理类(本科段)各专业的一门重要的基础理论课程.线性代数为研究和处理涉及许多变元的线性问题提供了有力的数学工具,这一工具在工程技术、经济科学和管理科学中都有广泛的应用.

为了帮助自学者全面、系统地把握课程内容并顺利通过考试,我们特聘请长期从事自学考试讲授、教学经验丰富的一线教师,根据最新版《线性代数(经管类)自学考试大纲》编写了这本同步辅导用书.本书在编写之前做了大量的调研,根据学生和教师的共同需求,专设了实用性极强的内容体例,真正做到了讲、学、练的充分结合,点、线、面的例题辅导,是教师上课和自学者学习的好教材.

本书结构新颖,体例规范,主要由教材知识架构、本章考纲解读、考点考频分析、重难点知识串讲、知识强化训练、参考答案及解析六个模块组成.六合一的模式对考生全方位学习和课堂测验进行实时掌控.内容上,以考纲为基石,以真题为依托,以强化训练为跳板,真正把考点知识点吃透,从而帮助考生全面、系统地掌握本章内容.首先,本书的一大特色是对近五年的真题做了考点考频的分析,更加直观地看出每一章的考点和重点,这对于考生有目的性和针对性地全面掌握考核知识点有很大帮助,在积极备考方面也富有切实的指导意义.其次,本书在强化训练部分,对典型试题增加了点拨,以便于考生掌握解题技巧从而正确解答各种题型.总而言之,本辅导用书是对全部考点的综合,融大纲考点、真题解析、重点强化于一炉,在夯实基础上进一步掌握解题技巧,提高应试能力,从而极大地满足自学者的应试要求.

“勤能补拙是良训,一分辛苦一分才.”辅导书固然很重要,但也仅仅是开启学习方法的一把钥匙,在通往过关的道路上更多的还需要自学者的拼搏努力和勤奋学习,方能披荆斩棘,顺利通关.最后,我们希望每位考生能在同步训练优质图书的帮助下,顺利通过考试,实现梦想!

备考指南
Preparation Guide

第一章考核指导

学习本章,要确切了解行列式的定义;理解行列式的性质(性质1～6);熟练掌握行列式的计算(特别是低阶的数字行列式和具有特殊形状的字母或数字行列式),会计算简单的行列式(一般指的是低阶的行列式,如二阶或三阶行列式);理解克拉默法则在线性方程组求解理论中的重要性.

本章的重点:(代数)余子式、行列式展开定理以及行列式的性质与计算.

难点:n阶行列式的计算.

易错点:行列式的计算.

对策方法:熟记行列式的性质,尤其是性质3～4,在计算过程中要注意"符号"问题.

第二章考核指导

学习本章,要求掌握矩阵的各种运算及其运算法则尤其是乘法法则和数乘运算;从定义上理解可逆矩阵的条件,知道方阵可逆的充分必要条件;会求可逆矩阵的逆矩阵,一般来说,低阶矩阵比如二阶矩阵或者三阶矩阵可直接通过计算其伴随矩阵求逆,维数较高的矩阵或者形式较为复杂的矩阵通过进行初等变换求逆;熟练掌握矩阵的初等变换;理解矩阵的秩定义,会求矩阵的秩,这里矩阵的秩的求法是化为简单的阶梯型矩阵,通过非零行数来判定矩阵的秩.

本章的重点:矩阵运算及其矩阵的求法,矩阵的初等变换.

难点:逆矩阵的求法及矩阵的概念.

易错点:求给定方阵的逆矩阵.

对策方法:熟记可逆矩阵的充要条件,善于观察矩阵形式,利用分块矩阵的求逆公式以及初等变换,求得逆矩阵要及时验证.

第三章考核指导

学习本章,要求知道n维向量的概念;掌握向量是同维向量组时线性组合系数的求法;理解向量组线性相关与线性无关的定义和判别法;理解向量组的极大无关组的定义和向量组的秩的定义,并能理解等价向量组等秩的结论;会求向量组的极大无关组和向量组的秩;清楚向量组的秩与矩阵的秩之间的关系;知道向量空间的定义和向量空间的基与维数和坐标的概念.

本章重点:线性组合系数的求法;向量组线性相关和线性无关的定义及其判别法;求向量组的秩.

难点:向量组线性相关和线性无关的判别法;向量组秩的概念.

易错点:混淆向量组线性相关与线性无关的定义;对求线性相关系数不熟悉.

对策方法:向量组线性相关与无关定义要对比记忆.顾名思义,相关是向量之间有关系.无

关一般与解齐次线性方程组联系在一起，可以通过齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解来判定.

第四章考核指导

学习本章，要求熟练掌握齐次线性方程组的解空间、基础解系及通解的含义和求法；熟练掌握非齐次线性方程组的有解判别法和通解的求法. 特别的，对于齐次线性方程组的基础解系要理解透彻并能准确计算.

本章重点：齐次线性方程组有非零解的充要条件；非齐次线性方程组有解的充要条件；会用矩阵的初等行变换求解线性方程组.

难点：齐次线性方程组的基础解系的求法.

易错点：非齐次线性方程组的通解问题.

对策方法：要理解通解是一个特解加上基础解系的线性组合. 首先，要找一个原非齐次方程的任意一个解作为最后通解的一个特解；然后，再求得相应的齐次线性方程的任意一个基础解系；最后，给出通解的表达式.

第五章考核指导

学习本章，要求熟练掌握实方阵的特征值和特征向量的定义与求法；了解特征值与特征向量的性质；清楚两个同阶方阵相似的定义和性质；理解方阵与对角矩阵相似的条件并会用相似变换化方阵为对角矩阵；会计算两个实向量的内积和向量的长度，会判定两个向量是否正交；了解正交向量组的定义，会用施密特方法把线性无关向量组化为等价的正交单位向量组；了解正交矩阵的定义、性质及其判定方法；了解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质；会用正交矩阵化实对称矩阵为对角矩阵.

本章重点：求实方阵的特征值和特征向量；方阵可相似对角化的条件和方法；方阵的相似对角化；实对称矩阵的正交相似对角化.

难点：方阵与实对称矩阵的相似标准形的求法.

易错点：方阵的相似对角化.

对策方法：一般的方阵要先求得其特征根，对于重根和单根情况分类讨论. 对于重根情形，判定特征根重数等于相应的线性无关的特征向量数，得到线性无关的向量组，从而得到可逆矩阵并给出其相似标准形.

第六章考核指导

学习本章，要求理解实二次型的定义及其矩阵表示；了解实二次型的标准形；了解合同矩阵的概念；会用正交变换化二次型为标准形；善于运用配方法化二次型为合同标准形；知道惯性定理；理解正定二次型和正定矩阵的定义. 掌握正定二次型和正定矩阵的判别方法.

本章重点：化二次型为标准形以及正定二次型和正定矩阵的判别方法.

难点：用正交变换化二次型为标准形.

易错点：标准形和规范形，正定矩阵的判定方法.

对策方法：对于标准形和规范形，考生易混淆，要善于观察二次型形式，利用配方法化标准形，再化规范形，对于正定矩阵的判定方法很多，一般常用各阶顺序主子式大于零这个判定条件，要认真领会教材的定理推论及相关例题，用自己的语言总结正定矩阵的判定条件.

Contents 目录

第一章
行列式

教材知识架构

- 行列式
  - 行列式的定义
    - 二阶行列式与三阶行列式
    - n阶行列式
    - 代数余子式
    - 三角行列式
  - 行列式按行（列）展开（定理1.2.1 行列式展开定理）
  - 行列式的性质与计算
    - 性质
    - 计算
    - 范德蒙德行列式
  - 克拉默法则（定理1.4.2和定理1.4.3）

本章考纲解读

本章介绍了行列式的相关知识，行列式是解线性方程组产生的一种算式，后拓展成为数学领域的一个基本工具，因此，行列式是线性代数这门课程的关键. 本章的重点是行列式的性质与计算，难点是 n 阶行列式的计算，易错点也是行列式的计算. 本章常考知识点分类如下.

了解：行列式的定义与性质；

清楚行列式中元素的余子式和代数余子式的定义；

行列式按其第一列展开的递归定义；

克拉默法则.

熟悉：用克拉默法则求解简单的线性方程组；

低阶范德蒙德行列式的计算.

掌握：n 阶行列式的计算；

三角行列式的计算公式；

具有特殊形状的数字和文字行列式以及简单的 n 阶行列式.

考点考频分析

序号	考点	题号	题型	分值	年份	再考率(用星号表示)
1	（代数）余子式	1 21 12 11 6	选择题 填空题 计算题	2 分 2 分 9 分	2009 年 4 月 2010 年 4 月 2011 年 4 月 2011 年 10 月 2013 年 4 月	★★★★
2	行列式 展开定理	12 2	填空题 计算题	2 分 9 分	2009 年 4 月 2010 年 7 月	★★★
3	行列式性质	1 11 7 3 12 8 10 6 1	选择题 填空题	2 分 2 分	2008 年 4 月 2009 年 4 月 2010 年 1 月 2011 年 1 月 2012 年 1 月 2012 年 4 月 2012 年 10 月 2013 年 4 月 2014 年 4 月	★★★★★
4	行列式计算	21 13 5 9 12 8 2 10 6 15 2 8 20 16 11	选择题 填空题 计算题	2 分 2 分 9 分	2008 年 4 月 2008 年 7 月 2009 年 1 月 2009 年 7 月 2010 年 1 月 2010 年 7 月 2011 年 1 月 2011 年 7 月 2012 年 1 月 2012 年 4 月 2012 年 7 月 2012 年 10 月 2013 年 1 月 2013 年 4 月 2014 年 4 月	★★★★★
5	范德蒙德 行列式	11 12	填空题	2 分	2011 年 4 月 2012 年 4 月	★★

备注：

从上表可以看出，余子式与代数余子式的考查一般出现在选择题和填空题中，从 2008 年之

后开始出现,2011 年出现频率最高.行列式展开定理会结合在行列式计算中出现,2013 年出现的填空题中考查的是展开式中的某项的符号问题.对于行列式的性质考查几乎每年都有,一般出现在选择题和填空题中.行列式的计算是本章的重点、难点且是每年必考的题目,一般在试题中的第一个大题中出现.

重难点知识串讲

行列式在线性代数的考试中占很大的比例.从考试大纲来看,虽然只占 13% 左右.但在其他章的试题中都有涉及行列式计算的内容.故这部分试题在试卷中所占比例远大于 13%.

(一)二阶行列式和三阶行列式

1.二阶行列式(P_3)

为了便于记忆方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$的解,我们引入记号

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

称之为二阶行列式.二阶行列式等于它的左上角和右下角的两个元素的乘积减去右上角和左下角的两个元素的乘积.

这样,二元一次方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$的解可以用二阶行列式表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

从这个解的表达式可以看出:

(1)x_1,x_2 的分母都是行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,它是方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$中未知量前面的系数按原顺序排成的二阶行列式.

(2)x_1 的分子行列式为$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,这个行列式的第 1 列是原方程组的常数列,第 2 列由 x_2 的系数组成,它也可以看成是$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$的第 1 列换成常数项得到的,同样的,$x_2$ 的分子行列式是由分母行列式的第 2 列换成常数项得到的.

一般的,我们把由 4 个数 $a_{ij}\ (i,j=1,2)$ 得到的下列式子:$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为一个二阶行列式,其运算规则为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

特殊的情形，如$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}=ad$，它们的值与$b$或$c$的值毫无关系.
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix}=-bc$，它们的值与$a$或$d$的值毫无关系.

真 题 链 接

(1)(2011年1月)行列式$\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix}=0$，则$k=$______.

【答案】 $-1,3$.

【解析】 由二阶行列式计算公式，$\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix}=(1-k)(k-1)+4=0$，可得$k=-1$或3.

(2)(2008年1月)若$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$，则$k=$______.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$.

【解析】 $\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2k-1=0, k=\dfrac{1}{2}$.

2.三阶行列式(P_4)

在讨论三元一次方程组时，引入了三阶行列式这一工具，三阶行列式定义如下.
由9个数$a_{ij}(i,j=1,2,3)$得到下列式子：

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

从这个定义可以看出，三阶行列式表示$6=3!$项的代数和，每一项都是三个数的乘积并适当附上正号“+”或负号“-”，这三个数取自D_3中不同的行和不同的列；反之，任意取自D_3中不同的行和不同的列的三个数的乘积适当附上正号“+”或负号“-”后都是D_3的定义式中的某一项.

真 题 链 接

(2009年7月)若$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$，则$k=$______.

【答案】 -1.

【解析】 因为$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix}=6+k-1-4=k+1=0$，所以$k=-1$.

（二）n 阶行列式和（代数）余子式

1. n 阶行列式（P_6）

一阶行列式 $D_1 = |a_{11}| = a_{11}$，

n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

它由 n 行、n 列元素（共 n^2 个元素）组成，称之为 n 阶行列式.

2. 余子式及代数余子式（P_6）

三阶行列式的余子式和代数余子式：

设有三阶行列式 $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，对任何一个元素 a_{ij}，我们划去它所在的第 i 行及第 j 列，剩下的元素按原先次序组成一个二阶行列式，称它为元素 a_{ij} 的余子式，记成 M_{ij}.

例如 $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

再记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如 $A_{11} = M_{11}$，$A_{21} = -M_{21}$，$A_{31} = M_{31}$.

那么，三阶行列式 D_3 定义为

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

我们把它称为 D_3 按第一列的展开式，经常简写成 $D_3 = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}A_{i1} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}$.

n 阶行列式的余子式和代数余子式：

在 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后剩下的 $n-1$ 行和 $n-1$ 列元素，按原来的相对的顺序组成一个 $n-1$ 阶行列式，记为 M_{ij}，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式；令 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式（$i,j = 1,2,\cdots,n$）.

真题链接

(1) (2009 年 4 月) 3 阶行列式 $|a_{ij}|=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{vmatrix}$ 中元素 a_{21} 的代数余子式 $A_{21}=($　　$)$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【答案】 C.

【解析】 $A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}=1.$

(2) (2009 年 4 月) 已知 3 阶行列式 $|a_{ij}|=\begin{vmatrix}1&x&3\\x&2&0\\5&-1&4\end{vmatrix}$ 中元素 a_{12} 的代数余子式 $A_{12}=8$，求元素 a_{21} 的代数余子式 A_{21} 的值.

【答案】 5.

【解析】 由 $A_{12}=-\begin{vmatrix}x&0\\5&4\end{vmatrix}=-4x=8$，得 $x=-2$，所以 $A_{21}=-\begin{vmatrix}-2&3\\-1&4\end{vmatrix}=-(-8+3)=5.$

(3) (2010 年 10 月) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 1 行第 2 列元素的代数余子式为________.

【答案】 -2.

【解析】 参考 P_7 代数余子式定义. $|\boldsymbol{A}|$ 中第 1 行第 2 列元素的代数余子式为 $(-1)^{1+2}2=-2$.

(4) (2011 年 4 月) 行列式 $\begin{vmatrix}3&0&4&0\\1&1&1&1\\0&-1&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$ 中第 4 行各元素的代数余子式之和为________.

【答案】 0.

【解析】 参考 P_7 代数余子式定义，第 4 行的代数余子式之和为

$$(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0&4&0\\1&1&1\\-1&0&0\end{vmatrix}+(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}3&4&0\\1&1&1\\0&0&0\end{vmatrix}+(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}3&0&0\\1&1&1\\0&-1&0\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}3&0&4\\1&1&1\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

$=4-3-1=0.$

(5) (2011 年 10 月) 设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\5&3&-2\end{vmatrix}$，其第 3 行各元素的代数余子式之和为________.

【答案】 0.

【解析】 第 3 行元素的代数余子式之和为

$$(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 4\\2 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\2 & 2\end{vmatrix}=-8+2+6=0.$$

(6)(**2013 年 4 月**) 行列式 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 中,a_{22} 的代数余子式为 ( )

A. $\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ B. $-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$ C. $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$ D. $-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$

【答案】 C.

【解析】 a_{22} 的代数余子式为 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$,选 C.

(三) 行列式按行(列) 展开

定理 1.2.1(行列式展开定理)(P_9)

n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 等于它的任意一行(列) 的各元素与其对应的代数余子式的乘积的和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

其中,A_{ij} 是元素 a_{ij} 在 D 中的代数余子式,前一式称为 D 按第 i 行的展开式,后一式称为 D 按第 j 列的展开式.

备注:本定理说明,行列式可以按其任意一行或按其任意一列展开来求出它的值.

真题链接

(1) (**2009 年 4 月**) 设三阶行列式 D_3 的第 2 列元素分别为 $1,-2,3$,对应的代数余子式分别为 $-3,2,1$,则 $D_3=$ ________.

【答案】 -4.

【解析】 $D_3=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=1\times(-3)+(-2)\times2+3\times1=-4.$

(2)(**2010 年 7 月**) 计算行列式 $\begin{vmatrix}3 & 0 & -2 & 0\\2 & 10 & 5 & 0\\0 & 0 & -2 & 0\\-2 & 3 & -2 & 3\end{vmatrix}=$ ( )

A. -180 B. -120 C. 120 D. 180

【答案】 A.

【解析】 观察可知,第 3 行的零元素最多,可按照第 3 行元素展开,可得到行列式的值为 -180.

（四）行列式的性质（P_{11}）

性质 1 行列式和它的转置行列式相等，即 $D = D^{T}$.

性质 2 用数 k 乘行列式 D 中某一行（列）的所有元素所得到的行列式等于 kD，也就是说，行列式可以按行和列提出公因数.

性质 3 互换行列式的任意两行（列），行列式的值改变符号.

推论 如果行列式中有某两行（列）相同，则此行列式的值等于零.

性质 4 如果行列式中某两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值等于零.

性质 5 行列式可以按行（列）拆开.

性质 6 把行列式 D 的某一行（列）的所有元素都乘以同一个数以后加到另一行（列）的对应元素上去，所得的行列式仍为 D.

定理 1.3.1 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 的任意一行（列）各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即 $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0(i \neq k)$ 或 $a_{1j}A_{1s} + a_{2j}A_{2s} + \cdots + a_{nj}A_{ns} = 0(j \neq s)$.

真题链接

（1）（2008 年 4 月）行列式 $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{vmatrix} =$ ______.

【答案】 0.

【解析】 直接由行列式的性质：行成比例则值为零.

（2）（2009 年 4 月）已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ 2a_{21} & 4a_{22} & 6a_{23} \\ 3a_{31} & 6a_{32} & 9a_{33} \end{vmatrix} = 6$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ ______.

【答案】 $\dfrac{1}{6}$.

【解析】 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ 2a_{21} & 4a_{22} & 6a_{23} \\ 3a_{31} & 6a_{32} & 9a_{33} \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 2 \times 3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= 6$，所以 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{6}$.

（3）（2009 年 7 月）已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3$，那么 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix} =$ （　　）

A. -24　　B. -12　　C. -6　　D. 12

【答案】 B.

【解析】 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix} = 2\times(-2)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2\times(-2)\times 3 = -12.$

(4)(2010 年 1 月) 设行列式 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$，则行列式 $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{8}{3}$

【答案】 A.

【解析】 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$，则行列式 $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\times\frac{1}{3}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}.$

(5)(2010 年 4 月) 已知二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = m$，$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = n$，则 $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 \end{vmatrix} =$ (　　)

A. $m-n$　　B. $n-m$　　C. $m+n$　　D. $-(m+n)$

【答案】 B.

【解析】 $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = -m+n = n-m.$

(6)(2010 年 4 月) 行列式 $\begin{vmatrix} 2007 & 2008 \\ 2009 & 2010 \end{vmatrix}$ 的值为________.

【答案】 -2.

【解析】 $\begin{vmatrix} 2007 & 2008 \\ 2009 & 2010 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2007 & 2008 \\ 2007+2 & 2008+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2007 & 2008 \\ 2007 & 2008 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2007 & 2008 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 0 + 2(2007-2008) = -2.$

(7)(2011 年 1 月) 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4$，则行列式 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix} =$ (　　)

A. 12　　B. 24　　C. 36　　D. 48

【答案】 B.