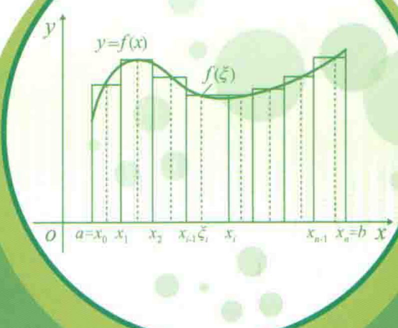
21世纪高职高专规划教材

华腾教育 HUATENG

高等应用数学

汪子莲◎主　编



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高职高专规划教材

高等应用数学

主　编　汪子莲
副主编　李彦刚　王晓燕

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是高职高专公共基础课教材，由高等数学、线性代数、概率论与数理统计三部分组成。具体内容包括：函数的极限与连续性，函数的微分及其应用，函数的积分及其应用，常微分方程，无穷级数，行列式，矩阵，线性方程组，随机事件及其概率，随机变量的分布及数字特征，数理统计初步，数学建模初步及 Mathematica 软件等，其中带"*"的内容可根据具体教学情况节选学习。

本教材可作为高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院工科类各专业的数学教材，也可供经济管理类专业选用，还可作为工程技术人员的数学知识更新教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/汪子莲主编. —北京：北京邮电大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-5635-2865-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①汪… Ⅲ.①应用数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 272043 号

书　　名：高等应用数学
主　　编：汪子莲
责任编辑：李　娟
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：010-62282185(电话)　010-62283578(传真)
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京振兴源印务有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：20
字　　数：381 千字
印　　数：1—2 000 册
版　　次：2012 年 2 月第 1 版　2012 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2865-3　　定　价：35.00 元

出版说明

高职高专教育作为我国高等教育的重要组成部分，承担着培养高素质技术、技能型人才的重任。近年来，在国家和社会的支持下，我国的高职高专教育取得了不小的成就，但随着我国经济的腾飞，高技能人才的缺乏越来越成为影响我国经济进一步快速健康发展的瓶颈。这一现状对于我国高职高专教育的改革和发展而言，既是挑战，更是机遇。

要加快高职高专教育改革和发展的步伐，就必须对课程体系和教学模式等问题进行探索。在这个过程中，教材的建设与改革无疑起着至关重要的基础性作用，高质量的教材是培养高素质人才的保证。高职高专教材作为体现高职高专教育特色的知识载体和教学的基本工具，直接关系到高职高专教育能否为社会培养并输送符合要求的高技能人才。

为促进高职高专教育的发展，加强教材建设，教育部在《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》中，提出了“重点建设好3 000种左右国家规划教材”的建议和要求，并对高职高专教材的修订提出了一定的标准。为了顺应当前我国高职高专教育的发展潮流，推动高职高专教材的建设，我们精心组织了一批具有丰富教学和科研经验的人员成立了编审委员会。

编审委员会依据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，调研了百余所具有代表性的高等职业技术学院和高等专科学校，广泛而深入地了解了高职高专的专业和课程设置，系统地研究了课程的体系结构，同时充分汲取各院校在探索培养应用型人才方面取得的成功经验，并在教材出版的各个环节设置专业的审定人员进行严格审查，从而确保了整套教材“突出行业需求，突出职业的核心能力”的特色。

本套教材的编写遵循以下原则：

(1) 成立教材编审委员会，由编审委员会进行教材的规划与评审。

(2) 按照人才培养方案以及教学大纲的需要，严格遵循高职高专院校各学科的专业规范，同时最大程度地体现高职高专教育的特点及时代发展的要求。因此，本套教材非常注重培养学生的实践技能，力避传统教材“全而深”的教学模式，将“教、学、做”有机地融为一体，在教给学生知识的同时，强化了对学生实际

操作能力的培养。

(3) 教材的定位更加强调“以就业为导向”，因此也更为科学。教育部对我国的高职高专教育提出了“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则。根据这一原则，本套教材在编写过程中，力求从实际应用的需要出发，尽量减少枯燥、实用性不强的理论灌输，充分体现出“以行业为向导，以能力为本，以学生为中心”的风格，从而使本套教材更具实用性和前瞻性，与就业市场结合也更为紧密。

(4) 采用“以案例导入教学”的编写模式。本套教材力图突破陈旧的教育理念，在讲解的过程中，援引大量鲜明实用的案例进行分析，紧密结合实际，以达到编写实训教材的目标。这些精心设计的案例不但可以方便教师授课，同时又可以启发学生思考，加快对学生实践能力的培养，改革人才的培养模式。

本套教材涵盖了公共基础课系列、财经管理系列、物流管理系列、电子商务系列、计算机系列、电子信息系列、机械系列、汽车系列和化学化工系列的主要课程。

对于教材出版及使用过程中遇到的各种问题，欢迎您通过电子邮件及时与我们取得联系(联系方式详见“教师服务登记表”)。同时，我们希望有更多经验丰富的教师加入到我们的行列当中，编写出更多符合高职高专教学需要的高质量教材，为我国的高职高专教育做出积极的贡献。

编审委员会

前　言

高等数学的思想和方法越来越多地应用于各个学科和领域。作为高职高专院校各类专业的基础课程和工具课程，如何快速掌握其基本内涵和蕴含的思想、方法是相关教育部门和各个教学单位应认真思考、仔细研究、积极应对的课题。本书应我国培养高等职业技能人才的需要，在总结高职高专院校各专业高等数学课程教学改革的经验，分析、研究借鉴国内外同类优秀教材编写特色的基础上，依据教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，由长期从事高职高专院校数学教学的一线教师执笔编写而成。

为满足高职高专学生系统学习的需要，本教材在内容编排上涵盖了高等数学、线性代数、数学建模初步、Mathematica 数学软件及概率论与数理统计的相关内容，强化了教材的实用性、科学性、针对性，实现了知识结构的整体优化。与同类教材相比较，本书在编写中重点突出了以下特色。

1. 遵循“教学内容科学性，教学过程序进性”的教学原则，对教材内容及有关知识的顺序作了适当调整。在高等数学部分中，将一元函数的极限、连续、导数、微分及积分与多元函数的相关内容相揉合，从思想和方法上体现了知识间的内在关联与区别，适于学生整体把握知识；同时，对概率论部分中多元随机变量的相关知识作了删减；为了培养学生的数学应用意识及应用数学知识解决实际问题的能力，编入了高等数学在经济学中的应用与数学建模初步等内容。

2. 落实“以必需、够用为度”的教学原则，对定理的证明及理论性过强的内容作了适当的淡化处理，通过几何图形、物理意义及实例加以直观说明，降低知识的难度，有利于学生对理论知识的掌握。

3. 注重基础知识、基本方法和基本技能的训练，每节配有适量的习题，安排上由易到难、由浅入深，以便巩固和灵活掌握相应知识点，同时培养学生的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力；章末配有复习题，方便学生复习巩固本章知识的学习效果，并在本书后附有参考答案。

4. 为培养学生应用计算机及相关数学软件求解数学问题的能力，结合具

体教学内容，每章（除第六章）安排了利用数学软件 Mathematica 解决相应问题的软件实验，方便检验习题结果的正确性，通过图形绘制，直观地了解某些函数及其性质，结合软件也可对某些问题作进一步更深入的讨论和研究。

本教材由兰州工业高等专科学校汪子莲副教授任主编，李彦刚、王晓燕任副主编。其中一、二、四章由汪子莲编写；三、六、八章由李彦刚编写；五、七章由王晓燕编写。习题答案及插图绘制由中山大学岭南学院丁珂完成。全书框架结构、统稿、定稿、教学大纲及配套的多媒体课件由汪子莲完成。祁忠斌教授担任主审，对本教材的编写提出了许多宝贵的意见和建议，并且本校基础学科部的《高等数学》已建设成为省级精品课程，在本书的编写过程中，该学科部也给予大力支持，谨此表示衷心的感谢！

限于编者水平有限及时间仓促，书中难免存在纰漏、错误和不足之处，请各位专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　函数的极限与连续性

函数是现代数学每一分支的主要研究对象.微积分的一些基本概念、性质及运算都要用极限理论来表述,因而极限概念是高等数学中最重要、最基本的概念之一.本章首先复习已学习过的一元函数及其性质,进而给出基本初等函数、复合函数、初等函数及多元函数的定义,然后主要研究极限的概念、性质及函数的连续性.

第一节　函　　数

一、函数及其性质

(一) 函数的概念

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是给定的非空数集,如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时,变量 y 按照一定的法则 f 都有确定的数值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的**函数**,记做

$$y = f(x), x \in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**,变量 y 称为**因变量**(或**函数**),数集 D 称为函数的**定义域**,f 称为函数的**对应法则**.

如果自变量 x 在定义域 D 内任取一个确定的数值时,只有唯一的函数值与之对应,则称该函数为**单值函数**;否则,如果有多个函数值与之对应,则称该函数为**多值函数**.如 $y = x^2 + 1$ 是单值函数;而 $x^2 + y^2 = 4$ 是多值函数.如果没有特别说明,本书所讨论的函数都是单值函数.

当 x 取确定数值 $x_0 \in D$ 时,通过法则 f,函数有唯一确定的值 y_0 与之相对应,称 y_0 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**,记做

$$y_0 = y\big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

由全体函数值构成的集合称为函数的**值域**,记做 M,即 $M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

由函数的定义知,函数是由定义域和对应法则确定的,因此把函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素.若两个函数具有相同的定义域和对应法则,则称它们是相等的.函数的表示方法常用的有三种:**表格法**、**图像法**、**公式法**(或**解析法**).

例 1 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(2),f\left(\dfrac{1}{x}\right),f[f(x)]$.

解 分别用 $2,\dfrac{1}{x},f(x)$ 代替 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 中的 x，得

$$f(2)=\frac{1}{1-2}=-1,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}(x\neq 1,x\neq 0),$$

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}(x\neq 0,x\neq 1).$$

例 2 下列各组函数是否相等，为什么？

(1) $y=|x|$ 与 $u=\sqrt{v^2}$；　(2) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$；

(3) $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；　(4) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(5) $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$；　(6) $y=\ln 5x$ 与 $y=\ln 5\cdot\ln x$.

解 因为(1)与(2)中两函数的两要素分别相同，所以是相同的函数；(3)与(4)中两函数的定义域不同，所以是不同的函数；(5)与(6)中两函数的对应法则不同，所以是不同的函数.

(二) 函数的定义域

函数的定义域通常分为以下两种情况：

(1) 对于实际问题，根据问题的实际意义确定.

例如，自由落体运动过程中位移随时间变化的函数关系为 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$，定义域为 $[0,T]$，其中 T 为落地时间；圆面积 S 是圆半径 x 的函数 $S=\pi x^2$，定义域为 $(0,+\infty)$.

(2) 由解析式表示的函数，其定义域就是使表达式有意义的一切实数组成的集合.

例 3 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$ 的定义域.

解 由所给函数可知，要使函数有意义，必须有

$$\begin{cases}3-x^2>0,\\ \left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3},\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$$

即 $0\leqslant x<\sqrt{3}$. 因此，所给函数的定义域为 $[0,\sqrt{3})$.

(三) 函数的几种特性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义(区间 I 为函数 $f(x)$ 的整个定义域或其定义域的一部分),则函数一般具有下列几种特性.

1. 有界性

如果存在正数 M,使对任意的 $x\in I$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**,否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

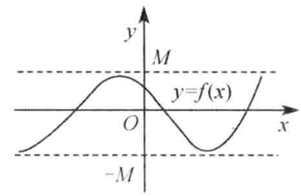


图 1-1

从图形上看,有界函数的图像介于两条直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间(见图 1-1). 例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$,而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,但在区间 $(1,2)$ 内有界.

注意　讨论函数有界或无界,必须先指明自变量 x 所在的区间.

2. 单调性

若对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(或**单调减少**). 区间 I 称为**单调增区间**(或**单调减区间**);单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**;单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

一般地,单调增加函数的图像为沿 x 轴正向单调上升的曲线,如图 1-2 所示;单调减少函数的图像为沿 x 轴正向单调下降的曲线,如图 1-3 所示.

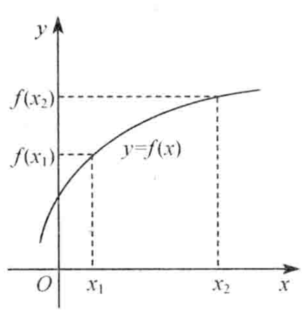


图 1-2

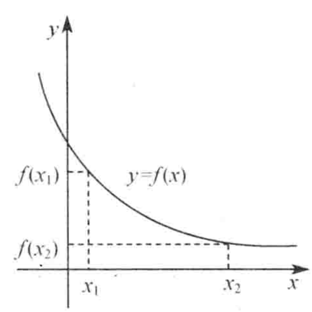


图 1-3

例如,$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加函数;$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 内单调减少,在 $[0,+\infty)$ 内单调增加,在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调函数.

注意　讨论函数的单调性,必须先指明自变量 x 所在的区间.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义区间 I 关于原点对称，若对任意的 $x \in I$，都有 $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**偶函数**；若对任意的 $x \in I$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**奇函数**；若函数既不是奇函数也不是偶函数，则称为**非奇非偶函数**.

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称(见图 1-4)；奇函数的图像关于原点对称(见图 1-5).

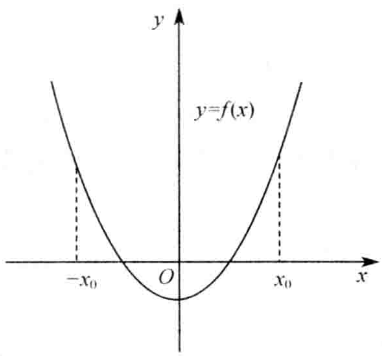


图 1-4

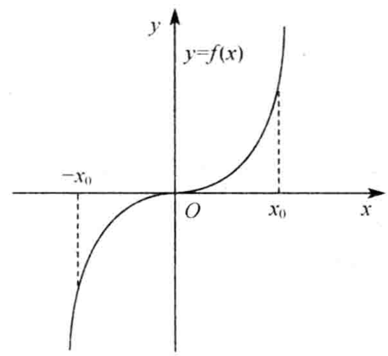


图 1-5

例如，$y = x^3 + \sin x$ 为奇函数；$y = \cos x$ 为偶函数；而 $y = x^2 + x$ 为非奇非偶函数.

4. 周期性

如果存在不为零的实数 T，使得对于任意的 $x \in I$，$x + T \in I$，都有 $f(x+T) = f(x)$，则称函数 $y = f(x)$ 是**周期函数**，T 是 $y = f(x)$ 的一个**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如，$y = \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y = \tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

(四) 分段函数

在定义域的不同范围具有不同的表达式的函数称为**分段函数**，其定义域为各部分定义域的并集. 分段函数是整个定义域上的一个函数，不能理解为多个函数. 一般来说，分段函数需要分段求值，分段作图，分段表示.

例 4 王先生到郊外去观景，以 2 km/h 的速度匀速步行 1 h 后，他发现一骑车人的自行车坏了，便花了 1 h 帮人把车修好，随后加快速度，以 3 km/h 的速度匀速步行 1 h 后到达终点，然后立即以匀速折返，耗时 2 h 返回到出发点. 请把王先生离家的距离关于时间的函数用图像法描绘出来.

解 王先生离家的距离 y 是时间 x 的函数，图形如图 1-6 所示. 用解析法表示为

$$y=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, & 1<x\leqslant 2,\\ 3x-4, & 2<x\leqslant 3,\\ -\dfrac{5}{2}x+\dfrac{25}{2}, & 3<x\leqslant 5.\end{cases}$$

该函数为分段函数，其函数定义域为$[0,5]$.

(五) 反函数

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每个数 y，在 D 中都有唯一确定的数 x 与之对应，且使 $y=f(x)$ 成立，则确定了一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记做 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数中 x 与 y 互换位置，即记做$y=f^{-1}(x)$，$x\in M$，并称函数 $y=f^{-1}(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称(见图 1-7).

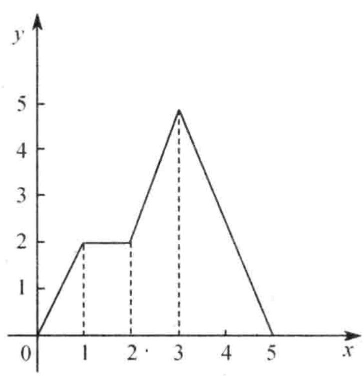


图 1-6

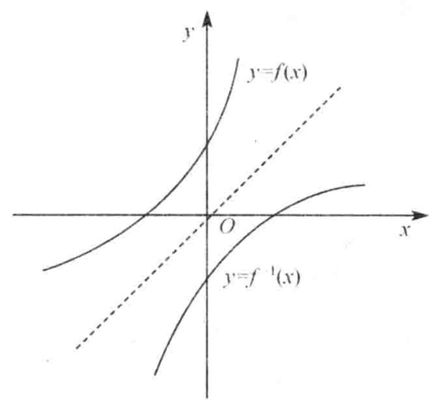


图 1-7

注意　只有单调函数才有反函数，且其反函数也单调.

二、初等函数

1. 基本初等函数

常值函数　　$y=C$(C 为常数)；

幂函数　　$y=x^{\mu}$(μ 为实数)；

指数函数　　$y=a^{x}$($a>0$，且 $a\neq 1$，a 为常数)；

对数函数　　$y=\log_{a}x$($a>0$，且 $a\neq 1$，a 为常数)；

三角函数　　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

以上六类函数统称为**基本初等函数**. 它们的性质、图像在中学已经学过，这里不再赘述.

2. 复合函数

定义 1.3　设 $y=f(u)$，其中 $u=\varphi(x)$，且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，其中 u 叫做中间变量.

关于复合函数有如下几点说明：

(1) 复合函数的定义可以推广到多个中间变量的情形.

(2) 将一个较复杂的函数分解为若干个简单函数时，一定要分清层次，由外到内，逐层分解.

(3) 并不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如，$y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+5$ 就不能构成复合函数. 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$u=x^2+5\geqslant 5$，此时 $y=\arcsin u$ 无定义.

例 5　指出下列函数由哪些简单函数复合而成？

(1) $y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$；　(2) $y=3^{\tan^2 x}$.

解　(1) $y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$ 可以看做由 $y=u^{\frac{2}{3}}, u=1+2x$ 复合而成.

(2) $y=3^{\tan^2 x}$ 可以看做由 $y=3^u, u=v^2, v=\tan x$ 复合而成.

注意　能否正确分析复合函数的构成直接决定了是否能熟练掌握微积分的方法和技巧.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而得到的，并且可以用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**. 例如 $f(x)=x\sin x, f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$f(x)=e^{5x+1}\sin x$ 等都是初等函数；但分段函数一般不是初等函数，如函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 不能用一个解析式表示，故不是初等函数.

三、多元函数的定义

前面讨论的都是只有一个自变量的函数，称为一元函数. 而在自然科学和工程技术中所涉及的函数，往往依赖于两个或更多个自变量，这就是多元函数. 由于多元函数是一元函数的推广和发展，它们有着许多类似之处，但有些地方存在较大差异. 从一元推广到二元时会产生许多新问题，但二元以上的函数有着相似的性质. 因此本书重点讨论二元函数及其有关的知识.

定义 1.4　设有三个变量 x,y 和 z，如果当变量 x,y 在它们的变化范围 D 中任