浙江省高等教育重点建设教材

概率论与数理统计

PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

（第三版）

许　冰 / 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

浙江省高等教育重点建设教材

概率论与数理统计

PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

(第三版)

许　冰 / 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 许冰主编. —3 版. —杭州：浙江大学出版社，2013.9

ISBN 978-7-308-11915-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①许… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 240526 号

概率论与数理统计

许　冰　主编

卓文新　何静慧　副主编

责任编辑　周卫群

封面设计　刘依群

出版发行　浙江大学出版社

（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310007）

（网址：http://www.zjupress.com）

排　　版　杭州中大图文设计有限公司

印　　刷　杭州杭新印务有限公司

开　　本　710mm×960mm　1/16

印　　张　12.5

字　　数　224 千

版 印 次　2013 年 9 月第 3 版　2013 年 9 月第 5 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-11915-3

定　　价　22.00 元

目　录

第 1 章　概率计算 …… 001

§ 1.1　随机事件的集合描写 …… 001

§ 1.2　随机事件的概率度量 …… 004

§ 1.3　加法公式与乘法公式 …… 009

§ 1.4　全概率公式和 *Bayes* 公式 …… 015

§ 1.5　独立事件模型 …… 017

§ 1.6　随机事件与不确定性 …… 018

本章小结 …… 019

习题 1 …… 019

第 2 章　随机变量及其分布 …… 026

§ 2.1　随机变量 …… 026

§ 2.2　离散型分布 …… 028

§ 2.3　连续型概率密度 …… 032

§ 2.4　分布函数——离散与连续的统一 …… 038

§ 2.5　随机变量函数的分布 …… 041

本章小结 …… 047

习题 2 …… 048

第 3 章　联合分布 …… 056

§ 3.1　二维分布函数 …… 056

§ 3.2　联合分布函数 …… 057

§ 3.3　概率计算——已知联合求边缘 …… 058

§ 3.4　概率计算——已知边缘求联合 …… 065

§ 3.5　二维随机变量函数的分布 …… 068

本章小结 …… 071

习题 3 …… 073

第 4 章　数字特征 …… 078

§ 4.1　数学期望 …… 078
§ 4.2　方差 …… 087
§ 4.3　协方差和相关系数 …… 095
本章小结 …… 099
习题 4 …… 102

第 5 章　大数定律和中心极限定理 …… 108

§ 5.1　大数定律 …… 108
§ 5.2　中心极限定理 …… 111
本章小结 …… 114
习题 5 …… 115

第 6 章　参数估计 …… 118

§ 6.1　基本概念 …… 118
§ 6.2　三个抽样分布 …… 123
§ 6.3　点估计 …… 132
§ 6.4　区间估计 …… 139
本章小结 …… 149
习题 6 …… 154

第 7 章　假设检验 …… 163

§ 7.1　假设检验的概念 …… 163
§ 7.2　总体期望值的假设检验 …… 167
§ 7.3　总体方差的假设检验 …… 171
§ 7.4　总体比率的假设检验 …… 173
§ 7.5　假设检验与置信区间 …… 175
本章小结 …… 176
习题 7 …… 177

附　录 …… 182

后　记 …… 195

第1章 概率计算

未来因多变而不确定，才使世界充满多彩而神奇！

概率论，作为对不确定性的一种度量，将展示其科学而有效的方法和工具，用以揭开未来不确定性的面纱，实现人类探索未知的追求.

§1.1 随机事件的集合描写

随机现象：

下周末到园丁公园游玩，天气晴好还是阴雨？

女影星 A 与大导演 B 恋情何年结束？到生命的终结？

商大公司的股票，明天的价格是涨还是跌？

这 3 个分别是自然、人、自然与人相互交融的不确定现象，虽然现时还未知将发生哪种结果：天气好或坏，恋情结束年限，股价涨或跌. 但是，随着时间的推移，其出现的结果是确定可知的.

这种事先未知，事后可知的现象，称为随机现象；

事后出现的确定结果称为随机事件；

事后所有可能出现的结果，组成一个样本空间.

为使随机事件与样本空间定义的明确化，便于数学的定量分析，现将它们作抽象的

集合描写：

用 $\Omega = \{\bar{\omega}_t : t \in T\}$ 表示样本空间，则随机事件 A，可表示为 $A \subset \Omega$.

如：下周末天气 $\Omega = \{$晴好，阴雨$\}$，$A = \{$晴好$\}$

商大股票的价格 $\Omega = \{涨,跌\}, A = \{跌\}$

恋情结束 $\Omega = \{3年之内, 3至6年, 6年以上\}, A = \{3年之内\}$

这里,具体的随机事件与抽象集合的知识相互对应表达,其结果是:不仅在于随机事件升华为抽象描写,反过来,抽象描写的集合得到具体的现实含意.

随机事件的具体含意赋予抽象集合生动的现实意义,而抽象集合描写使随机事件的数学度量成为可能.

由此,有必要描述,事件与集合相互对应表达的一些基本知识.

1. 事件间的运算 —— 并与交

并:事件 A 与 B 至少发生一个 $\Leftrightarrow A \cup B = \{\omega \in A 或 \omega \in B\}$

交:事件 A 与 B 同时发生 $\Leftrightarrow A \cap B = \{\omega \in A 而且 \omega \in B\} \triangleq AB$

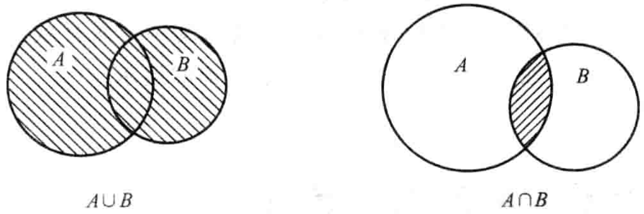


图1.1

2. 事件间的关系

(a) 包含与相等

包含:事件 B 发生必然导致 A 发生 $\Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow \{\omega \in B \Rightarrow \omega \in A\}$

相等:$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 与 $A \supset B$ 同时成立.

图1.2

不可能事件和必然事件分别用:$\varnothing$ 和 Ω 表示.

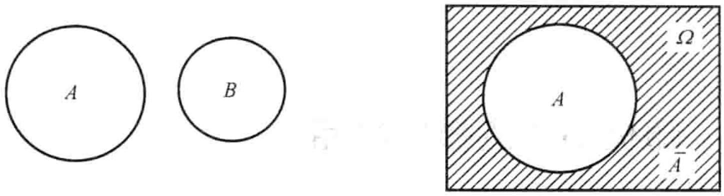
对于任意事件 A,有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

(b) 互不相容与对立

A 与 B 是互不相容事件 $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

A 的对立 $\equiv \overline{A} = \{\omega \in \Omega 而且 \omega \notin A\}$,

这时 $A \cap \overline{A} = \varnothing$，而且 $A \cup \overline{A} = \Omega$.



$A \cap B = \varnothing$　　　　$A \cap \overline{A} = \varnothing$ 且 $A \cup \overline{A} = \Omega$

图1.3

直觉地，两事件对立，一定互不相容. 反之未必，A 与 B 互不相容，不必要求 $A \cup B = \Omega$.

3. 若干公式

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{B} \cap \overline{A} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A}$$

这里有6个公式，如果你已熟悉左边3个，那么，右边3个利用更换事件间的运算：并和交，就可以写出.

例 1.1　跳伞表演员朝地面上跳伞，降落地有三个同心圆，半径分别为1、2、3米，用 A_i 记降落在半径为 i 的圆内，$i = 1,2,3$. 试说明下列事件含义：

(1) $\overline{A_3}$，(2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$，(3) $A_1A_2A_3$，(4) $\overline{A_1}A_2$

解：(1) 降落在半径为3米的圆外.

(2) 降落在半径为3米的圆内.

(3) 降落在半径为1米的圆内.

(4) 降落在半径为1米和2米的两个圆周围成的圆环内.

例 1.2　试用集合及运算符号，表示下列随机事件：

(1)A 发生，而 B 不发生　　(2)A、B、C 至少发生一个

(3)A、B、C 最多发生一个　　(4)A、B、C 中恰好发生两个

解：(1) $A\overline{B}$，(2) $A \cup B \cup C$，(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$，

(4) $AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C$

例 1.3　在电炉上安装了4个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 记 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$ 为4个温控器显示的温度按递增顺序排列的温度值，试用

t_0 和 $T_{(i)}, 1 \leqslant i \leqslant 4$ 表示出"电炉断电"事件 E.

解：$E = \{T_{(3)} \geqslant t_0\}$

§1.2 随机事件的概率度量

直觉问题：

随机事件能否用数学来度量?

—— 两个统计实例

例 1.4 在众多英文小说中，表面上，小说内容，作家个性，使 26 个英文字母出现是随机的. 但是，人们通过大量的实证研究，发现 26 个英文字母出现的频率是稳定的.

字母	空格	E	T	O	A	N	I	R	S
频率	0.2	0.105	0.072	0.0654	0.063	0.059	0.055	0.054	0.052
字母	H	D	L	C	F	U	M	P	Y
频率	0.047	0.035	0.029	0.023	0.0225	0.0225	0.021	0.0175	0.012
字母	W	G	B	V	K	X	J	Q	Z
频率	0.012	0.011	0.0105	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

数据引自 L. Brillouin. Science and Information Theory, New York, 1956.

例 1.5 尽管每个小孩在出生前不知是男还是女，但是，人类的延续一直能均衡男女出生比率. 这如同历史上许多科学家，重复抛掷一个均匀硬币的试验一致.

试验者	抛掷次数 n	正面数 m	频率 m/n
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

数据引自，格涅坚科. 概率论教程. 北京：高等教育出版社，1956.

随机现象产生的事件，其特点是

事先 —— 未知将产生何种结果 —— 随机性，

事后 —— 其结果是完全知道的 —— 确定性.

事先的随机性，不再是微积分中确定性函数 $y = f(x)$ 所能描述的范围.

事后的确定性，使事先描述存在可能性，至少可以猜测哪种结果将产生的可能性较大.

概率度量：

例1.4和1.5表明随机事件可能做出度量.

——如何决定度量值？

通常称随机事件的度量值为概率值，其方法主要有：

(1) 统计定义

一个随机实验重复 n 次，其中 A 事件共发生了 f_A 次，则 A 事件发生的概率定义为

$$P(A) = f_A/n$$

叫做事件 A 发生的频率或称经验概率.

经验概率计算方式需要客观实验数据. 因此，也称为客观概率. 例如欲调查民众对于杭州城市东扩规划的看法. 通过对市民的电话民意调查. 令 A 表示赞成城市东扩规划. 在100位随访者中，有65位赞成，因此 $P(A) = 0.65$. 若样本增加到1000位时，发现有714位赞成. 此时 $P(A) = 0.714$.

以频率作为随机事件的概率度量，其缺点为，随机实验往往无法在环境不变下长期进行，不同的调查样本，概率值会存在差异.

上面例1.4和1.5中的频率值可以作为概率值的统计定义.

(2) 主观定义

有些事件发生的可能性，常由人们对此事件的经验或心里的感觉而判断. 如特殊疾病，很难根据其样本计算频率. 只有通过当事人或专业人士的先验认定，预测其发生的可能性. 又如 A 先生第一次参加百米径赛，依其以往的经验和认知，自我评估约有八成的夺冠把握，因此可设

$$P(A\text{ 先生胜}) = 0.8$$

即为一种认定的主观概率.

但是，经验或感觉不仅会随空间和时间的变化而改变，而且哪怕是在同一时空内也会因人而异. 因此先验或主观认定出来的概率，会颇多争议.

(3) 古典定义

若以 $\#\Omega$ 表示在样本空间 Ω 内，发生所有事件的计数（如个数、长度、面积和体积等），$\#(A)$ 表示属于 A 事件的计数. 则 A 事件发生的概率定义为

$$P(A) = \#(A)/\#(\Omega) \tag{1.1}$$

叫做随机事件发生的古典概率或称理论概率.

计算古典概率的方法，通常利用数学的工具，如排列组合知识，进行逻辑分

析和抽象的数学推理.

作为区分概率的统计与理论定义的说明,例如:

一个小孩出生是男孩(A)的概率,历史上有许多统计学家做过大量的实证工作,得到结论是

$$P(A) = 22/43$$

这是一个典型的统计定义概率值.

现在,用概率古典定义,由假设:生男生女是等可能,以及不是生男就是生女,即有:

$$P(A) = P(\overline{A}), \qquad P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

容易得到理论推导:

$$P(A) = 1/2$$

这可以算是一个典型的古典(理论)定义概率值.

例 1.6 以投掷一颗骰子两次,所有可能的结果为

$\Omega = \{(1,1),(1,2),\cdots,(5,6),(6,6)\}$,此时 $\#(\Omega) = 36$.

若 A 表示点数和为 4 的事件集合,即 $A = \{(1,3),(3,1),(2,2)\}$.

则 A 事件发生的概率为

$$P(A) = \#(A)/\#(\Omega) = 3/36 = 1/12$$

例 1.7 生日问题 统计专业两个班共 64 个学生,问其中至少有两个同学生日相同的概率有多大?

假设每人生日在一年 365 天中的每一天有相同的可能性:$\#\Omega = 365^{64}$,64 人都不同生日:$\#A = \binom{365}{64}64!$,

那么 64 人都不同生日的概率为:

$$\frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{365}{64}64!}{365^{64}}$$

由此,至少有两人生日相同的概率:

$$1 - \frac{\binom{365}{64}64!}{365^{64}} = 0.997$$

找同日出生的人不是一件很难的事!

人数	30	40	50
至少有两人生日相同的概率	0.71	0.89	0.97

例 1.8 配对问题

A a　　B b　　C c　　D d　　E e　　F f

从上面成对因子中任取 4 个,求下面事件的概率:

1) 没有配对;2) 恰有一个配对;

3) 恰有两个配对.

$$p_1 = \frac{\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{12}{4}} = \quad p_2 = \frac{\binom{6}{1}\binom{2}{2}\binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{16}{33} = 0.48$$

$$p_3 = \frac{\binom{6}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{2}}{\binom{12}{4}}$$

- 至少有一个配对?
- 最多有一个配对?

1777 年法国科学家蒲丰提出了下列著名问题.

例 1.9 平面上画着一些平行线,它们之间的距离都等于 a,向此平面任投一长度为 $l(l < a)$ 的针,试求此针与任一平行线相交的概率.

解 以 x 表示针的中点到最近的一条平行线的距离. φ 表示针与平行线的交角. 则有

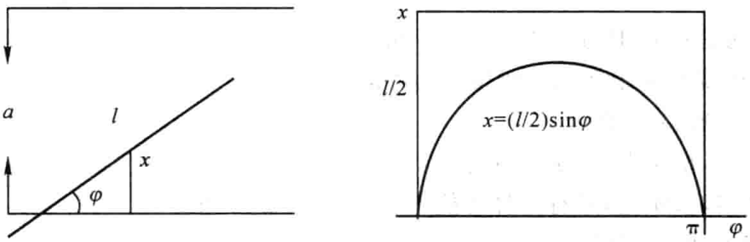


图1.4

$\Omega = \{(x,\varphi): 0 \leqslant x \leqslant a/2, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$

$A = \{(x,\varphi): 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant x \leqslant (l/2)\sin\varphi\}$

于是

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\frac{l}{2}\int_0^\pi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi}{\frac{1}{2}a\pi} = \frac{2l}{\pi a}$$

由于最后的答案与 π 有关，因此不少人想利用它来计算 π 的数值，其方法是投针 N 次，计算针与线相交的次数 n，再以频率值 n/N 作为概率 P 之值代入上式，求得

$$\pi = \frac{2lN}{an}$$

下表是一些试验的相关资料.

实验者	年份	针长	投掷次数	相交次数	π 实验值
Smith	1855	0.6	3204	1218	3.1554
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415929

数据引自：Gridgeman. N. T. Geometric probability and the number π. Scripta Mathematica，1960(25)：183—195.

值得注意的是这里采用的方法：建立概率模型，与感兴趣的量——如 π——相关，然后设计适当的随机实验，并通过这个实验的结果来确定这个量.

现在，利用计算机，按照上述思想建立起的 Monte-Carlo 方法，已有广泛的应用.

例 1.10 公平分奖 甲、乙两人均为九段围棋棋手，先胜三局者可赢得 10 万元奖金. 现已赛三局，甲 2 胜 1 负而因故终止比赛，问如何分 10 万元奖金，才算公平?

解

(1) 平均各分 5 万元 甲欠公平

(2) 考虑已赛出的成绩 甲 6.7 万元 乙 3.3 万元

(3) 已赛出和未赛出的成绩一起考虑

记甲 胜：1 负：0

已赛出，事实上，只是 3 种可能：110，101，011 中的 1 种

将赛出，事实上，只有 3 种可能：1，01，00 中的 1 种

注意关键词：可能

已赛出甲 2 胜 1 负的 3 种(可能) 情形之一：110，101，011

未来将赛出的 4 种可能结果：10， 11， 01， 00，
甲胜， 3/4， 乙胜， 1/4.

据此，一种可以选择的公平分法：甲 7.5 万元，乙 2.5 万元

概率的古典定义，从公式(1.1) 可见，至少要求：

1) 样本空间整体的可计算性：$\# \Omega = \# \{\bar{\omega}_t : t \in T\} < \infty$

——分母计量时的存在性.

2）样本空间内各基本事件发生有相等的可能性：$P\{\bar{\omega}_t\} = P\{\bar{\omega}_s\}, t, s \in T$

—— 分子或分母计量时的可加性.

为使概率计算的分析推演过程合乎人类的共同认知与思考水准，必须给定一些概率公理，以便合理进行理论与实务的演算. 因为在认知一致的架构上，概率的表示与应用才有意义.

1933年，苏联柯尔莫戈罗夫院士提出了概率公理化结构，使概率论成为一门严谨的科学理论.

概率公理

在样本空间Ω中，不是所有的$A \subset \Omega$，都有唯一确定的概率值$P(A)$，因此事先需要做一个限制，建立概率空间(Ω, F, P)，使得任意属于F的事件A，有唯一确定的概率值$P(A)$，这里

$F = \{A : A \subset \Omega\}$限制为满足下述条件的$\sigma$域：

(a) $\Omega \in F$.

(b) 若$A \in F$，则$\overline{A} \in F$.

(c) 若$A_n \in F$，$n = 1, 2, \cdots$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

P限制为满足以下概率公理的集合函数：

(1) 非负性：$P(A) \geqslant 0, \qquad A \in F$.

(2) 规范性：$P(\Omega) = 1, \qquad \Omega \in F$.

(3) 可加性：$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$，$A_i \in F, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$.

借助于计数测度知识，其中包括排列组合知识，实现概率计算，这是直接按概率定义计算概率值的方法. 但是，有时事件本身比较复杂，排列组合计算也繁琐，难于直接计算，这时可以采用分解复杂事件为简单事件，通过加法和乘法公式来计算，或者利用已建立的概率模型.

下面，通过由概率公理导出的公式来计算概率值.

§1.3 加法公式与乘法公式

1. 加法公式 —— 互不相容

加法公式　假设A与B为样本空间Ω中的两事件，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1.2}$$

事件集合之间的并是不同于数之间的加，重复的元素只能算一次，例如：$A = \{1,2,3\}$，$B = \{1,3,4\}$，则 $A \cup B = \{1,2,3,4\}$，而 $A \cup B \neq \{1,1,2,3,3,4\}$. 注意到，在(1.2) 式右边 $P(A)$ 计算中包含 $P(A \cap B)$，$P(B)$ 的计算中又包含 $P(A \cap B)$，相对于在(1.2) 式左边，$P(A \cap B)$ 就多算了一次. 因此，(1.2) 式等号左右两边计算相等时，就需要在右边减去一项 $P(A \cap B)$.

这是(1.2) 式成立的直观解释.

下面通过概率公理给出严格的证明.

证 因 $A \cup B = A \cup B\overline{A}$，$A \cap B\overline{A} \subset A \cap \overline{A} = \varnothing$，由可加性公理，

$$P\{A \cup B\} = P(A \cup B\overline{A}) = P(A) + P(B\overline{A}) \tag{1.3}$$

又 $B = BA \cup B\overline{A}$，$BA \cap B\overline{A} \subset A \cap \overline{A} = \varnothing$，由可加性公理，

$$P(B) = P(BA \cup B\overline{A}) = P(BA) + P(B\overline{A}) \tag{1.4}$$

结合(1.3) 式和(1.4) 式，即得到(1.2) 式.

特别地，若 A 与 B 两事件互不相容，即 $A \cap B = \varnothing$(空集)，则加法公式(1.2) 式即为可加性公理，因为此时有 $P(A \cap B) = 0$.

例 1.11 花园新村的成年人中，有 20% 的人订阅《都市快报》，有 16% 的人订阅《钱江晚报》，有 8% 的人“都市”与“钱江”两报都订阅. 在花园新村的成年人中随机选一人，问此人至少订阅“都市”与“钱江”两报之一的概率多大？

解 记 $A =$ 订阅《都市快报》，$B =$ 订阅《钱江晚报》，则问题的解是

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.16 - 0.08 = 0.28$$

用数学归纳法，推广加法公式(1.2) 式，可以得到

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \tag{1.5}$$

加法公式的应用，需要 $P(A \cap B)$ 的数值，即便是作如下的变换

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \tag{1.6}$$

仍然需要计算 $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ 的值.

例 1.12 花园新村的成年人中，20% 的人会抽烟，30% 的人会喝酒，而在会抽烟的人中有 80% 的人会喝酒，在花园新村成年人中随机选一人，问此人同时会抽烟与喝酒的概率多大？

解 记 $A =$ 会抽烟，$B =$ 会喝酒，问题中给出条件

会抽烟的人中 80% 会喝酒，这是一个对事件 B 附加了信息条件 A，称为条

件 A 下，B 发生的概率，记为 $P(B \mid A) = 0.8$.

$$P(B \mid A) \neq P(B) = 0.3$$

如同在定义了可加性公理后，推导出加法定理一样，下面将引入条件概率的定义，并借此导出乘法公式.

2. 乘法公式 —— 事件的独立性

样本空间 Ω 中的两事件 A 与 B，$P(A) > 0$，在 A 事件已发生的条件下 B 事件发生的概率称为条件概率，以 $P(B \mid A)$ 表示.

定义 1.1

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1.7}$$

由此得到

乘法公式
$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) \tag{1.8}$$

由两事件交的对称性：$A \cap B = B \cap A$，自然有

$$P(B \cap A) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B) \tag{1.9}$$

当然，这里需要条件：$P(A) > 0$ 和 $P(B) > 0$，以便(1.7) 式中分母的存在.

特别地，条件 A 的信息无助于求 B 事件发生的概率，即

$$P(B \mid A) = P(B) \tag{1.10}$$

则称事件 A 与 B 统计独立，简称独立. 此时有

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{1.11}$$

不独立的两事件称为相依.

乘法公式(1.9) 左边 A 与 B 位置是“对称”的，如果把这看成是“无序”的要求. 那么公式(1.9) 右边是很容易利用“有序”—— 从 A 到 B，或者从 B 到 A —— 来记住的. 从这个意义上讲，乘法公式(1.9) 是一个从“无序”到“有序”的过程.

例 1.12 的解. 由乘法公式

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = 0.2 \times 0.8 = 0.016$$

例 1.13 投掷一枚均匀硬币 2 次，求 2 次都出现相同结果的情形下，至少出现一次正面的条件概率.

样本空间 $\Omega = \{$正正，正反，反正，反反$\}$. 令事件 A 为 2 次均出现相同结果(2 次正面或 2 次反面)，事件 B 为至少出现一次正面的概率. 则 $P(A) = 1/2$，$P(B \cap A) = 1/4$. 因此

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

例 1.14 葛丽丝到建国假日玉器市场去选购商品. 假设玉器的 10 块玉佩