

高等职业教育课程改革规划精品教材

线性代数

Linear Algebra

主 编 甘培锋
康军凤
丁 涛

经济科学出版社
Economic Science Press

高等职业教育课程改革规划精品教材

线性代数

主 编 甘培锋 康军凤 丁 涛

经济科学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数/甘培锋, 康军凤, 丁涛主编. —北京:
经济科学出版社, 2014. 2
高等职业教育课程改革规划精品教材
ISBN 978 - 7 - 5141 - 4192 - 4

I. ①线… II. ①甘…②康…③丁… III. ①线性代数 -
高等职业教育 - 教材 IV. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 316909 号

责任编辑: 杜 鹏
责任校对: 靳玉环
责任印制: 邱 天

线 性 代 数

主 编 甘培锋 康军凤 丁 涛
经济科学出版社出版、发行 新华书店经销
社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮编: 100142
总编部电话: 010 - 88191217 发行部电话: 010 - 88191522

网址: [www. esp. com. cn](http://www.esp.com.cn)

电子邮件: [esp_ bj@ 163. com](mailto:esp_bj@163.com)

天猫网店: 经济科学出版社旗舰店

网址: [http: //jjkxcbs. tmall. com](http://jjkxcbs.tmall.com)

北京万友印刷有限公司印装

710 × 1000 16 开 7.5 印张 160000 字

2014 年 3 月第 1 版 2014 年 3 月第 1 次印刷

印数: 0001—4000 册

ISBN 978 - 7 - 5141 - 4192 - 4 定价: 18.00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换。电话: 010 - 88191502)

(版权所有 翻印必究)

编写说明

本教材集编者十多年的高等职业教育的教学经验，在对讲课讲义进行了多次修改和完善后而形成的。

高等职业学校的学生以职业培训为主，理论学习是为职业培训服务的，所以数学课的教学任务应该是“打好基础，够用为度，为专业服务”，为此本教材中去掉了对于经济工作和管理工作并不急需的内容以及某些定理的严格证明。

本教材不求深、不求全，只求实用，注意与专业技能课的接轨，但也兼顾数学的体系与学生综合素质的提高，保证知识的科学性、系统性、严密性，由浅入深，循序渐进，问题明确，难点分散，便于理解、学习。在概念的引入、例题的选择和习题的配置上，既重视对理论的解析与应用，又重视对学生解决实际问题的能力的培养，突出了应用性和实用性的特点，内容通俗易懂，充分体现了高等职业教育的特色。

本教材共分为四章，前三章是在学习行列式与矩阵的基础上学习解线性方程组，第四章是前面所学内容在经济方面的应用。第一、三章由甘肃省经济学校甘培锋编写，第二章由康军凤编写，第四章由丁涛编写。全书由甘培锋审阅定稿。

由于编者水平有限，本教材中肯定还有不少缺点甚至错误，谨请大家批评指正。

编者

2014年1月

目 录

第一章 行列式	1
第一节 行列式的概念	1
习题 1-1	5
第二节 行列式的性质	6
习题 1-2	11
第三节 行列式按行(列)展开	12
习题 1-3	16
第四节 克莱姆法则	17
习题 1-4	20
第二章 矩阵	21
第一节 矩阵的概念和运算	21
一、矩阵的概念	21
二、矩阵的运算	24
三、矩阵的转置	29
四、 n 阶矩阵的行列式	30
习题 2-1	31
第二节 逆矩阵	32
习题 2-2	35
第三节 矩阵的初等变换	35
习题 2-3	45
第四节 矩阵的秩	47
习题 2-4	48
第三章 线性方程组	50
第一节 消元法解线性方程组	50
习题 3-1	55

第二节 线性方程组解的研究	56
一、齐次线性方程组解的判断	56
二、非齐次线性方程组的解的判断	57
习题 3-2	59
第三节 n 维向量空间	59
一、向量的概念及运算	59
二、向量的线性组合	62
习题 3-3	64
第四节 线性方程组解的结构	65
一、齐次线性方程组解的结构	65
二、非齐次线性方程组解的结构	70
习题 3-4	72
第四章 线性规划	74
第一节 线性规划的数学模型	74
一、线性规划问题的数学模型	74
二、线性规划问题的标准形式	78
习题 4-1	79
第二节 两个变量的线性规划问题的图解法	81
习题 4-2	88
第三节 单纯形法	89
一、单纯形法的基本思路	89
二、基本可行解与基变量	89
三、单纯形表及单纯形法的步骤	91
习题 4-3	99
总复习题	100
习题答案	105
参考文献	113

第一章

行列式

无论是在生产管理活动中,还是在商品流通和交换过程中,许多变量之间的相互关系在一定程度上可分为线性关系和非线性关系两大类。线性代数就是研究变量之间线性关系的一门基础学科。行列式是研究线性代数不可缺少的工具。在本章中,我们将通过解线性方程组的方法,给出二阶、三阶行列式的概念,然后给出 n 阶行列式的概念,讨论行列式的性质,以及行列式的计算方法,最后应用 n 阶行列式解 n 个方程联立的 n 元线性方程组。

第一节 行列式的概念

行列式的概念可以从解线性方程组引入。未知量是一次的方程称为线性方程,如 $2x + y + 3 = 0$, $2x_1 + 5x_2 + 7 = 0$ 等。二元一次线性方程组的一般形式是:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, x_1, x_2 为未知量,系数 a_{ij} ($i, j = 1, 2$) 的第一个脚标 i 表示这个系数处在第 i 个方程,第二个脚标 j 表示这个系数是第 j 个未知量的系数。

解二元线性方程组的一般方法有代入消元法和加减消元法两种,对于这两种方法我们都是熟知的。

现在我们用加减消元法解方程组 (1.1)。

(1) $\times a_{22}$ - (2) $\times a_{12}$ 得:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

于是有:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

同理得:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.2)$$

为方便研究,对于上式的分母我们引入如下记号:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.3)$$

这样规定的记号 (1.3) 称为二阶行列式。其中, $a_{ij} (i, j=1, 2)$ 称为此二阶行列式的元素, 横排称为行, 竖排称为列。元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示这个元素位于行列式的第 i 行, 称为行标; 第二个下标 j 表示这个元素位于行列式的第 j 列, 称为列标。

同理, 对于式 (1.2) 的分子, 我们分别记作:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \quad (1.4)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \quad (1.5)$$

这里 D_1 和 D_2 是用常数 b_1 、 b_2 分别代替 D 中第一列和第二列元素所得的行列式。于是在 $D \neq 0$ 时, 方程组 (1.1) 的解可用行列式简明地表示为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \quad (1.6)$$

【例 1-1】用行列式解二元一次方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

解 先计算三个二阶行列式。

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - 3 \times 3 = 1,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 13 \times 2 - 3 \times 8 = 2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times 8 - 13 \times 3 = 1.$$

因为 $D = 1 \neq 0$, 所以方程组有解, 其解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{1} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{1} = 1.$$

二阶行列式的代数和可用图 1-1 的对角线法则记忆, 其中实线连接的两元素的乘积取正号, 虚线连接的两元素的乘积取负号。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1

类似地, 为了讨论三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.7)$$

的解, 引进记号 D :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \quad (1.8)$$

式 (1.8) 的左端称为三阶行列式。式 (1.8) 的右端为左端三阶行列式表示的代数, 可用图 1-2 的对角线法记忆。其中实线连接的 3 个元素的乘积取正号, 虚线连接的 3 个元素的乘积取负号。

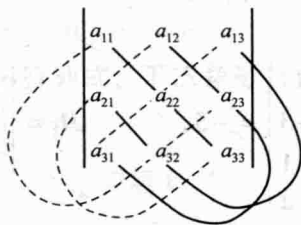


图 1-2

【例 1-2】

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 7 \times 8 + 4 \times (-2) \times 2 \times 4 + 8 \times (-1) \times (-5) - (-5) \times 7 \times 2 - 4 \times 8 \times 8 - 3 \times (-2) \times (-1) = 0$$

式 (1.8) 左端的三阶行列式是由方程组 (1.7) 的系数构成的, 称为方程组 (1.7) 的系数行列式。由消元法可知, 当系数行列式不为零时, 方程组 (1.7) 有解, 其解可用行列式表示为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (1.9)$$

简记为 $x_i = \frac{D_i}{D}$ ($i=1, 2, 3$), 其中:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

【例 1-3】用行列式解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

解 这个方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 + 2 + 1 + 3 - 4 = -5 \neq 0.$$

因此, 有唯一解。又因

$$D_1 = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

所以方程解为: $x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = -1.$

上面我们解线性方程组引出了二阶行列式和三阶行列式。可以看出, 二阶行列式和三阶行列式的值都是实数, 且它们的行数和列数相等, 分别为两行两列和三行三列, 由此我们很自然地想到了解 n 元线性方程组和 n 阶行列式。于是有:

定义 1.1 由 n^2 个元素 $a_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$ 排成 n 行 n 列, 两边各加一条竖线段, 构成记号:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.10)$$

在规定了它的运算规则后, 称为 n 阶行列式。

(1.10) 中, 从左上角到右下角的对角线叫做**主对角线**, 另一对角线叫做**次**

对角线。 n 阶行列式简记为 D 或 $|a_{ij}|$ 。当 $n=1$ 时, 由一个元素 a 构成的一阶行列式规定为 a 。

形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

的行列式分别称为上三角形行列式、下三角形行列式和对角形行列式。其中 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 不全为零。

习题 1-1

1. 计算下列行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(6) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(7) \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 9 \\ 5 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$

$$(8) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$(9) \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$$

2. 解下列线性方程组。

$$(1) \begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

第二节 行列式的性质

定义 1.2 将行列式 D 的行与列互换所得到的行列式, 称为 D 的转置行列式, 记为 D^T 或 D' 。即:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则有:

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

性质 1 将行列式转置, 行列式的值不变, 即 $D = D^T$ 。

性质 1 说明, 在行列式中行与列的地位是对称的, 行列式中有关行的性质对列也同样成立。所以在对下述性质的叙述中只叙述行而不叙述列。

性质 2 对换行列式两行的位置, 行列式的值变号。即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【例 1-4】

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

推论 如果行列式 D 中某两行的对应元素分别相等, 那么这个行列式的值等于零, 即 $D=0$ 。

性质 3 把行列式某一行的所有元素同乘以某常数 k , 等于用常数 k 乘原行

列式。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这就是说，行列式中某一行公因子可以提出来。

【例 1-5】

$$\begin{vmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 3 & 2 \times 1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

推论 1 如果行列式 D 中有一行元素全为零，那么 $D=0$ 。

推论 2 如果行列式 D 中有两行的对应元素成比例，那么 $D=0$ 。

性质 4 如果行列式 D 的某一行元素都可以表示为两项之和，那么这个行列式等于从这些元素里各取一项作成相应的行而其余各行不变的两个行列式的和。

即若：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

则：

$$D = D_1 + D_2.$$

【例 1-6】

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1+1 & 1+2 & 2+3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

性质 5 将行列式某一行各元素的 k 倍加到另一行的对应元素上，行列式的值不变。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【例 1-7】

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \times 2 + 1 & 3 \times 2 + 2 & 2 \times 2 + 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 13.$$

【例 1-8】计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 21 & 27 & 33 \end{vmatrix}$$

解 行列式 D 的第三行可以分解成第一行与第二行元素的 5 倍之和, 由性质得:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

计算一般的行列式, 可以利用行列式的性质将其化为三角形行列式来计算。化为上三角形行列式的做法是: 若处在 a_{11} 位置上的元素为零, 则将第 1 行 (列) 与另一行 (列) 交换 (此时应在行列式前加负号), 使 $a_{11} \neq 0$; 然后, 第 i ($i=2, 3, \dots, n$) 行加上第 1 行的 $-a_{i1}/a_{11}$ 倍, 使第 1 列元素除 a_{11} 外全为零; 再对第 2 至第 n 行 (列) 用同样方法, 如此继续下去, 直至成为上三角形行列式为止。这时主对角线上各元素的乘积就是行列式的值。

【例 1-9】用化为三角形行列式的方法计算

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

解 具体步骤如下:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

(第 3 行乘以 -1 加到第 1 行)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

(第1行乘以-5、-3分别加到第2、3行)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 20 & 13 \\ 0 & 15 & 10 \end{vmatrix}$$

(第3行乘以-1加到第2行)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 15 & 10 \end{vmatrix}$$

(第2行乘以-3加到第3行)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 1 = 5.$$

【例1-10】计算下列四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 10 \\ 2 & 2 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 10 \\ 2 & 2 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

(交换第1行与第2行的位置)

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & -3 & 11 & -7 \\ 2 & 2 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

(第2行加第1行的-3倍, 第3行加第1行的-2倍, 第4行加第1行的-2倍)

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & -15 & -7 & -37 \\ 0 & -6 & -3 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & -13 \end{vmatrix}$$

(第2、3、4行分别提取公因子-1)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & 15 & 7 & 37 \\ 0 & 6 & 3 & 14 \\ 0 & 7 & 4 & 13 \end{vmatrix}$$

(第2行加第4行的-2倍)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 6 & 3 & 14 \\ 0 & 7 & 4 & 13 \end{vmatrix}$$

(第3行加第2行的-6倍, 第4行加第2行的-7倍)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & -52 \\ 0 & 0 & 11 & -64 \end{vmatrix}$$

(第4行加第3行的-1倍)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & -52 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \end{vmatrix}$$

(第4行提取公因子2后与第3行互换位置)

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & -52 \end{vmatrix}$$

(第4行加第3行的-9倍)

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times 2 = -4.$$

【例1-11】计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

(第1行加其他各行的1倍)

$$= \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

(第1行提取公因子 $x+(n-1)a$)

$$= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

(第2至 n 列分别加第1列的 $-a$ 倍)

$$= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

习题 1-2

1. 若将行列式的所有元素改变符号, 行列式如何变化?
2. 如果行列式第1行不变, 从第2行开始, 顺次每行都加上它前面一行, 行列式如何变化?
3. 利用行列式的性质计算下列行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 101 & 102 & 103 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 119 \\ \frac{1}{3} & 2 & 122 \\ \frac{1}{4} & 3 & 123 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$