GAODENGSHUXUE

高等数学

（上册）

王顺凤　吴亚娟　孙艾明　杨阳・编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学(上册)

王顺凤　吴亚娟
孙艾明　杨　阳　编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

内容提要

本书根据编者多年的教学实践与教改经验，结合教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《高等数学课程教学基本要求》编写而成.

全书分上、下册出版. 本书为上册部分. 上册包括函数的极限与连续、一元函数微分学、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分与定积分的应用共六章内容. 书后还包括习题参考答案与附录[预备知识、一些常用的中学数学公式、几种常用的曲线、基本积分表、MATLAB 软件简介(上)]. 每节都配适量的习题，每章后附有总复习题，便于教师因材施教或学生自主学习.

本书突出重要概念的实际背景和理论知识的应用. 全书结构严谨、逻辑清晰、说理浅显、通俗易懂. 例题较多且有一定梯度，便于学生自学. 本书可作为高等院校理、工、经管各类专业高等数学的教材使用，也可作为工程技术人员与考研复习的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/王顺凤等编. —南京：东南大学出版社，2014. 9

ISBN 978-7-5641-5032-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 132807 号

高等数学(上册)

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号
邮　　编	210096
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	兴化印刷有限责任公司
开　　本	700 mm×1000 mm 1/16
印　　张	18. 5
字　　数	321 千字
版　　次	2014 年 9 月第 1 版
印　　次	2014 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-5032-7
定　　价	32. 00 元(上册)

前　言

本教材是按照教育部提出的高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试理、工、经管类数学考试大纲和南京信息工程大学理、工、经管类高等数学教学大纲，以及2004年教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《高等数学课程教学基本要求》，并汲取近年来南京信息工程大学及滨江学院高等数学课程教学改革实践的经验，借鉴国内外同类院校数学教学改革的成功经验，由南京信息工程大学滨江学院三期教改项目资助编写而成. 本书力求具有以下特点：

1. 突出培养通适型、应用型人才的宗旨，注重介绍重要概念的实际背景，强调数学的思想和方法，适当弱化理论教学，强化应用教学. 力求使学生会用数学知识解决较简单的实际问题.

2. 在保证科学性的前提下，充分考虑高等教育大众化的新形势，构建学生易于接受的微积分系统. 如对较难理解的极限、连续等概念部分，先介绍其描述性定义，在此基础上再介绍极限、连续的精确定义，使学生易于接受；如对微分与积分部分，都以实际问题为背景引入概念；在积分的应用部分，都强调应用元素法解决实际问题，使学生对微积分的思想有更全面的认识.

3. 为了便于教师因材施教以及适应分层次教学的需要，对有关例题和习题进行了分层处理. 每节的后面都配有适量梯度明显的习题给不同程度的学生选用，习题主要包括基础题与少量的综合题，基础题用于训练学生掌握基本概念与基本技能；综合题用于训练学生综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力；每章的最后还配有总复习题，用于学生复习与巩固知识.

4. 充分注意与现阶段中学教材的衔接，本书对反三角函数作了简要介绍，并在附录中补充介绍了数学归纳法、极坐标及一些常用的中学数学公式等，供读者查阅.

5. 本教材对例题作了精心选择，教材中例题丰富，既具有代表性又有一定的梯度，适合各类读者的要求.

6. 根据内容特点，在附录中引入MATLAB数学软件的简要介绍，并给出了

有关案例应用,使学生能较早接触数学软件的学习,为今后运用数学软件解决实际问题打下基础.

教材中的教学内容可根据各类专业的需要选用,本书兼顾了理、工、经管各类专业的教学要求,在使用本书时,参照各专业对数学教学的基本要求进行取舍. 如经济管理类的专业,多元函数的积分部分只须选讲二重积分,级数部分的傅立叶级数可不讲. 理工类专业可以不讲数学在经济方面的应用等. 教材中标有“*”号的内容不作教学要求,可根据各类专业的需要选用.

本教材由南京信息工程大学滨江学院王顺凤、吴亚娟、孙艾明、杨阳老师集体编写与校对,全书的编写人员集体认真讨论了各章的书稿,刘红爱、官琳琳、孟祥瑞、咸亚丽、许志奋等许多老师都提出了宝贵的修改意见,全书的框架、统稿、定稿由王顺凤老师承担,第1章至第3章由王顺凤老师编写,第4章至第6章由吴亚娟老师编写,习题部分由杨阳老师编写,附录部分由孙艾明老师编写.

南京信息工程大学数统院薛巧玲教授仔细审阅了全部书稿,提出了宝贵的修改意见,在此向薛巧玲教授表示衷心的感谢!

本书的出版得到南京信息工程大学滨江学院领导,以及东南大学出版社的领导与编辑们的大力支持与帮助,在此表示衷心感谢!

由于编者水平所限,编写时间偏紧,书中必有不少缺点和错误,敬请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编者

2014 年 7 月

目　　录

1　函数的极限与连续

法国数学家笛卡儿(Rene Descartes)在17世纪把变量引入数学,由此运动进入了数学,辩证法进入了数学,在此基础上才创立了微积分,它是人类思维的伟大成果之一,是现代科学技术的重要基础理论之一.高等数学的基本内容是微积分,它以函数为研究对象,利用极限来研究函数的各种形态.本章主要介绍函数、极限和连续这些重要的基本概念及有关性质,并着重介绍极限与连续的基本思想与方法,为学好微积分打下基础.

1.1　函数

1.1.1　变量与常用数集

我们在观察某个自然现象或变化过程时,会遇到许多数量,这些数量一般可分为两类:有一类如面积、体积、长度等在该过程中保持不变的量,称之为**常量**;另一类在该过程中不断变化的量,称之为**变量**.例如在观察圆的面积大小变化时,直径与周长都是变量,而圆的周长与直径的比值(圆周率)π是一个常量;在自由落体运动中,物体的下降速度、下降时间及下降距离都是变量,而物体的质量在该过程中可以看作常量.一般地,用字母$a,b,c,\cdots$表示常量,用字母$x,y,z,t,\cdots$表示变量.一个量是变量还是常量,要在具体问题中作具体分析.例如就小范围地区来说,重力加速度g是不变的常量,但就广大地区来说,重力加速度g就是一个变化的量.

讨论变量间的数量关系时,需要确定变量的取值范围,单个变量的取值范围常用数集来表示.本书讨论的变量在没有特别说明的情况下都是指在实数范围内变化的量.常用的数集除了有自然数集$\mathbf{N}$、正整数集$\mathbf{N}^{+}$、整数集$\mathbf{Z}$、有理数集$\mathbf{Q}$、实数集$\mathbf{R}$外,还常用区间和邻域来表示.

区间是用得较多的一类数集,它表示介于两个实数之间的一切数构成的实数集,在数轴上对应位于a到b之间的一条线段,设$a,b\in\mathbf{R}$,且$a<b$,则数集

$$\{x \mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$$

称为**开区间**,记作(a,b),即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$$

数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为**闭区间**,记作$[a,b]$,即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$$

类似地,数集

$$\{x \mid a < x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\} \quad 与 \quad \{x \mid a \leqslant x < b, x \in \mathbf{R}\}$$

均称为**半开半闭区间**,分别记作$(a,b]$与$[a,b)$,即

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}, \quad [a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b, x \in \mathbf{R}\}$$

其中 a 与 b 称为**这些区间的端点**,$b-a$ 称为**这些区间的区间长度**.以上四种区间均为有限区间,区间长度 $b-a$ 是有限的数值.此外还有下列五种无限区间,引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则有

$$(a,+\infty) = \{x \mid x > a, x \in \mathbf{R}\}, \quad [a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a, x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b, x \in \mathbf{R}\}, \quad (-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty,+\infty) = \mathbf{R}$$

这些区间的区间长度都为无穷大.

为了描述函数在一点邻近的某些性态,还会经常用到邻域的概念,下面引入邻域的概念.

定义 1 设 $a,\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$,数集$\{x \mid |x-a| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$.其中点 a 与数 δ 分别称为该邻域的中心与半径.

在几何上,邻域$U(a,\delta)$表示数轴上与点 a 的距离小于 δ 的点集,因此该点集是以点 a 为中心,半径为 δ 的一个开区间(图 1-1(a)),即

$$U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$$

当不强调邻域的半径时,常用 $U(a)$ 表示以点 a 为中心的任意邻域.如果将邻域 $U(a,\delta)$ 的中心点 a 去掉,得到的数集$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$称为以点 a 为中心,半径为 δ 的去心邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$(图 1-1(b)),即

$$\mathring{U}(a,\delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$$

(a) (b)

图 1-1

应当指出,对于邻域的半径虽然没有明确规定其大小,但一般总是取很小的正数.

1.1.2 函数的基本概念

先介绍一些数学上常用的符号.

符号"∀"表示"任意(确定)的"或者"任意一个"的意思;符号"∃"表示"存在"或者"有"的意思.例如"$\forall x$"表示"任意(确定)的 x",而"$\exists x$"表示"存在 x"的意思.

函数研究的就是变量之间的对应关系,在同一自然现象或变化过程中,往往同时有两个或更多个变量变化着,这些变化互相联系并遵循一定的规律,函数就是描述这种联系的一个法则.例如,在初速度为 0 的自由落体运动中,路程 s 与时间 t 是两个变量,当时间变化时,对应的路程也随之改变,它们之间有关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \quad (t\geqslant 0) \tag{1-1}$$

又例如在电阻两端加直流电压 V,电阻中有电流 I 通过,电流 I 随电压 V 改变而改变,其变化规律为

$$I=\frac{V}{R}$$

若电阻 $R=20$,则

$$I=\frac{1}{20}V \tag{1-2}$$

(1-1)、(1-2)两式均表达了两个变量之间相互联系的变化规律,当取定其中一个变量的数值时,另一变量的值就随之确定,数学上把这种对应关系称为函数关系.

定义 2　设同一变化过程中的两个变量为 x,y,当 x 在给定的范围 D 内任意取定一个值时,另一个变量 y 按某一给定的法则 f 有一个确定的值与之相对应,就称 y 是 x 的函数,x 称为自变量,y 称为因变量,记作

$$y=f(x) \quad (x\in D)$$

其中数集 D 称为 $f(x)$ 的定义域.

一般地,在函数 $y=f(x)$ 中,函数的定义域是使得式子 $f(x)$ 有意义的 x 的集合,这时也称其为**该函数的自然定义域**.但在实际问题中,函数 $y=f(x)$ 的定义域还要根据问题中的实际意义来确定.

由定义 2 可知,$f(x)$ 也表示与 x 对应的函数值,因此对应于 x_0 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$,全体函数值构成的集合称为**函数 $y=f(x)$ 的值域**,记作 $f(D)$,即

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

符号 $f(x)$ 中的 f 表示 y 与 x 之间的对应关系,故 f 仅仅是一个函数对应法则的记号,也可用其他符号如 φ,F 等表示,这时,函数 $y=f(x)$ 就可写成 $y=\varphi(x)$ 或 $y=F(x)$.但一个函数在同一个问题中只能取定一种记号,当同一问题中涉及多个函数时,则应取不同的符号分别表示它们各自的对应法则,以免混淆.

例 1 求函数 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1-x^2)$ 的定义域.

解 由题意可知函数中 x 满足不等式组:

$$\begin{cases}1-x^2>0\\ x\neq 0\end{cases}$$

解得

$$-1<x<0,0<x<1 \quad 即 \quad x\in(-1,0)\cup(0,1)$$

则该函数的定义域为$(-1,0)\cup(0,1)$.

例 2 设 $f(x)=x^2+x$,求 $f(h+1),f(a),f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

解 将 $f(x)$ 中的变量 x 分别用 $h+1,a,\dfrac{1}{a}$ 代替,解得

$$f(h+1)=(h+1)^2+(h+1)=h^2+3h+2$$

$$f(a)=a^2+a$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}=\frac{1+a}{a^2}$$

一般地,若两个函数的定义域相同,对应法则也相同,则称**这两个函数相等**.因此函数的定义域及其对应法则称为**函数的二要素**.

例如函数 $f(x)=\ln x^2$ 与 $f(x)=2\ln x$,它们的对应法则虽相同,但定义域不同,所以它们不是相同的函数.又如函数 $y=x$(当 $x\geqslant 0$ 时)与 $y=(\sqrt{x})^2$,它们的对应法则相同,定义域也相同,因此它们是相同的函数.

一般地,如果函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 在定义域内任取一值时,对应的函数值 y 都是唯一的,则称 y 为 x 的**单值函数**.如果自变量 x 都有两个或两个以上的值 y 与之相对应,则称 y 为 x 的**多值函数**.本书中凡是没有特别说明的函数都是指单值函数.若遇到多值函数时,我们就把它化为若干个单值函数分别来讨论就可以了.

由于函数对应法则是多种多样的,因而函数的表示方法有多种形式,常见的主要有:表格法、图示法、解析(公式)法.

表格法就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出,实际应用中常用此法.例如火车时刻表就是用列表的方法列出出站和进站对应的车次与时间的函数关系.其优点是从表上可直接看出 y 随 x 的变化而变化的情况,使用上较方便,缺点是只能表达有限个对应数据.

图示法是把变量 x 与 y 对应的有序数组 (x,y) 看作直角坐标平面内点的坐标,y 与 x 的函数关系就可用坐标平面内的曲线来表示.例如气象站中的温度记录器,它记录了空气中温度与时间的函数关系.这种关系是通过仪器自动描绘在纸带上的一条连续不断的曲线来表达的.其优点是直观性强,缺点是没有给出函数关系的

表达式,不便于作理论上的推导与演算.

解析法(也称公式法)是把两个变量之间的关系直接用公式或解析式表示,高等数学中所涉及的函数大多用解析法来表示.例如 n 次多项式函数

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

这里 $a_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 均为常数,n 为自然数,x 为自变量,$x \in \mathbf{R}$. 以及有理函数

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

这里 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 均为多项式函数,它们都是用解析式表示的函数.

有时在函数定义域的不同范围内的 x 所对应的函数关系并不相同,这时就要用几个不同的解析式来表示一个函数,例如函数(图 1-2(a))

$$y = \begin{cases} x+2, & x \leqslant 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$$

与符号函数(图 1-2(b))

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

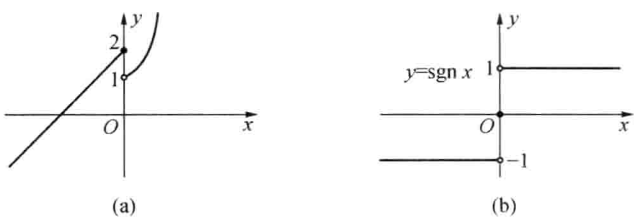

图 1-2

在不同的范围内用不同的解析式分段表示的函数称为分段函数.上面两个例子就是分段函数,在自然科学与工程技术中也经常用到分段函数.

应当指出,分段函数是用不同的解析式表示一个(而不是几个)函数.因此对分段函数求函数值时,要注意自变量所在的范围,自变量在哪个范围就应代入相应范围对应的解析式中去求.

例如常用记号$[x]$表示“小于或等于 x 的最大整数”,显然$[x]$是由 x 唯一确定的,如

$$[-1.5] = -2,\quad [1.3] = 1,\quad [2.43] = 2,\quad [0] = 0$$

函数 $y = [x]$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$,值域是整数集 $\mathbf{Z}$,它表示 y 是不超过 x 的最大的整数.故称函数 $y = [x]$ 为**取整函数**.该函数是分段函数,其图形如图 1-3 所示.

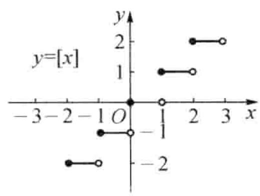

图 1-3

上述用解析式或公式所表示的函数，都是直接用一个或几个关于自变量的式子来表示的，这样的函数也称为**显函数**. 除此以外，在很多实际问题中，变量之间的函数关系也可用一个方程来表示，例如在直线方程 $x+2y=1$ 中，给定实数 x，就有一个确定的 y 值 $\left(y=\frac{1}{2}(1-x)\right)$ 与之相对应，因此在方程 $x+2y=1$ 中隐含了一个函数关系 $y=\frac{1}{2}(1-x)$. 又如椭圆的方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 确定了两个单值函数

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(\text{当 } y\geqslant 0 \text{ 时})\quad\text{与}\quad y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(\text{当 } y\leqslant 0 \text{ 时}).$$

在 xOy 平面上，函数 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 表示上半椭圆，函数 $y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 表示下半椭圆，这两个单值函数称为原来函数的**单值分支**，它们都是由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 确定的. 但也有一些方程确定的函数关系不那么容易甚至不可能直接用自变量的解析式表示出来. 例如开普勒(Kepler) 方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0\quad(\varepsilon \text{ 为常数}, 0<\varepsilon<1)$$

在这个方程中不可能将 y 用 x 的解析式表示出来，尽管如此，它仍能确定 y 是 x 的函数.

若能由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的函数(满足函数的定义)，则称**函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数**. 有时直接通过对方程恒等变形，可以将这个隐函数求出，例如由方程 $2x+5y=2$ 可以解得函数 $y=\frac{2-2x}{5}$，这个过程称为**隐函数的显化**. 例如方程 $x^2+y^2=a^2$ 当 $y\geqslant 0$ 时可显化为函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，它的图形为以原点为中心、半径为 a 的上半圆周. 但不是每个隐函数都可以显化，如方程 $e^{xy}+x-\sin y=1$ 确定的隐函数是无法显化的，因此隐函数是表达函数的一种必不可少的形式. 需要注意的是：任意一个方程并不一定就能确定一个隐函数. 究竟在什么条件下能够由一个方程来确定一个隐函数呢?这将在第 9 章中给出相关结论.