经济数学基础

线性代数（第4版）

陈卫星 崔书英 编著

清华大学出版社

经济数学基础

线性代数（第4版）

陈卫星 崔书英 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书是山东省高等学校面向21世纪教学内容和课程体系改革计划中的立项教材，是根据教育部高等学校财经类专业线性代数教学大纲的要求编写而成的. 全书分为六章，各章内容分别是：行列式，线性方程组，矩阵，向量空间，矩阵的特征值和特征向量，二次型. 在内容的讲解上，注重从直观背景出发来进行阐述，并将数学知识与经济问题相联系. 在每节都安排习题的基础上，还为每章配备了补充题，供学生练习和复习之用.

本书可作为高等学校经济、管理类学科各专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈卫星，崔书英编著. --4版. --北京：清华大学出版社，2014
(经济数学基础)
ISBN 978-7-302-37304-9

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①陈…　②崔…　Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第159921号

责任编辑：刘　颖
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市中晟雅豪印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　张**：13.5　　**字　　数**：278千字
版　　次：2000年7月第1版　2014年8月第4版　　**印　　次**：2014年8月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：25.00元

产品编号：058631-01

编委会

主　编　韩玉良

编　委（按姓氏笔画为序）

于永胜　曲子芳　李宏艳　陈卫星

郭　林　崔书英　隋亚莉

序

“经济数学基础”是高等学校经济类和管理类专业的核心课程之一.该课程不仅为后继课程提供必备的数学工具,而且是培养经济管理类大学生数学素养和理性思维能力的最重要途径.作为山东省高等学校面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的项目,中国煤炭经济学院和烟台大学的部分老师组成课题组,详细研究了国内外一些有关的资料,根据经济管理专业的特点和教学大纲的要求,并结合自己的教学经验,编写了这套“经济数学基础”教材,包括《微积分》、《线性代数》、《概率统计》和《数学实验》.经过了一年多的试用,在充分听取校内外专家意见的基础上,课题组对教材进行了全面的修改和完善,使之达到了较高的水平.这套教材有以下特点:

第一,在加强基础知识的同时,注意把数学知识与解决经济问题结合起来.在教材各部分都安排了经济应用的内容,同时在例题、习题中增加了相当数量的经济应用问题,这有助于培养学生应用数学知识解决实际问题,特别是经济问题的能力.

第二,增加了数学实验的内容.其中一部分是与教学内容相关的演示与实验,借助于这些演示和实验,可以帮助学生更直观地理解和掌握所学的知识;另一部分是提供一些研究型问题(其中有相当一部分是经济方面的),让学生参与运用所学的数学知识建立模型,再通过上机实验来解决实际问题.应该说,这是对传统教学方法和教学过程较大的改革.

第三,为了解决低年级大学生普遍感到高等数学课抽象难学、不易掌握的问题,对一些重要的概念和定理尽可能从实际问题出发,从几何、物理或经济的直观背景出发,提出问题,然后再进行分析和论证,最后得到结论.对一些比较难的定理,则注重

第4版前言

随着以计算机为代表的现代技术的发展及市场经济对多元化人才的需求，我国人才培养的策略和规模都发生了巨大的变化，相应的教学理念和教学模式也都在不断的调整之中. 作为传统教育科目的大学数学受到了很大的冲击，改革与探索势在必行. 在此背景下，1998 年我们承担了山东省高等学校面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划的一个项目，编写了一套适合财经类专业使用的“经济数学基础”系列教材. 这套系列教材包括《微积分》、《微积分学习指导》、《线性代数》、《线性代数学习指导》、《概率统计》、《概率统计学习指导》、《数学实验》7 本书，于 2000 年 8 月出版. 这套系列教材 2001 年获得山东省优秀教学成果奖. 结合教学实际，2004 年、2007 年教材分别出版了第 2 版和第 3 版.

随着我国高等教育改革的深入进行，大多数普通本科院校将培养适应社会需要的应用型人才作为主要的人才培养模式，因此基础课的课时被大量压缩. 这对经济管理类专业大学数学基础课的教学提出了新的更高的要求：在大幅度减少课时的同时，一方面要满足为后继课程提供数学基础知识与基本技能的需要，另一方面还要兼顾研究生入学考试大纲中对于数学知识与技能的要求，同时还要保证课程的教学质量. 正是在这一背景下我们对《经济数学基础》系列教材进行了新的修订.

本次修订基于以下原则：一是覆盖研究生入学考试大纲中数学 3 的全部内容；二是保证知识的系统性、连贯性. 在上述原则的基础上，主要在以下几个方面作了调整和修改：

(1) 在总体思路上主要是采用归纳推理方法，以减轻课程的抽象程度. 对几个教学上的难点做了创新的处理. 例如行列式按行列展开定理的证明，矩阵的属于不同特征值的特征向量线

运用从特殊到一般的归纳推理方式.这样由浅入深使学生易于接受和掌握,同时在学习中领略了数学概念、数学理论的发现和发展过程,这对培养学生创造性思维能力是有帮助的.

相信这套教材的出版,对经济和管理类专业大学生的学习及综合素质的提高,定会起到积极的作用.

郭大钧

于山东大学南院

2000 年 6 月 16 日

性无关等定理的证明都采用了自己的新证法. 这些证法简化了传统教科书中的证明，使学生理解起来比较容易.

(2) 对一些不是必要的内容进行了适当的精简，使得重点突出并且内容前后衔接更连贯. 例如，对第 4 章内容作了比较大的改动. 对一些比较重要但可以精简的内容加了 * 号，供教师在教学中根据课时及学生学习情况进行适当的取舍.

(3) 习题的配置分两大类，基本题目及补充题目. 它们均为复习巩固教材内容而配备. 若想在此基础上追求更高的层次，可参考我们编写的线性代数教学指导书中的习题.

高等教育的发展使得教学环境和教学对象都发生了非常大的变化，为了适应学生个性化发展的需求，很多学校都实行了分层次教学. 本套教材通过辅助图书——学习指导的配合，可以灵活地实现这一教学实践的实施.

在本书的修订过程中，许多使用本教材的老师提出了宝贵的建议，我们在此致谢. 同时我们诚恳希望广大师生在今后的使用过程中能继续提出宝贵意见，以便将来作进一步修改. 最后感谢清华大学出版社对本系列教材的再版给予的大力支持.

编 者

2014 年 5 月

目录

第 1 章 行 列 式

行列式的理论是人们从解线性方程组的需要中建立和发展起来的，它在线性代数以及其他数学分支中都有着广泛的应用. 本章我们主要讨论下面几个问题：

(1) 行列式的定义；

(2) 行列式的基本性质及计算方法；

(3) 利用行列式求解线性方程组(克莱姆法则).

1.1 二阶与三阶行列式

行列式的概念起源于解线性方程组，它是从二元与三元线性方程组的求解公式引出来的. 因此我们首先讨论解线性方程组的问题.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1, x_2 的值，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

这就是一般二元线性方程组的公式解. 但这个公式很不好记忆，应用时不方便，因此，我们引进新的符号来表示(1.2)式这个结果，这就是行列式的起源. 我们称 4 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为二阶行列式. 它含有两行两列，横的叫做行，纵的叫做列. 行列式中的数叫做行列式的元素. 从上式知，二阶行列式是这样两项的代数和：一项是从左上角到右下角的对角线(又叫做行列式的主对角线)上两个元素的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角的对角线(又叫做次对角线)上两个元素的乘积，取负号.

根据定义，容易得知，(1.2)式中的两个分子可分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，线性方程组(1.1)的解(1.2)式可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.3}$$

像这样用行列式来表示的解，形式简便整齐，便于记忆.

首先，(1.3)式中分母的行列式是从线性方程组(1.1)中的系数按其原有的相对位置而排成的，称为系数行列式. 分子中的行列式，x_1，x_2 的分子是分别把系数行列式中的第1列、第2列换成线性方程组(1.1)的常数项得到的.

例 1.1 用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=1, \\ x_1+3x_2=2. \end{cases}$$

解 这时

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-4\times 1=2\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\times 3-4\times 2=-5, \quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-1\times 1=3,$$

因此，线性方程组的解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{2}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

作类似的讨论，我们引入三阶行列式的概念，称符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.5}$$

为三阶行列式,它有 3 行 3 列,是 6 项的代数和.这 6 项的和也可用对角线法则来记忆:从左上角到右下角 3 个元素的乘积取正号,从右上角到左下角 3 个元素的乘积取负号,等等.如图 1.1 所示.

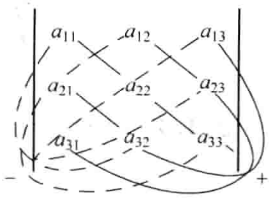

图 1.1

例 1.2 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 2\times3\times5+1\times1\times2+(-4)\times3\times2-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1 \\ &= 30+2-24-12+20-6=10.\end{aligned}$$

令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D\neq0$ 时,(1.4)式的解可简单地表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.6}$$

它的结构与前面二元一次方程组的解类似.

例 1.3 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1, \\ x_1+3x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28,\quad D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,\quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

例 1.4 已知 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，问 a,b 应满足什么条件(其中 a,b 均为实数)？

解 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2$. 若要 $a^2+b^2=0$，则 a 与 b 须同时等于零. 因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，给定行列式等于零.

为了得到更为一般的线性方程组的求解公式，我们需要引入 n 阶行列式的概念，为此，下节先介绍排列的有关知识.

习题 1.1

1. 计算下列二阶、三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ 1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c+a & d+b \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ -1 & x & 1 \\ x & -1 & x \end{vmatrix}$；　(5) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$.

2. 当 a,b 为何值时，行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}=0.$$

3. 解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 5x_1-3x_2=1, \\ x_1+11x_2=6; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x_1+x_2=7, \\ x_1-3x_2=-2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1-4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} -5x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1-6x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2-7x_3=0. \end{cases}$

1.2 排列

在 n 阶行列式的定义中，要用到排列的某些知识，为此先介绍排列的一些基本知识.

定义 1.1 由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

例如，1234 是一个 4 级排列，3412 也是一个 4 级排列，而 52341 是一个 5 级排列. 由数码 1,2,3 组成的所有 3 级排列为 123,132,213,231,312,321，共有 $3!=6$ 个，而所有的 n 级排列共有 $n!$ 个.

数字由小到大的 n 级排列 $1234\cdots n$ 称为自然序排列.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面 $(i_s<i_t)$，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记作 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如，在 4 级排列 3412 中，31,32,41,42 各构成一个逆序数，所以，排列 3412 的逆序数为 $N(3412)=4$. 同样可计算排列 52341 的逆序数为 $N(52341)=7$.

容易看出，自然序排列的逆序数为 0.

定义 1.3 如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇数，则称此排列为奇排列；逆序数是偶数的排列则称为偶排列.

例如，排列 3412 是偶排列，排列 52341 是奇排列. 自然序排列 $123\cdots n$ 是偶排列.

定义 1.4 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果其中某两个数 i_s 与 i_t 对调位置，其余各数位置不变，就得到另一个新的 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一个对换，记作 (i_s,i_t).

如在排列 3412 中，将 4 与 2 对换，得到新的排列 3214. 并且我们看到：偶排列 3412 经过 4 与 2 的对换后，变成了奇排列 3214. 反之，也可以说奇排列 3214 经过 2 与 4 的对换后，变成了偶排列 3412.

一般地，有以下定理.

定理 1.1 任一排列经过一次对换后，其奇偶性改变.

证明 首先讨论对换相邻两个数的情况，该排列为

$$a_1a_2\cdots a_l\,ijb_1b_2\cdots b_mc_1c_2\cdots c_n.$$

将相邻两个数 i 与 j 作一次对换，则排列变为

$$a_1a_2\cdots a_l\,jib_1b_2\cdots b_mc_1c_2\cdots c_n.$$

显然对于数 $a_1,a_2,\cdots,a_l,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 和 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 来说，并不改变它们的逆序数. 但当 $i<j$ 时，经过 i 与 j 的对换后，排列的逆序数增加 1 个；当 $i>j$ 时，经过 i 与 j 的对换后，排列的逆序数减少 1 个. 所以对换相邻两数后，排列改变了奇偶性.

再讨论一般情况，设排列为

$$a_1a_2\cdots a_l i b_1 b_2\cdots b_m j c_1 c_2\cdots c_n.$$

将 i 与 j 作一次对换，则排列变为

$$a_1a_2\cdots a_l j b_1 b_2\cdots b_m i c_1 c_2\cdots c_n,$$

这就是对换不相邻的两个数的情况. 但它可以看成是先将 i 与 b_1 对换，再与 b_2 对换，……，最后与 b_m 的对换，即 i 与它后面的数作 m 次相邻两数的对换变成排列

$$a_1a_2\cdots a_l b_1 b_2\cdots b_m i j c_1\cdots c_n,$$

然后将数 j 与它前面的数 $i,b_m,\cdots,b_1$ 作 $m+1$ 次相邻两数的对换而成. 因此对换不相邻的数 i 与 j（中间有 m 个数），相当于作 $2m+1$ 次相邻两数的对换. 由前面的证明知，排列的奇偶性改变了 $2m+1$ 次，而 $2m+1$ 为奇数，因此，不相邻的两数 i,j 经过对换后的排列与原排列的奇偶性不同.

定理 1.2 在所有的 n 级排列中（$n\geqslant 2$），奇排列与偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

证明 设在 $n!$ 个 n 级排列中，奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个. 对这 p 个奇排列施以同一个对换，如都对换$(1,2)$，则由定理 1.1 知，p 个奇排列全部变为偶排列，由于偶排列一共只有 q 个，所以 $p\leqslant q$；同理将全部的偶排列施以同一对换$(1,2)$，则 q 个偶排列全部变为奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以 $q=p$，即奇排列与偶排列的个数相等. 又由于 n 级排列共有 $n!$ 个，所以 $q+p=n!$，$q=p=\frac{n!}{2}$.

定理 1.3 任一 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 都可通过一系列对换与 n 级自然序排列 $12\cdots n$ 互变，且所作对换的次数与这个 n 级排列有相同的奇偶性.

证明 对排列的级数用数学归纳法证之.

对于 1 级排列，结论显然成立.

假设对 $n-1$ 级排列，结论成立. 现在证明对于 n 级排列，结论也成立.

若 $i_n=n$，则根据归纳假设 $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ 是 $n-1$ 级排列，可经过一系列对换变成 $12\cdots(n-1)$，于是这一系列对换就把 $i_1i_2\cdots i_n$ 变成 $12\cdots n$. 若 $i_n\neq n$，则先施行 i_n 与 n 的对换，使之变成 $i_1'i_2'\cdots i_{n-1}'n$，这就归结成上面的情形. 相仿地，$12\cdots n$ 也可经过一系列对换变成 $i_1i_2\cdots i_n$，因此结论成立.

因为 $12\cdots n$ 是偶排列，由定理 1.1 可知，当 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇（偶）排列时，必须施行奇（偶）数次对换方能变成偶排列，所以，所施行对换的次数与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 具有相同的奇偶性.

习题 1.2

1. 计算下列各排列的逆序数：

(1) $N(3742561)$；　　(2) $N(n(n-1)\cdots 21)$；

(3) $N(653241)$； (4) $N(1357\cdots(2n-1)2468\cdots(2n))$.

2. 决定 i,j 的值，使(1)$1245i6j97$ 为奇排列；(2)$3972i15j4$ 为偶排列.

3. 排列 $n(n-1)(n-2)\cdots321$ 经过多少次相邻两数对换变成自然顺序排列？

1.3 n阶行列式

本节我们从观察二阶、三阶行列式的特征入手.引出 n 阶行列式的定义.

已知二阶与三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

其中元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示这个元素位于第 i 行，称为行标；第二个下标 j 表示此元素位于第 j 列，称为列标.

我们可以从中发现以下规律：

(1) 二阶行列式是 2! 项的代数和，三阶行列式是 3! 项的代数和；

(2) 二阶行列式中每一项是两个元素的乘积，它们分别取自不同的行和不同的列，三阶行列式中的每一项是三个元素的乘积，它们也是取自不同的行和不同的列；

(3) 每一项的符号是：当这一项中元素的行标是按自然序排列时，如果元素的列标为偶排列，则取正号；如果元素的列标为奇排列，则取负号.

作为二、三阶行列式的推广，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 由排成 n 行 n 列的 n^2 个数 a_{ij}(也称为元素)($i,j=1,2,\cdots,n$)组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.它是 n! 项的代数和，每一项是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积，各项的符号是：每一项中各元素的行标按自然序排列，如果列标的排列为偶排列时，则取正号；如果列标的排列为奇排列，则取负号.于是得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.7}$$