国家自然科学基金资助项目（51349011、41072235、41372301）
西南科技大学杰出青年科技人才支持计划（13ZX9109）

# 特征线算子分裂

## 有限元法及应用

王大国　水庆象　著

科学出版社

国家自然科学基金资助项目（51349011、41072235、41372301）
西南科技大学杰出青年科技人才支持计划（13ZX9109）

# 特征线算子分裂有限元法及应用

王大国　水庆象　著

科 学 出 版 社
北 京

## 内 容 简 介

本书讲述一种求解非定常不可压缩 N-S 方程有限元法：特征线算子分裂有限元法。该方法在每一个时间层上将 N-S 方程分裂成扩散项、对流项、压力修正项，对流项采用沿特征线展开的多步显式算法。通过平面 Poiseuille 流、方腔流、圆柱绕流和溃坝流对该算法进行了验证。

本书可供机械、建筑、动力、航空、水力、化工、能源、环境、生物等领域与流体力学专业相关的科研人员，以及高校教师、研究生和高年级本科生阅读。

**图书在版编目（CIP）数据**

特征线算子分裂有限元法及应用 / 王大国，水庆象著. —北京：科学出版社，2014.5

ISBN 978-7-03-040603-3

I. ①特… II. ①王… ②水… III. ①不可压缩流体–黏性流体–流体力学–特征线–非线性算子–有限元法 IV. ①O357.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 101894 号

责任编辑：杨　岭　郑述方 / 责任校对：郑金红
责任印制：余少力 / 封面设计：墨创文化

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com
成都创新包装印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2014 年 6 月第　一　版　　开本：B5（720 × 1000）
2014 年 6 月第一次印刷　　印张：8.75
字数：200 000

**定价：48.00 元**

（如有印装质量问题，我社负责调换）

# 前　言

在自然界中，液体或低速运动的气体一般可看作是不可压缩流体，它们所产生的黏性流动被称为不可压缩黏性流动。在数学上，不可压缩流体通过散度为零的连续性方程和著名的 N-S 方程描述，它能够刻画出流体的运动规律，如大气运动、海洋流动和机械内部流动等。

N-S 方程是一种非线性方程，数值方法是它的基本研究方法。求解 N-S 方程主要的数值计算方法包括有限差分法、有限体积法和有限元法。其中，有限元法由于适合处理复杂几何形状和边界条件的优点而成为计算力学中的优选方法。但将标准 Galerkin 有限元法用于非定常不可压 N-S 方程的求解时，会出现数值振荡。主要原因有两点：一是由于压力变量不出现在连续方程中，离散过程中速度场和压力场有限元插值函数的组合不恰当，使得 LBB 条件不能满足，从而引起压力场的数值振荡；二是动量方程中存在非线性的对流项，当雷诺数较高对流占优时，标准 Galerkin 有限元法求解将导致数值振荡。针对上述有限元求解 N-S 方程的困难，本书发展了一种求解 N-S 方程新的有限元方法：特征线算子分裂有限元法。

本书第一作者在北京飞箭软件公司进行合作研究时，梁国平老师提出了特征线算子分裂有限元法的基本思想，第一作者的研究生王海娇使该思想得以实现。2012 年，本书第二作者把特征线算子分裂有限元法加以完善的同时，提出了基于投影法的特征线算子分裂有限元法。第一作者在香港大学作访问学者期间，建立了基于特征线算子分裂有限元法的水波模型。第一作者的研究生胡彬把特征线算子分裂有限元法用于求解大涡模拟。因此，本书是我们师生四人合著，以本课题组近年来的研究成果形成了本书的主要内容，具体如下。

第 1 章是绪论，概述 N-S 方程的数值方法，综述 N-S 方程有限元法的研究现状，由水庆象、王大国完成。第 2 章建立 N-S 方程特征线算子分裂有限元法，该方法把 N-S 方程分裂成扩散项和对流项，对流项离散采用特征线-Galerkin 法，显

式求解，由王海娇、王大国完成。第 3 章将大涡模拟中经典 Smagorinsky 亚格子模型与特征线算子分裂有限元法相结合，发展了一种特征线算子分裂有限元大涡模拟方法，由胡彬、水庆象、王大国完成。第 4 章在第 2 章基础上，推导了一种更加精确的对流项显式离散方法，由水庆象、王大国完成。第 5 章建立 N-S 方程基于投影法的特征线算子分裂有限元法，该方法在第 2 章基础上，把 N-S 方程分裂成扩散项、对流项和压力修正项，对流项采用多步显式格式，每一个子对流子时间步内采用第 4 章对流项的离散方法，由水庆象、王大国完成。第 6 章是对第 5 章算法的数值性能研究，由水庆象、王大国完成。第 7 章在第 2 章算法基础上，流体自由表面跟踪采用 PCM 方法，建立了基于特征线算子分裂有限元法的水波模型，由王大国完成。

本书的内容是由国家自然科学基金“带刚性分隔板圆柱绕流控制机理及计算方法研究”（No. 51349011）、“滑坡涌浪对大坝冲击破坏的研究”（No. 41072235）、“潮汐循环作用下海水入侵多场耦合模型的机理研究”（No. 50809008）、“滑坡涌浪对大坝冲击作用研究”（No. 41110104031）、“泥石流冲击作用下拦砂坝基底扬压力机理研究”（No. 41372301）以及西南科技大学杰出青年科技人才支持计划“地震波、溃坝波共同作用下混凝土坝损伤破坏机制研究”（No. 13ZX9109）等项目的研究成果共同积累形成。本书的出版得到了西南科技大学矿业工程系一级学科内涵建设项目的资助。在研究过程中，得到了北京飞箭软件公司梁国平研究员、杨小军老师、邓谷雨老师等的全力支持与帮助，在此向他们表达我们最诚挚的感谢！

首次著书，限于作者的知识面和学术水平，书中难免有不妥之处，恳请各位专家和读者批评指正。

作　者

2014 年 4 月 18 日

# 目　　录

# 第 1 章　流体力学中的有限元法研究进展

## 1.1　流体力学中的控制方程

自然界中，液体或低速运动的气体一般可看成不可压缩流体，它们所产生的黏性流动，称为不可压缩黏性流动[1]，这是流体力学中除了不可压理想流体外最重要的典型模型。在数学上，不可压缩流体通过散度为零的连续性方程和著名的 Navier-Stokes（N-S）方程描述，它能够刻画出流体的运动规律，如大气运动、海洋流动和机械内部流动等。原始变量形式的二维非定常不可压 N-S 方程为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{1-1}$$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2}\right)+f_i \tag{1-2}$$

式中，$i,j=1,2$；$(u_i,u_j)=(u,v)$，$u$ 是水平方向速度，$v$ 是垂直方向速度；$p$ 是压强；$t$ 是时间；$\rho$ 是流体密度；$\mu$ 是动力学黏性系数；$f_i$ 是体积力；$(x_1,x_2)=(x,y)$。无量纲后的 N-S 方程为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{1-3}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+f_i \tag{1-4}$$

式中，$Re=\dfrac{\rho UL}{\mu}$ 为雷诺数，$U$ 为特征速度，$L$ 为特征长度。

## 1.2 N-S 方程的数值离散方法

在数学上，N-S 方程既具有混合的抛物-双曲型方程又具有非线性方程的特征，人们对非线性现象的本质认识有限，导致求解的困难，因而数值模拟成为对其研究的一种重要手段。利用数值方法通过计算机求解描述流体运动的控制方程，形成了流体力学的一个分支——计算流体力学。经过多年的发展，创新了多种数值方法，根据对控制方程的离散方式不同一般可以分为：有限差分法（FDM）[2]、有限体积法（FVM）[3]、有限元法（FEM）、格子 Boltzmann 法（LBM）、浸入边界法（IBM）、边界元法（BEM）和无网格法等。

有限差分法的基本思路：在矩形计算网格上采用有限差分近似替代微分方程中的各阶微分项进行数值离散，要求所得的代数方程在网格节点上满足物理量的守恒。该方法适用于各种类型的微分方程，其优点是数学概念清晰、简单，便于编制计算程序，计算精度随差分格式的不同而不同，误差估计、收敛性和稳定性分析的理论已趋于成熟和完善，是应用较多、较为成功的一种方法。但是，有限差分法的局限性在于对计算区域内的复杂几何边界处理通常进行梯度化概化，造成计算模拟边界难以精确而光滑地拟合实际边界，从而给计算精度带来较大的影响。为了克服这一局限，许多学者致力于不规则边界处理的研究，如美国的 Thompson[4]等提出的边界拟合坐标法是改善有限差分法性能的有效方法。这些专门的技术与有限差分法配套使用，大大拓宽了有限差分法的适用范围。

有限体积法的基本思路：将计算区域划分成一系列连续但不重叠的控制体积，并使每个控制体积包围一个网格点，将待解的微分方程对一个控制体积积分，得到一组离散方程，其中的未知数是网格点上因变量数值。为求出控制体积的积分，必须假定因变量值在网格点之间的变化规律，这类似于有限元法。有限体积法直观易懂，物理概念清楚，离散方程的含义就是因变量值在控制体积中的守恒，如同微分方程表示因变量在无限小的控制体积中的守恒。但该方法的计算精度有待提高，不便对离散方程进行数学分析。

有限元法的基本思路：采用由节点变量值所构成的局部多项式来近似变量在

区域内的变换规律，由此导出含有全域变量节点的代数方程，求解方程组就可确定各个节点的物理量值及其空间分布。有限元法的本质就是区域内物理量总体守恒即含有区域内物理量平均误差最小概念上的守恒。数学上可以证明，有限元法特别适用于求解椭圆型、抛物型、双曲型问题中具有椭圆性质的部分。有限元法的优点是网格剖分灵活、边界条件处理简单且容易处理复杂的边界形状。其缺点则是在误差估计、计算结果收敛性和稳定性等方面的理论研究远不及有限差分法严密、完善；有限元法所形成的系数矩阵不总是稀疏的，计算所需的内存多、工作量大，目前仍不能满意地解决一些复杂的水流流动问题，特别是湍流的数值计算中的应用尚不成熟。近年来，一些学者仍不断地提出许多利用有限元法优点的“杂交”数值方法，如有限杂交法、算子分裂法或分步法，试图解决有限元法在抛物型、双曲型问题是所遇到的困难，已取得了一定的成果，并在实际工程中得到应用验证。

LBM[5]是一种新近发展不同于传统数值方法的数值模拟方法，该方法把描述流体粒子团分布变化规律的 Boltzmann 方程在时间和空间上进行离散，使用粒子密度分布函数进行演化，可由粒子密度分布函数直接计算流体的宏观密度和速度。LBM 从离散网格来看具有 Euler 方法的属性，从离散粒子观点来看又具有 Lagrange 方法的特点[6]。近年来，LBM 在众多领域中都得到了成功的运用[7-9]。

浸入边界法通过将复杂结构的边界模化成 N-S 方程的力源项，当这些力加在特定的一些网格上时，可以成功地模拟出任意形状的结构边界[10]。该方法在整个流场使用笛卡儿坐标，并不是按照物体形状生成复杂的贴体网格，因此可以提高计算效率而且节省了网格生成所需要的时间[11]。从浸入边界法提出至今，一方面通过调整浸入边界法的物理模型，引入各种高精度边界插值算法，并结合 FEM、FVM 和 FEM 等算法，发展了各种不同的基于浸入边界法的数值方法。另一方面，该方法的应用领域得到了很大的扩展，从最初的生物力学领域扩展到绕流问题、流固耦合问题、多相流动和海洋与船舶应用等方面。

边界元法的基本思想是用边界积分方程将求解域的边界条件与域内任意一点

的待求变量值联系起来，然后求解边界积分即可[12]。该方法的最大优点是降维，只在求解区域边界上进行离散就能得到整个流场的解，整个计算过程占用的计算机内存资源少，计算精度较高。但是对于 N-S 方程，对应的权函数算子基本解不一定能找到，这就限制了边界元的应用。

无网格法[13]是在对一个问题进行离散时不用事先定义好网格的一种数值方法。该方法不需要节点间的拓扑连接关系，完全避免了传统方法在求解时不断重分网格所带来的精度降低及计算复杂性增加等问题[14]。经过几十年的发展和创新，已提出了一系列的无网格法，大致可分为[15]：基于配点的无网格法[16]、基于积分弱式的无网格法[17]、无网格弱强式法[18]和无网格法与其他方法的耦合法[19]。

## 1.3 N-S 方程有限元法

有限元求解非定常不可压 N-S 方程时存在三个方面的困难[20]：第一是非线性效应的困难。动量方程中由于对流项导致方程不具备自伴随性，当对流占优时，方程呈现出强非线性，应用标准 Galerkin 有限元法对方程进行求解将导致数值结果虚假振荡。第二是不可压缩性约束的困难。对于不可压缩流体，由于压力变量不出现在连续方程中，采用混合有限元法对速度、压力耦合求解时要求速度-压力的插值函数满足 LBB（Ladyshenskaja-Babuska-Brezzi）条件，否则将导致压力场的虚假振荡。第三是计算量大的困难。针对上述有限元求解 N-S 方程时存在的困难，近年来发展了多种方法解决上述问题。

### 1.3.1 投影法

为了满足 LBB 条件，一般要求速度插值函数比压力插值函数高一阶，这一条件限制了简单方便的低阶有限元插值空间的使用。为了避免速度-压力插值函数不满足 LBB 条件而导致的压力场的数值振荡，1968 年，Chorin[21]提出了投影法。投影法的原理是通过引入一个无需满足散度为零约束条件的中间变量对压力和速度

解耦求解，速度和压力解耦后无需要求速度-压力的插值函数满足 LBB 条件，也能够高效率地计算非定常问题[22]。最初的投影法可以归于 Helmholtz-Hodge 分解类投影法。

Helmholtz-Hodge 定理[23]　任意矢量场可以分解为一个无散度矢量场和一个无旋度矢量场之和

$$U = \eta + \nabla\varsigma \tag{1-5}$$

式中，$\nabla\eta = 0$；$\eta$ 表示一个无散度的矢量场。引入到 N-S 方程的求解中，通过引入一个新的变量，该变量表示为一个无散度的速度场 $V'$ 与一个无旋矢量场之和

$$V^* = V' + \nabla\phi \tag{1-6}$$

通过引入中间速度场实现了速度和压力的解耦。整个求解过程可以分为预测步、投影步和校正步三个步骤[23]。

1）预测步。通过引入一个中间速度 $u_i^{n+\theta}$，将式（1-4）中的压力梯度消去，得到只包含速度变量的方程

$$\frac{u_i^{n+\theta} - u_i^n}{\Delta t} + \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^n = \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i}\right) + f_i \tag{1-7}$$

中间速度 $u_i^*$ 不用考虑不可压缩条件。

2）投影步。根据中间速度值求解压力 Poisson 方程得压力值。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+\theta}}{\Delta t} = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \tag{1-8}$$

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \tag{1-9}$$

$u_i^{n+1}$ 应满足连续方程。对式（1-8）两边取散度，结合式（1-9）可得如下压力 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial u_i^{n+\theta}}{\partial x_i} \tag{1-10}$$

由预测步可以得式（1-10）右端项。

3）校正步。用投影步得到的压力值对中间速度值进行修正，由所求得的$u_i^{n+\theta}$和$p^{n+1}$，利用式（1-6）可得$u_i^{n+1}$。

Chorin 在提出投影法后认为其在时间方向上至多只有一阶精度，然而，通过之后的很多学者研究证明，投影法的发展和应用比Chorin所预期的要好很多。Kim和Moin[24]提出了具有二阶精度的投影法；Donea 等[25]将投影法从有限差分领域推广至有限元领域；Brown 等[26]对于不同的投影法作了具体分析并提出了改进方法；刘淼儿等[27-29]在对投影法研究进展进行综述的基础上，发展了在时间上具有三阶精度的投影法。

### 1.3.2 求解 N-S 方程有限元稳定化方法

动量方程中由于对流项导致方程不具备自伴随性，当对流占优时，方程呈现出强非线性，应用标准 Galerkin 有限元法对方程进行求解将导致数值结果虚假振荡。因此，国内外学者分别提出了不同于标准 Galerkin 有限元法的新型的有限元稳定化方法。

1975 年，Zienkiewicz 等 [30]在讨论标准 Galerkin 有限元的振荡问题的基础上，通过把差分法中处理对流项的迎风方法引入有限元法中，提出了一种新的有限元法；1976 年，Christie 等 [31]针对对流扩散方程，提出采用权函数来实现迎风，通过增大节点方向上游的权函数以减小下游的权函数；1977 年，Heinrich 等 [32]将迎风方法应用到二维问题的求解，选取经典试函数与一个高阶函数的组合作为权函数来加大迎风点的权重；1978 年，Hughes[33]通过采用移动单元内二次点来更有效地实现了迎风。早期迎风方法解决多维问题时存在的主要问题是耗散的存在，并且这种耗散在流体流动方向和计算网格不对称时会有较大增加。

1982 年，Brooks 和 Hughes[34]提出了流线迎风 Petrov-Galerkin 有限元法（stream upwind Petro-Galerkin method，SUPG），该方法对权函数在流线方向加上了一项耗散项，流线迎风抑制了与流动方向相垂直的假扩散，从而解决了迎风方法的假扩散问题并保留了迎风方法的优点，提高了计算精度；1984 年，Hughes 等 [35]又将 SUPG 法推广到二维可压缩 Euler 方程组的求解，Johnson[36]给出了具体的理论分析；1987 年，Decloo 和 Oden[37]将自适应网格技术应用到了 SUPG 法中。1989 年，

Hughes 等 [38]在对采用具有等阶插值函数的 Petrov-Galerkin 法[39]研究 Stokes 波的基础上提出了 Galerkin 最小二乘法（Galerkin least-square，GLS）。该方法是在标准 Galerkin 方法的基础上添加余量的最小二乘项，这些项不但可以提高稳定性且不损失精度，而且可以对速度和压力采用等阶插值函数。Droux 和 Hughes[40]在研究 Stokes 流动时提出了基于 GLS 法的边界积分修正形式，该方法比常规的 GLS 具有更好的精度。Tezduyar 等[41–45]对求解 N-S 方程的非标准 Galerkin 有限元法作了大量的研究，分别提出了稳定压力场的 pressure stablized Petrov-Galerkin（PSPG）、时空有限元格式和可变空间域稳定化时空有限元格式的新的有限元法，对多种流体力学问题均成功地采用了上述有限元法进行分析。

1984 年，Donea[46]提出了 Taylor-Galerkin 法，该方法将时间导数项按时间向前的 Taylor 展开式展开，其中包括至少二阶以上的时间导数项，然后根据原控制方程，将展开式中对时间的高阶导数项转化为对空间的导数项，从而得到一般的时间离散方程，再由标准 Galerkin 有限元法在空间上对方程进行离散。这种格式稳定性较好，且提高了计算精度，相比于 SUPG 法，不必修改自由参数。王小华等 [47]在此基础上提出了二阶全展开 Euler-Taylor-Galerkin（ETG）有限元方法。它考虑黏性不可压缩流 N-S 方程中各个子项的作用，利用二阶 Taylor 展开完成时间项向空间项的转化，采用时间推进和张量分析的方法推导了 N-S 方程的有限元离散格式。1993 年，Jiang 和 Kawahara[48]提出了一种基于 Taylor 展开的三步有限元法，相比于 Taylor-Galerkin 法，该有限元不包含高阶微分项，适用于非线性多维问题及具有复杂边界形状的流动，具有计算简便、精度高和数值稳定性好等优点。李玉成等[49]应用三步有限元法结合大涡模拟方法模拟了波浪场中海底管线周围流场及其受力情况。赵静等[50]在三步有限元法的基础上，利用大涡模拟湍流模型对带横隔板圆柱绕流进行了分析。黄橙[51]将三步有限元方法与 SUPG 有限元法相结合提出了新的有限元法，利用该算法与大涡模拟湍流模型对风作用于建筑物的高雷诺数湍流场的钝体绕流问题展开了研究。

1985 年，Morton[52]发展了特征线-Galerkin 法。该方法沿特征线对时间进行离散，把对流扩散方程化为形式上不含对流项的扩散方程求解，空间上采用标准

Galerkin 法进行离散。该方法利用对流扩散问题的物理力学特征，考虑沿特征线方向的离散，可以有效克服数值振荡，从而保证数值解的稳定。当方程对流占优时，解沿特征方向的变化比沿时间方向的变化慢得多，因此采用特征线-Galerkin 法可以在不损失精度的情况下，取较大的时间步长，从而提高计算效率。1995 年，O.C.Zienkiewicz 提出了 Characteristic-Based Split（CBS）法[53]，它是结合分离算法与特征线-Galerkin 法的一种比较新的算法。CBS 算法在时间上使用特征线-Galerkin 法进行离散，用分离算法获得流体速度和压力的求解步骤，空间上使用标准 Galerkin 有限元法进行离散。它可直接由 N-S 方程推导出较为合理的平衡耗散项，与以往采用人工或经验修正权函数的方法不同，可对速度和压力采用相同的插值函数，并同时满足 LBB 条件。利用该方法成功求解了层流和湍流、可压缩流和不可压缩流以及具有自由表面的流体和固体的相互作用问题[54]。李娜和吉洪湖[55]基于 CBS 算法实现了对流动-传热-变形耦合问题的研究。赵尧军等[56]基于全微分形式，采用动量特征线实施坐标变换提出了显式时间离散 CBS 有限元法，该方法保持了传统 CBS 算法的特点且在时间上具有二阶精度。孙旭和张家忠[57]将传统 CBS 算法与动网格技术相结合，提出了一种求解具有动边界流动问题数值方法，基于该方法对做简谐振动圆柱绕流问题进行了研究，在此研究基础上采用 CBS 算法对非线性连续介质流固耦合问题进行了分析[58]。张小华[59]将无网格方法与 CBS 算法结合提出了无网格 CBS 算法。

2000 年，Onate[60]提出了有限增量微积分（finite increment calculus，FIC）的有限元法，该方法有效地求解了包括局部大梯度的对流-扩散问题、不可压缩黏性流、可压缩流动中的激波问题和自由表面问题。Codina 等[61]在分析非增量型分布算法压力稳定机制基础上发展了压力梯度投影法。2007 年，段庆林和李锡夔[62]在 FIC 的理论框架下，通过引入附加变量，发展了稳定型的分布算法。张一丁和韩先洪[63]在 Crank-Nicolson 时间分裂法的框架内分别引入 FIC 压力稳定方法和离散黏弹应力分裂方法（DEVSS）发展一种求解黏弹性流动问题的新型有限元法。