权威　实用　经典

2015 人大考研

2015
考研历届数学
真题题型解析（数学二）

主编／黄先开　曹显兵

- 分类解析2003—2014年全部真题
- 章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见
- 题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路
- 12年试卷附录在后，供考生自测之用

中国人民大学出版社

考研历届数学

真题题型解析（数学二）

主　编　黄先开　曹显兵
副主编　施明存　殷先军

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

考研历届数学真题题型解析．数学二/黄先开，曹显兵主编．—北京：中国人民大学出版社，2014.2
ISBN 978-7-300-18957-4

Ⅰ.①考… Ⅱ.①黄… ②曹… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 033697 号

考研历届数学真题题型解析（数学二）
主　编　黄先开　曹显兵
Kaoyan Lijie Shuxue Zhenti Tixing Jiexi (Shuxue Er)

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010-62511242（总编室）		010-62511770（质管部）
	010-82501766（邮购部）		010-62514148（门市部）
	010-62515195（发行公司）		010-62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn（中国 1 考网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东方圣雅印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2014 年 3 月第 1 版
印　　张	18	**印　　次**	2014 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	412 000	**定　　价**	36.00 元

前 言

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来，至今已27年，共命制试卷近百份，有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧和劳动的结晶，它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，展示出统考以来数学考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势，是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题，是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题，可以发现命题的特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考典型题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心分析研究，并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的，相信能够满足考生的要求。

我们认为本书具有以下特点：

1. 内容最全面。汇集了2003年以来12年的所有试题，便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。**在每章后面还将其余类型试卷的相关典型真题作为习题提供，以便考生进一步巩固相关知识，考生有了本书后，也就相当于拥有了其余两类试卷的资料。**

2. 题型最丰富。根据考试大纲的要求，**每一章节均按题型进行归类，并对每一题型进行了分析、归纳和总结。**这样考生可通过题型研究，把握命题特点和命题思路，做到举一反三，触类旁通。另外，对2003年以后未考的题型，也特意选了一个往年考题供同学们参考。

3. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法，然后详解——详细、规范的解答过程，再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结，所涉及的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析，相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧，从而大大提高应试水平。

4. 对照最直接。本书在每部分的开头，先列出了考试大纲规定的内容与要

求，与此相对照再进行**题型归类和分析总结，顺序与考试大纲和一般教材一致，**便于考生对照复习。

5. 总结最完整。除**每类题型均有归纳总结**外，**每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结，**这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重，从而发现命题的重点、最常考的题型，以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排，又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、人大社出版的高分复习全书同步进行，后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析，但希望读者不要轻易去查看分析、详解和评注，而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后，再去看书中的分析、详解和评注，仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同；如果存在问题，应尽量查清原因，看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺，还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。**注意，这样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。**整本书都这样复习下来，在掌握基本理论、基本概念和基本方法上，在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点，同时在这次编写完善过程中，参考了众多相关的教材和复习指导书，在此不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促，加上编者水平所限，书中难免还有不足之处，恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信，只要广大考生充满信心，通过脚踏实地的艰苦努力，就一定能够心想事成。

编者

2014 年 2 月于北京

目　　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

P A R T O N E

第一部分

高等数学

第一章　函数、极限、连续

考试内容与要求

考试内容

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立，数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限与右极限，无穷小量和无穷大量的概念及其关系，无穷小量的性质及无穷小量的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

题型 1.1　函数的概念及其特性

1. (05，4分) * 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“$M\Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有

---

* (05，4分)表示该题为2005年考研数学二真题，其分值为4分，全书同. 另外，对2003年以后未考的题型，也特意选了一个往年考题供参考.

(A)$F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
(B)$F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
(C)$F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
(D)$F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. 【　】

【答案】 应选(A).

【分析】 本题可直接推证,但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

【详解1】 任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,且 $F'(x)=f(x)$. 当 $F(x)$ 为偶函数时,有 $F(-x)=F(x)$,于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$,即 $-f(-x)=f(x)$,也即 $f(-x)=-f(x)$,可见 $f(x)$ 为奇函数;反过来,若 $f(x)$ 为奇函数,则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,从而 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 为偶函数,故选(A).

【详解2】 令 $f(x)=1$, 则取 $F(x)=x+1$, 可排除(B),(C); 令 $f(x)=x$, 则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$,可排除(D),故应选(A).

【评注】 请读者思考 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的有界性之间有何关系?

---

2. (14,4分) 设 $y=f(x)$ 是周期为4的可导奇函数, 且 $f'(x)=2(x-1)$, $x\in[0,2]$, 则 $f(7)=$ ________.

【答案】 应填1.

【详解】由 $f'(x)=2(x-1)$, 有 $f(x)=x^2-2x+C$,$x\in[0,2]$.
又因 $y=f(x)$ 是周期为4的可导奇函数, 得 $f(0)=0$, 故 $C=0$.
所以 $f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)=1$. 应填1.

小结

函数的概念及其复合,包括分段函数的复合,本质上是函数关系的建立问题,而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础. 对于函数的四个主要特性:奇偶性和周期性一般用定义检验;单调性则大多用导数符号分析;有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2 极限概念与性质

(03,4分) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立. (B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立.
(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在. 【　】

【答案】 应选(D).

【详解1】 本题考查极限的概念,极限值与数列前面有限项的大小无关,可立即排除(A),(B); 而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是"$0\cdot\infty$"型未定式,可能存在也可能不存在,举反例说明即可;极

限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$属“$1\cdot\infty$”型，必为无穷大量，即不存在. 故应选(D).

【详解 2】　用举反例法，取$a_n=\frac{2}{n}$，$b_n=1$，$c_n=\frac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$，则可立即排除(A)，(B)，(C)，故应选(D).

小结

关于极限的存在性，以下几点是值得注意的：

1. 若$\lim f$存在，$\lim g$不存在，则$\lim(f\pm g)$一定不存在，但$\lim fg$，$\lim\frac{f}{g}$可能存在，也可能不存在；

2. 若$\lim f=l\neq 0$，$\lim g=\infty$，则$\lim fg=\infty$；

3. 若f有界，$\lim g=\infty$，则$\lim(f\pm g)=\infty$，但$\lim fg$不一定为∞.

题型 1.3　函数极限的计算

1. (04,10 分) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【分析】　此极限属于“$\frac{0}{0}$”型未定式. 可利用洛必塔法则，并结合等价无穷小代换求解.

【详解 1】

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=-\frac{1}{6}.$$

【详解 2】

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=-\frac{1}{6}.$$

---

2. (07,4 分) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$ ________.

【答案】　应填$-\frac{1}{6}$.

【详解】 $$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1-(1+x^2)\cos x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{-2x\cos x+(1+x^2)\sin x}{2x}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(-1+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}.$$

---

3. (08，9 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【详解】 利用无穷小量的等价代换以及洛必塔法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cdot\cos x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}.$$

---

4. (09，9 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

【分析】 利用无穷小量替换及洛必塔法则.

【详解】 $$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{x(1+\tan x)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\tan^2 x}{x}=\frac{1}{4}.$$

---

5. (11，4 分) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

【答案】 应填 $\sqrt{2}$.

【分析】 是未定式“1^∞”型，属基础题型.

【详解】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1+2^x}{2}-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x\ln2}{2}}=\sqrt{2}$.

---

6. (13，4 分) $\lim\limits_{x\to0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ________.

【答案】 应填 $e^{\frac{1}{2}}$.

【详解】 属于“1^{∞}”未定式.

$$\lim_{x\to0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

【评注】 若 $\lim f(x)=1$，$\lim g(x)=\infty$，则
$\lim f(x)^{g(x)}$（“1^{∞}”型）$=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$.

7.(14,4 分) 设函数 $f(x)=\arctan x$. 若函数 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$

(A)1.　　(B) $\frac{2}{3}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{1}{3}$.　　【　】

【答案】 应选（D）.

【分析】 关键是将极限式中的变量 ξ 转化为 x，再按正常求极限方法进行.

【详解】 由已知条件 $f(x)=xf'(\xi)$，有 $\arctan x=\dfrac{x}{1+\xi^2}$，因此 $\xi^2=\dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}$，

于是
$$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

【评注】 题设条件就是把函数 $f(x)=\arctan x$ 在区间 $[0,x]$ 上利用 Lagrange 中值定理所得.

8.(14,10 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

【分析】 利用等价无穷小代换和 L'Hospital 法则.

【详解】
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

【评注】 注意在求极限过程中，等价无穷小代换、变量代换常常可以简化计算，因此要充分利用.