

航空高等院校教材

微波天线设计的数学方法

林世明 编著



航空专业教材编审组

微波天线设计的数学方法

林世明 编著

航空专业教材编审组

内 容 简 介

本书从微波天线设计问题中选出一些具有代表性的问题，通过解决这些问题来讲述如何应用数学。

全书共七章：几何光学法；口径分析法；口径天线方向图综合；面天线的基本问题及面电流解法；离散阵及其综合法；微波天线的统计理论；线性系统理论在微波天线中的应用。

本书可供应用数学、微波天线等方面的研究生、科技人员、工程技术人员以及高年级大学生参考。

主审稿人 陈开周 汪茂光

责任编辑 杨适成

微波天线设计的数学方法

林世明 编著

*

西北工业大学印刷厂印刷 内部发行

开本 787×1092 1/16 印张 20 字数 499 千字

1983 年 6 月第 1 版 1983 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—600

统一书号：27136 j 定价：2.05 元

前 言

几年来，笔者一直承担指导研究生的任务，研究方向是微波天线最优设计的数学方法。这本书是根据历届讲课的部分讲稿整理而成的。

本书的主要目的是向读者介绍微波天线设计的数学方法，其中选出具有代表性的工程问题，并且通过解决这些问题来阐述如何应用数学，在一定程度上，笔者这种想法来源于卡曼（T. v. Kármán）关于编写应用数学书籍的观点。

要看懂这本书，读者需要有大学数学课程以及电磁场和微波天线方面的基本知识。此外，还要有其它的数学知识，如函数逼近论、整函数论、渐近方法、变分法、随机过程以及线性系统理论等方面。对于研究生来说，我们已开设这方面的专门课程。但是，为了便于广大读者学习，书中涉及这方面问题时，作了简要的说明，或者介绍了有关的参考书。

本书的内容已在目录中给出。书中除了介绍国外的研究情况外，还介绍了我国微波天线工作者以及应用数学工作者已发表的部分研究成果。但需要指出，因篇幅的限制，本书不可能包罗所有的理论和方法。此外，每一章都附有必要的参考文献。当然，这也限制在最少的程度。

为了便于教学或自学，在编写过程中，力求由浅入深，并且系统地叙述有关方面的问题，尤其是着重阐述如何应用数学来解决这些问题。同时还注意到，在每一章中不涉及太多的数学分支。

在编写本书以及研究微波天线的过程中，受到我校党政有关领导以及同志们的支持和鼓励，还受到蔡金涛学部委员、茅于宽教授、任朗教授、谢处方教授、刘书琴教授、杨弃疾教授等以及同行的支持和鼓励，笔者在此深表谢意。

本书能够和读者见面，与航空工业部教材编审组的支持以及负责本书印刷出版的干部和工人同志的辛勤劳动是分不开的，对此笔者也深表感谢。

由于笔者水平有限，书中不妥之处在所难免，请读者批评指正。

编 者

一九八二年九月于西北工大

目 录

第一章 几何光学法	1
1.1 程函及其方程	1
1.2 几何光学法作为零波长近似法	4
1.3 射线的方程及光学长度	5
1.4 折射定律与反射定律	6
1.5 拉格朗日积分不变式与费马原理	8
1.6 射线管内功率流	10
1.7 导电表面的反射	11
1.8 射线汇及马吕斯定理	12
1.9 主法向曲率半径	13
1.10 焦面	15
1.11 整形卡塞格伦反射器天线	17
1.12 采用介质导的卡塞格伦天线	19
1.13 赋形波束单弯曲反射器天线	22
1.14 赋形波束双弯曲反射器天线	25
1.15 赋形波束双弯曲反射器天线的综合理论	28
1.16 透镜天线	33
1.17 分区透镜天线	37
1.18 波束扫描透镜天线	39
1.19 偏轴接收时抛物面反射器所产生的焦面	43
第二章 口径场分析法	47
2.1 标量衍射理论的基本定理	47
2.2 平面孔径的衍射	49
2.3 夫累涅尔衍射与夫琅和费衍射	51
2.4 积分变换法	53
2.5 一维均匀分布和余弦分布	54
2.6 圆口径的均匀分布和抛物型分布	57
2.7 抛物面天线的远区场方向图	60
2.8 圆口径天线与线源天线之间的关系	65
2.9 复变量方向图函数及其特性	66
2.10 几种口径相位分布	69
2.11 矩形和圆形口径内平方律相位分布	72

2.12	圆口径具有立方律相位分布	75
2.13	振幅的周期性变化所产生的影响	76
第三章 口径天线方向图综合		79
3.1	控制波瓣形状的最小偏差准则	79
3.2	控制波瓣形状的最小均方差准则	83
3.3	几种重要的综合法	86
3.4	线源的单参数和双参数分布	89
3.5	圆口径的单参数分布	91
3.6	线性口径的泰勒分布	94
3.7	圆口径的泰勒分布	96
3.8	线源天线的非对称等旁瓣窄波束方向图	97
3.9	线源天线的等旁瓣窄波束方向图	100
3.10	线源天线的等旁瓣差波束方向图	105
3.11	线源天线的非对称旁瓣窄波束方向图	110
3.12	线源天线的非对称衰减旁瓣窄波束方向图	113
3.13	圆口径天线的等旁瓣窄波束方向图	116
3.14	圆口径天线的等旁瓣差波束方向图	118
3.15	关于给定超增益比的综合法	120
3.16	对主瓣范围内所含的能量之控制	123
3.17	具有最佳口径利用系数的线源之综合法	126
3.18	关于差方向图具有最大相对斜率的线源	130
第四章 面天线的基本问题及面电流解法		136
4.1	面天线的基本问题	136
4.2	辅助源法	139
4.3	几点说明	145
4.4	矢位法	147
4.5	远区场的计算公式	151
4.6	面天线的总场	153
4.7	单反射面天线的远区场	154
4.8	在点源情况下天线远区场的计算	155
4.9	在线源情况下天线远区场的计算	158
4.10	抛物面天线的远区场	162
4.11	赋形波束单弯曲反射器天线的远区场	163
4.12	赋形波束双弯曲反射器天线的远区场	164
4.13	馈源横向位移的抛物面天线之远区场	166
4.14	馈源斜置或偏轴时赋形波束双弯曲反射器天线的远区场	168
4.15	衍射积分的渐近式	171

4.16	围道积分的渐近式	174
4.17	主辐射区内赋形波束双弯曲反射器天线远区场的渐近式	176
4.18	受非时谐振激励所产生的场	178
4.19	受非时谐振激励所产生的远区场	182
4.20	抛物面天线的远区暂态场	189
第五章	离散阵及其综合法	197
5.1	均匀线阵	197
5.2	非均匀振幅分布线阵与 Z 变换	201
5.3	相位非线性递增的线阵与非等间距的线阵	203
5.4	单脉冲线阵	206
5.5	矩形平面阵与环形阵	207
5.6	离散阵与连续分布口径天线之间的等价性	210
5.7	道尔夫—契贝舍夫综合法	214
5.8	线阵综合的插值法	215
5.9	伯恩斯坦多项式逼近法	219
5.10	线阵综合的 Z 变换法	221
5.11	契贝舍夫逼近法的推广	222
5.12	微扰法	225
5.13	复数域中的微扰法	229
5.14	线阵方向性的最优化	230
5.15	用契贝舍夫多项式综合单脉冲阵	232
5.16	单脉冲阵的两种综合法	235
5.17	单脉冲阵的方向性之最优化	239
5.18	矩形阵的综合法	241
5.19	环形阵的综合法	242
5.20	同心环形阵及其综合法	244
5.21	阵天线在约束条件下性能指标的最优化	245
第六章	微波天线的统计理论	251
6.1	关于线源的随机误差之分析	251
6.2	关于圆口径天线的随机误差之分析	252
6.3	关于口径天线随机误差的新分析法	256
6.4	等间距线阵的随机误差的一般分析法	257
6.5	功率方向图均值的具体计算	261
6.6	旁瓣误差不超过给定电平的概率	263
6.7	等间距线阵的相位加权	265
6.8	线阵的密度加权	269
6.9	随机阵列	272

第七章 线性系统理论在微波天线中的应用	277
7.1 线性系统的基本概念	277
7.2 采样数据系统的基本概念	279
7.3 用线性系统表示口径天线的远区辐射	281
7.4 各空间频率分量对窄波束方向图的影响	283
7.5 各空间频率分量对差波束方向图的影响	287
7.6 线阵天线	289
7.7 非相干源天线	295
7.8 时域口径天线	298
7.9 时域矩形口径天线	299
7.10 时域圆口径天线	303
7.11 扫描天线	305
7.12 频率扫描线阵	309

第一章 几何光学法

在微波天线的设计和分析中,已广泛应用几何光学的定律、定理和方法。因为,对精确的电磁波理论而言,几何光学法是零波长近似法。本章先阐述几何光学的基本概念、重要的定律和定理,以及它们的数学表示式,然后列举一些微波天线的设计问题,来说明如何应用几何光学法。

1.1 程函及其方程

光是波动,可以用波动方程来描述这种振动。在无源的、各向同性的非导电媒质中,波动方程为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

式中 ψ 表示传播振动时媒质中点 $M(x, y, z)$ 的状态。至于“状态”一词应如何理解,暂时是不重要的,只要认定 ψ 与点 M 处的振动能有关就行了。又,式中 n 表示点 M 处的媒质折射率, c 是真空中光的传播速度。下面介绍光学中的重要概念——程函。

为了简明起见,先考虑一维的情形。这时 (1.1) 式变成

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

设媒质是均匀的,即 $n = \text{const}$, 并且令 $v = \frac{c}{n}$, 可将 (1.2) 式写成

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3)$$

令 $x - vt = p$, $x + vt = q$, 可将 (1.3) 式改写成

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} = 0$$

这个方程一般形式的解为

$$\psi = f_1(p) + f_2(q) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (1.4)$$

其中 f_1 和 f_2 为两个任意函数。

由经验可知,通常光的传播只沿一个方向进行,故不妨假设 $f_2 \equiv 0$, 因此

$$\psi = f_1(x - vt) \quad (1.5)$$

如果对某一点 M 来说, ψ 为时间 t 的周期函数,并以 λ 表示波长,则最简单的周期函数为

$$\psi = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \quad (1.6)$$

式中 A 为常数, 称之为振幅, 标量 $\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$ 称为振动的位相, 简称相。显然, v 就是传播速度。

如果考虑更一般的三维情形, 则波动方程的解为

$$\psi = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z - vt) \right] \quad (1.7)$$

这是可以验证的。平面 $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ 表示某一时刻具有同一位相的点之轨迹。我们把这种传播振动称为平面波, 把该平面称为波阵面。在实际中, 它描述了光源在无穷处而光在均匀媒质中传播的情形。

再考虑另一种情形, 即波动方程为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.8)$$

式中 r 表示光源到观察点 M 的距离, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。这方程描述了光源位于有限距离点 O 处, 而光在均匀媒质中传播的情形。

因 (1.8) 式可改写成

$$\frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9)$$

故其一般形式的解为

$$\psi = \frac{1}{r} f_1(r - vt) + \frac{1}{r} f_2(r - vt) \quad (1.10)$$

如果对某一定点 M , ψ 为时间 t 的周期函数, 并且 λ 表示其波长, 则最简单的周期函数为

$$\psi = \frac{A}{r} \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (r - vt) \right] \quad (1.11)$$

由此可见, 它与平面波不同, 其振幅与 r 成反比, 并且在某一时刻其等相位面为球面 $r = \text{const}$, 因此, 称之为球面波。

在非均匀媒质中, 波动方程的解较为复杂, 但对应于 (1.7) 式, 它的解可表示成

$$\psi = A(x, y, z) \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \left[\varphi(x, y, z) - vt \right] \right\} \quad (1.13)$$

这里振幅 $A(x, y, z)$ 不是常数而是位置函数, 并且 $\varphi(x, y, z)$ 不是线性函数。显然, 其波阵面由下式确定

$$\varphi(x, y, z) - vt = 0 \quad (1.14)$$

这时应当注意, 折射率 n 也是 x, y, z 的函数。因此, 若将上式两端乘以 n , 得

$$n\varphi(x, y, z) - ct = 0 \quad (1.15)$$

故波阵面可由下式确定

$$n\varphi(x, y, z) = \text{const} \quad (1.16)$$

通常称 $n\varphi(x, y, z)$ 为程函 (Eikonal)。

为了进一步阐明程函的意义, 我们研究在传播过程中波阵面的运动。考虑在无源的各向同性不导电的媒质中的波动, 假设其等相位面由函数

$$L = L(x, y, z) \quad (1.17)$$

的等值面所确定。显然, $L(x, y, z)$ 为程函。由(1.15)式知, 波阵面由下式确定

$$L(x, y, z) - ct = 0$$

所以, 在一般的波阵面 W 上的位相 Φ 由下式给定

$$\Phi = \omega t - \frac{\omega}{c} L(x, y, z) \quad (1.18)$$

式中 ω 为角频率, c 为真空中的光速, x, y, z 为 W 上任一点的坐标。同时, 将几何光线定义为与波阵面正交的曲线族。如果一条光线路径 l 为

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} \quad (1.19)$$

其中 s 表示沿 l 从固定的参考波阵面 W_0 到传播的波阵面 W 所度量得的弧长(图 1-1), 它是时间 t 的增函数, 记作 $s = s(t)$, 并且 W_0 由 $L(x, y, z) = 0$ 所给定, 那末波阵面沿 l 的传播速度 v 为

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1.20)$$

波阵面 W 上 $L(x, y, z)$ 的值将随着沿 l 的传播而变化, 即 $L(x, y, z)$ 可看作弧长 s 或时间 t 的函数, 因此

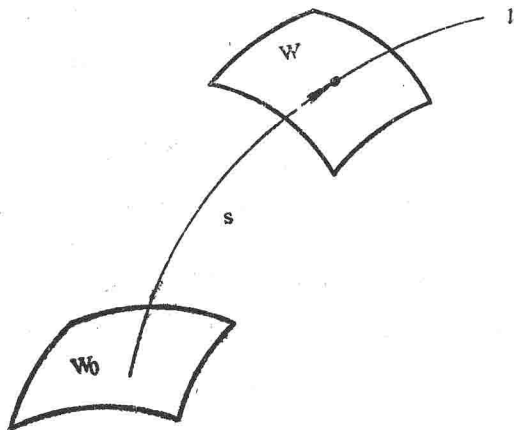


图 1-1 波阵面的运动

$$|\nabla L| = \frac{dL}{ds} = \frac{\frac{dL}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{v} \frac{dL}{dt} \quad (1.21)$$

这里符号 ∇ 为哈密顿算子。由于在波阵面 W 上位相 Φ 是不变的, 故将(1.18)式对 t 求导得

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega - \frac{\omega}{c} \frac{dL}{dt} = 0$$

即 $\frac{dL}{dt} = c$ 。将它代入(1.21)式, 便得

$$|\nabla L| = \frac{c}{v} = n \quad (1.22)$$

或

$$|\nabla L|^2 = n^2 \quad (1.23)$$

其中 n 为媒质的折射率。

如果 $\mathbf{s}$ 为 l 上的单位切矢量, 它指向弧长 s 增加的方向, 则由(1.21)和(1.22)式可求出

$$\frac{\nabla L}{n} = \mathbf{s} \quad (1.24)$$

这表明等值面 $L(x, y, z) = \text{const}$ 的法向矢量与射线路径的切矢量是同向或反向。

通常称程函 $L(x, y, z)$ 所满足的偏微分方程式(1.22)或(1.23)为程函方程。它是几何光学的基本方程。

1.2 几何光学法作为零波长近似法

对精确的电磁波理论而言, 几何光学法是零波长近似法。本节研究这个问题。

大家知道, 对于无源的各向同性非导电的均匀媒质, 时谐电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{H}$ 满足麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.28)$$

其中电场、磁场与时间的关系为 $e^{j\omega t}$ 的形式, ω 为角频率, ϵ 为媒质的介电常数 (即电容率), μ 为媒质的导磁率。将这几个方程联立, 得

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1.29)$$

其中 $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$, 称为传播常数或媒质的相位常数。

为了获得在零波长或高频情况下场的近似值, 假设电场表示成如下的渐近级数的形式^[5]

$$\mathbf{E}(x, y, z) = e^{-jk_0 L(x, y, z)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}_m(x, y, z)}{(j\omega)^m} \quad (1.30)$$

其中 $\mathbf{E}_0(x, y, z)$ 是实的, $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 是自由空间的相位常数。已经证实, 在许多重要的情况下, 这种假定是正确的。现在将(1.30)式代入(1.29)式, 可得

$$|\nabla L|^2 = n^2 \quad (1.31)$$

以及

$$(\nabla L \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 + \frac{\nabla^2 L}{2} \mathbf{E}_0 = 0 \quad (1.32)$$

其中 $n = \frac{k}{k_0}$ 是媒质的折射率。显然, (1.31)式就是程函方程, 故(1.30)式中的数函 $L(x, y, z)$ 是程函。

当 ω 足够大或 λ 充分小时, (1.30)式的第一项起着主要的作用, 而其余的项可以略去。因此, 第一项成为高频电场的近似式, 记为

$$\mathbf{E}_{hf} = \mathbf{E}_0(x, y, z) e^{-jk_0 L(x, y, z)} \quad (1.33)$$

由于 $\mathbf{E}_0(x, y, z)$ 是实的, 故 $\mathbf{E}_{hf}$ 的等相位面 $L(x, y, z) = \text{const}$ 与几何光学的波阵面相一致。同时, 我们称与波阵面正交的曲线族为射线。

若将(1.30)式代入(1.27)式, 得

$$\nabla L \cdot \mathbf{E}_{hf} = 0 \quad (1.34)$$

与(1.24)式相联系, 可以看出射线上各点处的场 $\mathbf{E}_{hf}$ 都与该射线正交。若将(1.33)式代入(1.25)式, 使得高频磁场的近似式

$$\mathbf{H}_{hf} = \frac{-jk_0}{-j\omega\mu} \nabla L \times \mathbf{E}_0 e^{-jk_0 L} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{s} \times \mathbf{E}_{hf} \quad (1.35)$$

式(1.34)和(1.35)表明, 沿一射线的电场 $\mathbf{E}_M$ 与磁场 $\mathbf{H}_M$ 是密切相关的, 同时, $\mathbf{s}, \mathbf{E}_M, \mathbf{H}_M$ 三者构成右旋正交系。

从(1.32)式可推导出振幅矢量 $\mathbf{E}_0$ 沿射线传播的特性。事实上, 由(1.23)式可知

$$\nabla L \cdot \nabla = n \mathbf{s} \cdot \nabla = n \frac{d}{ds} \quad (1.36)$$

其中 $\frac{d}{ds}$ 表示沿射线的方向导数。所以, (1.32)式可改写成

$$\frac{d\mathbf{E}_0}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 L}{n} \mathbf{E}_0 = 0 \quad (1.37)$$

显然, 方程的解为

$$\mathbf{E}_0(s) = \mathbf{E}_0(s_0) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{s_0}^s \frac{\nabla^2 L}{n} ds \right] \quad (1.38)$$

其中 s_0 表示沿射线从参考波阵面到点 (x_0, y_0, z_0) 的弧长。因而, 一旦知道射线上某一点处的场值 $\mathbf{E}_0(s_0)$, 就完全确定该射线上任一点处的电场 $\mathbf{E}_0(s)$ 。

1.3 射线的方程及光学长度

前面已将射线定义为波阵面 $L(x, y, z) = \text{const}$ 的正交曲线族, 因此, 如果 $\mathbf{r}$ 是一条射线 l 上点 P 的位置矢量, s 是沿此射线从定点 O 到点 P 的弧长 (图 1-2), 则由(1.23)式可得

$$\nabla L = n \mathbf{s} = n \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

所以, 称方程

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla L \quad (1.39)$$

为射线方程。这里, 我们用程函来确定射线。

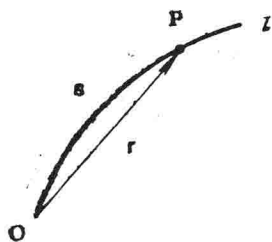


图 1-2 射线上点的位置矢量 $\mathbf{r}$

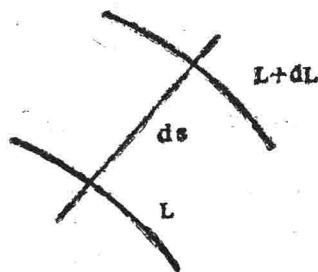


图 1-3 两相邻波阵面图示

式(1.39)的意义如下: 考虑两相邻波阵面 $L = \text{const}$ 和 $L + dL = \text{const}$ (图1-3), 于是

$$\frac{dL}{ds} = \mathbf{s} \cdot \nabla L = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla L = n \quad (1.40)$$

这表明, 两波阵面之间的法线距离 ds 与折射率成反比, 即与 v 成正比。

另外, 也可以用折射率函数 $n(\mathbf{r})$ 来确定射线。事实上, 将(1.39)式对弧长 s 求导, 得

$$\frac{d}{ds}\left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(\nabla L)$$

因为

$$\frac{d}{ds}(\nabla L) = \nabla\left(\frac{dL}{ds}\right) = \nabla n$$

所以

$$\frac{d}{ds}\left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \nabla n \quad (1.41)$$

特别, 在均匀媒质中, $n = \text{const}$, 故(1.41)式可简化成

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0$$

由此求得

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$$

式中 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 均为常矢。此式是矢量形式的直线方程, 该直线沿 $\mathbf{b}$ 的方向并通过 $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ 的端点。由此可见, 在均匀媒质中, 射线的形状是直线。

现在假设曲线 l 的方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 其单位切矢量为 $\mathbf{s}$, 定义如下的曲线积分

$$\int_l n ds \quad (1.42)$$

为曲线 l 的光学长度。如果 l 是射线, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为此射线上的两个点, 则它们之间射线的光学长度为

$$\int_{\widehat{P_1P_2}} n ds \quad \text{或} \quad \int_{\widehat{P_1P_2}} n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.43)$$

由于 $\nabla \times (n\mathbf{s}) = \nabla \times (\nabla L) = 0$, 故 $n\mathbf{s}$ 为无旋场, 其势函数即为 L 。因此, 上述曲线积分与积分路径无关, 即

$$\int_{\widehat{P_1P_2}} n ds = \int_{P_1}^{P_2} n ds = L(x_2, y_2, z_2) - L(x_1, y_1, z_1) \quad (1.44)$$

由此可看出, 为什么我们称 $L(x, y, z)$ 为程函。另外, 由于 $nds = \frac{c}{v} ds = c dt$, 式中 dt 是波阵面沿射线传播距离 ds 所需要的时间, 因此可得下式

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = c \int_{P_1}^{P_2} dt \quad (1.45)$$

这表明, 光学长度等于光的真空速度与波阵面从 P_1 传播到 P_2 所需时间之积。

1.4 折射定律与反射定律

先研究射线通过折射率不同的两均匀媒质的分界面 T 的特性。这时, 折射率函数 n 是不连续的, 我们用一个过渡层代替突变面 T 。在这个过渡层中, ϵ , μ 和 n 迅速而又连续地从

它们靠近 T 这一侧的值改变到另一侧的值。再取一个平面的面积微元，令其两个边 P_1Q_1 ， P_2Q_2 平行于 T ，另外两个边 P_1P_2 ， Q_1Q_2 与 T 正交（图1-4）。设 $\mathbf{N}$ 代表此面积微元的单位法向矢量，从而可求出 $\nabla \times n\mathbf{s}$ 通过此面积的通量。事实上，利用斯托克斯公式，有

$$\int_{l_1} (\nabla \times n\mathbf{s}) \cdot \mathbf{N} dS = \int_{l_1} n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.46)$$

式中积分路径 l_1 是微元的边界曲线 $P_1Q_1Q_2P_2$ 。如果长度 $P_1Q_1 (= \delta s)$ 和 $P_2Q_2 (= \delta s)$ 很短，那末这些线段上的 $n\mathbf{s}$ 可分别用常值 $n_1\mathbf{s}_1$ 和 $n_2\mathbf{s}_2$ 来代替。于是由上式得

$$n_1\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{t}_1 \delta s + n_2\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{t}_2 \delta s + \text{两端的贡献} = 0 \quad (1.47)$$

其中 $\mathbf{t}_1$ 、 $\mathbf{t}_2$ 分别为 P_1Q_1 和 P_2Q_2 上的单位切矢量。令高度 $\delta h (= P_1P_2 = Q_1Q_2) \rightarrow 0$ ，因此两端 P_1P_2 和 Q_1Q_2 的贡献将趋向于零，从而上式变成

$$n_1\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{t}_1 + n_2\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{t}_2 = 0 \quad (1.48)$$

设 $\mathbf{N}_{12}$ 是分界面 T 的单位法向矢量，它由折射率为 n_1 的媒质指向折射率为 n_2 的媒质， $\mathbf{t}$ 是分界面 T 与微元的交线上的单位切矢量，因此

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= -\mathbf{t} = -\mathbf{N} \times \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{t}_2 &= \mathbf{t} = \mathbf{N} \times \mathbf{N}_{12} \end{aligned} \quad (1.49)$$

代入(1.48)式，得

$$\mathbf{N} \cdot [\mathbf{N}_{12} \times (n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1)] = 0$$

因为 $\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{N}_{12}$ 正交，故

$$\mathbf{N}_{12} \times (n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1) = 0 \quad (1.50)$$

此式表明，通过分界面时，射线矢量 $n\mathbf{s}$ 的切向分量是连续的，并且 $\mathbf{a}_{12} = n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1$ 与分界面正交。

现在假设 θ_1 和 θ_2 分别表示入射线和折射线与分界面的法向矢量 $\mathbf{N}_{12}$ 之间的夹角（图1-5）。从(1.50)式得

$$n_2(\mathbf{N}_{12} \times \mathbf{s}_2) = n_1(\mathbf{N}_{12} \times \mathbf{s}_1) \quad (1.51)$$

因而

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1 \quad (1.52)$$

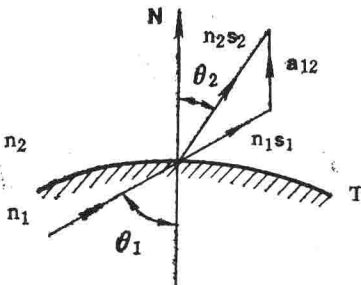


图 1-5 折射定律图示

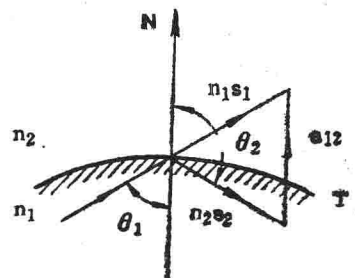


图 1-6 反射定律图示

式(1.51)表明, 折射线位于射线和分界面法线所在的平面(入射面)内, 而(1.52)式则说明折射角的正弦与入射角的正弦之比等于两折射率之比 $\frac{n_1}{n_2}$ 。这两个式子完整地表述了斯涅耳折射定律。

关于反射波的讨论, 只要在式(1.51)和(1.52)中, 令 $n_1 = n_2$ (图 1-6), 结果得到, 反射线在入射面上, 并且 $\sin \theta_2 = \sin \theta_1$ 。因此

$$\theta_2 = \pi - \theta_1 \quad (1.53)$$

这些结果表述了反射定律。容易看出, 这反射定律可用下列一种等价的矢量公式表示

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{s}_r - \mathbf{s}_i) = 0 \quad (1.54)$$

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{s}_r + \mathbf{s}_i) = 0 \quad (1.55)$$

$$\mathbf{s}_r = \mathbf{s}_i - 2(\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} \quad (1.56)$$

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_r - 2(\mathbf{s}_r \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} \quad (1.57)$$

其中 $\mathbf{s}_i$ 为入射线上的单位切矢量, $\mathbf{s}_r$ 为反射线上的单位切矢量。

1.5 拉格朗日不变式与费马原理

假设折射率 n 是空间中点的连续可微函数, 则由前述可知, $\nabla \times n\mathbf{s} = 0$, 故矢量场 $n\mathbf{s}$ 沿任一闭曲线 l 的环量都等于零, 即

$$\oint_l n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.58)$$

此式称为拉格朗日积分不变式。它表示矢量场中任意两点 P_1 、 P_2 之间的积分

$$\int_{P_1}^{P_2} n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r}$$

与积分路径无关。可以证明, 当曲线 l 从折射率不同的两均匀媒质的分界面 T 上穿过时, 上述拉格朗日积分不变式仍然成立。

事实上, 假设闭曲线 l 在折射面 T 的两侧的部分曲线段分别记为 l_1 和 l_2 , 如图 1-7 所示。今用折射面 T 的两侧上的曲线 l_3 、 l_4 把 l 与 T 的两交点分别进行联结, 使得 l_1 与 l_3 , l_2 与 l_4 分别组成闭曲线, 记作 $l_1 + l_3$ 和 $l_2 + l_4$ 。现在利用(1.58)式求 $n\mathbf{s}$ 沿它们的环量, 得

$$\int_{l_1+l_3} n_1\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{l_2+l_4} n_2\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{r} = 0$$

由此可得

$$\int_{l_1} n_1\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{l_2} n_2\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_{l_3+l_4} (n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.60)$$

根据反射定律, 在 $l_3 + l_4$ 上矢量 $\mathbf{a}_{12} = (n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1)$ 都与分界面 T 正交, 故上式中最后一个积分为零。于是, (1.60)式就变成(1.58)式。

费马原理也是几何光学中的基本定理之一。它的内容是: 一条射线在任何两点 P_1 和 P_2 之间的光学长度, 比联结这两点的任何其它曲线的光学长度都要短。这些比较曲线应处于这条射线的某一正则邻域内。这里所说的正则邻域是指被射线所覆盖的一个邻域, 其中每一点有且仅有一条射线通过。费马原理通常又称为最短光程原理。

为了证明上述结论, 取一束射线来讨论。这时, 将射线看作是矢线, 射线束就是矢线

管，称之为射线管。现在将射线管中射线 l 的一段 P_1P_2 与联结这两点的任一其它曲线 l_1 进行比较（图 1-8）。为此，选取两相邻的波阵面，并设它们与射线 l 相交于 Q_1 和 Q_2 ，与曲线 l_1 相交于 Q_3 和 Q_5 。又设 Q_4 是通过 Q_2 、 Q_5 两点的波阵面与过点 Q_3 的射线 l' 的交点。容易看出，我们只要证明

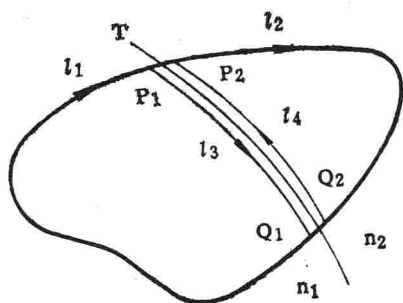


图 1-7 拉格朗日不变式的推导

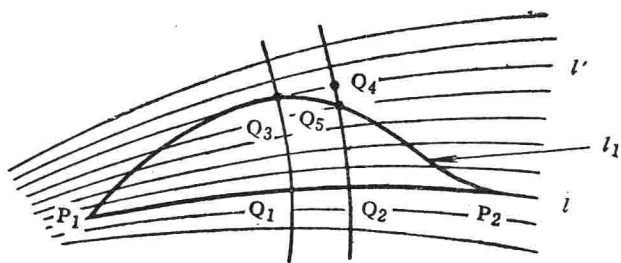


图 1-8 费马原理图示

$$\int_{\widehat{Q_1 Q_2}} n ds < \int_{\widehat{Q_1 Q_2}} n ds \quad (1.61)$$

就行了。如果注意到 Q_1, Q_3 与 Q_2, Q_4 分别是两波阵面上的对应点，则由 (1.44) 式可推导出

$$\int_{\widehat{Q_1 Q_2}} n ds = \int_{\widehat{Q_1 Q_2}} n ds$$

因此，若证明了如下的不等式

$$\int_{\widehat{Q_1 Q_2}} n ds < \int_{\widehat{Q_1 Q_2}} n ds \quad (1.62)$$

则费马原理便成立。

今对曲边三角形 $Q_3 Q_5 Q_4$ 应用拉格朗日不变式，有

$$\int_{\widehat{Q_3 Q_5}} n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\widehat{Q_5 Q_4}} n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\widehat{Q_3 Q_4}} n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.63)$$

因为 $\mathbf{s}$ 与波阵面上的 $d\mathbf{r}$ 正交，故

$$\int_{\widehat{Q_3 Q_4}} n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.64)$$

另外，从矢量的标量积的定义可知，在曲线段 $Q_3 Q_5$ 上有

$$n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} \leq n ds$$

所以

$$\int_{\widehat{Q_3 Q_5}} n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} \leq \int_{\widehat{Q_3 Q_5}} n ds \quad (1.65)$$