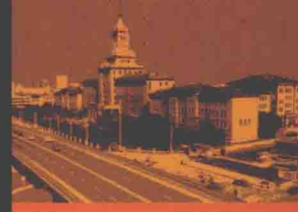

HIT

数论经典著作系列

Basic Analytic Number Theory

解析数论基础(第二版)

[俄]卡拉楚巴 著　　潘承彪 张南岳 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数论经典著作系列

解析数论基础

Basic Analytic Number Theory

（第二版）

[俄] 卡拉楚巴 著

潘承彪 张南岳 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

由黑龍江省精品圖書出版工程專項資金資助出版

内 容 简 介

本书以解析数论的四个著名问题：平面区域内的整点问题、素数分布问题、Goldbach问题和Waring问题为中心，很好地阐明了解析数论的三个重要方法：复积分法、圆法及三角和法. 本书的特点是少而精，叙述和证明简洁. 阅读本书仅需要初等数论、微积分及复变函数基础知识. 书中每章后都配有习题，其中一些是近代解析数论的最重要的成果，读者可通过这些习题了解近代解析数论的研究领域.

本书可供大专院校数学系师生、研究生及有关的科学工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

解析数论基础/(俄罗斯)卡拉楚巴著；潘承彪，张南岳译. —2版.
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.1
ISBN 978-7-5603-4432-4

Ⅰ.①解… Ⅱ.①卡… ②潘… ③张… Ⅲ.①解析数论
Ⅳ.①O156.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第276514号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张14.5 字数290千字
版 次 2014年1月第2版 2014年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4432-4
定 价 48.00元

◎译者说明

我们在 1984 年翻译出版了本书的第一版. 本书在不长的篇幅中,通过精心选材有机组织,系统而简洁地介绍了解析数论研究的中心问题及其研究方法,并配有与介绍内容密切相关的问题. 这是大学生学习解析数论和数学工作者了解解析数论基本内容的好教材. 当时我国学习研究数论的热情高涨,但国内还没有这样的书籍,经过比较,选择了翻译这本我们认为是当时国际上最好的解析数论入门书,介绍给国内读者.

1988 年,在本书作者 Карацуба 教授访问北京时,他把本书的第二版赠送给我们,它对第一版做了很好的补充与改进.

翻译出版本书的第一版至今快三十年了,应该说本书仍是最好的解析数论入门书之一. 所以,当刘培杰先生建议翻译出版本书的第二版时,我们就很高兴地同意了.

第二版的内容、特点、学习本书的方法及其与第一版的不同,在作者的序言中已做了清楚的介绍. 我们想说的是,除了新增加了第一章"整点问题",每章都配备了问题(在第一版中有几章是没有问题的)外,本书的内容并没有变化(只是把原有的第一章～第七章变为第二章～第七章,以及改进了第三章～第七章、第十章、第十一章中的若干定理的证明). 与第一版相比本书最有特色的改进是,不仅对各章原有的问题作了修改与补充并予以更好地组织,而且在书末给出了所有问题的解法简介或提示,这在同类型的书中是没有的,对学习研究解析数论是非常有益的.

本书的内容在潘承洞与潘承彪合著的《解析数论基础》(科学出版社，北京，1991)中都有讨论，有些结果要比这里的好，在该书中还介绍了本书所没有的一些解析数论方法和问题，有兴趣的读者可以参考比较.

本书责任编辑刘家琳女士改正了书中不少笔误和疏忽，提出了有益建议，改进了编排，在此表示衷心的感谢!

潘承彪　张南岳

2012 年冬

序言

数论是研究整数的性质. 解析数论是数论的一个分支，除了数论所特有的方法外，它本质上是利用数学中的解析工具来研究数论问题.

本书的目的是向广大的读者介绍解析数论的一些中心问题. 撇开次要的细节，我力求介绍那些导致该理论的现代发展状况的主要内容. 所以书中所给出的结果常常不是目前已知的最好结果，但两者之间并无原则差异.

本书讨论解析数论中的四个问题：平面区域内的整点问题，自然数列及算术数列中的素数分布问题，Goldbach 问题与 Waring 问题. 以解决这些问题为例，介绍了解析数论中的基本方法：И. М. Виноградов的三角和方法，复变积分法以及 G. H. Hardy-J. E. Littlewood-S. Ramanujan 的圆法.

在每一章后都配有问题，这些问题与讨论的主题紧密相关，建议读者依次去做. 这些问题或者进一步阐明所证明的定理，或者引出现代数论的新想法.

阅读本书要求读者具备以下知识：И. М. Виноградов 的《Основы теорнн чнсеп》(数论基础)，大学教材范围内的数学分析知识，以及在 И. И. Привалов 的《Введение в теорию функций комплексного переменого》(复变函数引论) 范围内的复变函数论知识[①].

① 所提到的两本书均有中译本. 本书所需的这方面的预备知识，在通常的初等数论和大学复变函数教材中都可找到. —— 译者注.

因为本书各章之间互相关联，建议读者依次阅读本书. 如果一个论题在书中出现多次，那么仅在它首次出现时做详细论述. 学习每一个结论，包括从一个关系式转换至另一个关系式（等式，不等式），都应该有根据的清楚地加以理解. 只有这样来阅读本书才是有用的.

本书中的问题有着特别重要的作用，它们基本上是很困难的，可以看作是进一步研究的课题.

与本书所有有关的内容，历史发展及文献，可在专著[1] ～ [12] 中找到.

命题和公式按每章各自编号，在引用其他章节的命题和公式时将指出其所在的章节.

第二版与第一版有很大的不同. 新增加了第一章 —— 整点问题，改写了第三章 ～ 第七章、第十章、第十一章中的若干定理的证明，以及给出了问题解法的简介或提示.

在写本书时得到了以下各位的很大帮助：Г. И. Архипов，С. М. Вронин，А. Ф. Лаврик，В. Н. Чубариков. Л. Н. Абрамочкиной 和 Р. И. Сорокиной 打印和编辑了本书的手稿. 谨对以上所有的同志表示衷心感谢.

А. А. Карацуба

记　　号

$c, c_0, c_1, \cdots$ 表示绝对正的常数，一般地说，在不同的定理中它们是不同的.

当 A 是正的时，记号 $B = O(A)$，$B \ll A$ 表示 $|B| \leqslant cA$；记号 $A \asymp B$ 表示

$$c_1 A \leqslant B \leqslant c_2 A$$

$\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots$ 表示任意小的正常数. n, m, k, l, N 表自然数；除第二章外，p，$p_1, \cdots$ 表素数. $\mu(n)$ 表 Möbius 函数

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n = p^2 m \\ (-1)^k, & n = p_1 \cdots p_k \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时

$$\ln x = \log x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}, \mathrm{Li}\ x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} + c_0$$

其中

$$c_0 = \lim_{\delta \to 0} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} + \int_{1+\delta}^2 \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} \right), \quad \exp F = \mathrm{e}^F$$

$\Lambda(n)$ 表 Mangoldt 函数

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k \\ 0, & n \neq p^k \end{cases}$$

$\varphi(k)$ 表 Euler 函数 —— 不大于 k 且与 k 互素的自然数的个数.

$\psi(x)$ 表 Чебышев 函数

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n), \pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1$$

当 $l \leqslant k, (l, k) = 1$ 时

$$\psi(x; k, l) = \sum_{\substack{n \equiv l (\bmod k) \\ n \leqslant x}} \Lambda(n)$$

$$\pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \equiv l (\bmod k) \\ p \leqslant x}} 1$$

$\tau(n)$ 表 n 的正除数的个数；$\tau_k(n)$ 表方程 $x_1 x_2 \cdots x_k = n$ 的解数，$x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是自然数；因此 $\tau_2(n) = \tau(n)$；$\Omega(n)$ 表 n 的所有的素因子个数. 对于实数 α，$[\alpha]$ 表 α 的整数部分，即不超过 α 的最大整数；$\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ 表 α 的小数部分；$\| \alpha \| = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$ 表 α 到最近整数的距离.

s 表复数，$s = \sigma + \mathrm{i}t$，其中 $\mathrm{i}^2 = -1$，$\mathrm{Re}\ s = \sigma$，$\mathrm{Im}\ s = t$；$\bar{s} = \sigma - \mathrm{i}t$；一般地，$\bar{f}$ 表与 f 共轭的量；$\ln s = \log s$ 处处表示对数主值. Euler 常数 γ 定义为

$$\gamma = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \ln m\right)$$

Riemann Zeta 函数和 Dirichlet L－级数的非显然零点是按其虚部的绝对值增长的顺序计算的；三角和是指形如

$$\sum_{n \leqslant p} G(n) \exp(2\pi \mathrm{i}\, F(n))$$

的有穷和，其中 G 和 F 是自然数 n 的实值函数

$$\exp(\mathrm{i}\varphi) = \cos \varphi + \mathrm{i}\sin \varphi$$

◎ 目录

整　点

第一章

本章要讨论整点理论中最重要的问题，这就是“关于圆内整点个数的 Gauss 问题”和“Dirichlet 除数问题”. 我们假定在平面上已经给定了一个笛卡儿坐标系 xOy.

§1　问题的提出，辅助命题及最简单的结果

定义　坐标为(x,y)的点 M 称为是整点，如果 x,y 都是整数.

考虑圆 $x^2+y^2\leqslant R$，我们以 $K(R)$ 表示这个圆内的整点个数. 对于大的 R，$K(R)$ 的值接近于圆面积 πR. 以 $\Delta(R)$ 表示 $K(R)$ 与 πR 的差，即 $\Delta(R)=K(R)-\pi R$.

关于圆内整点个数的 Gauss 问题就是要去得到，当 $R\to+\infty$ 时，量 $|\Delta(R)|$ 的最佳可能的上界估计.

Dirichlet 除数问题是与此类似的. 我们考虑双曲线 $xy=R$，以及在其下方的具有正坐标的整点个数 $L(R)$. 设

$$\Delta_1(R)=L(R)-R(\ln R+2\gamma-1)\quad R\to+\infty$$

这里 γ 是 Euler 常数. 在这里我们是要去得到量 $|\Delta_1(R)|$ 的最佳可能的上界估计.

从 $L(R)$ 和函数 $\tau(n)$（n 的除数个数）的定义可得到等式

$$L(R)=\sum_{n\leqslant R}\tau(n)$$

这就说明了为什么把它称为“除数问题”.

这里提出的问题是以下更为一般的区域内的整点个数问题的特殊情形，这个区域由曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是区间$[a,b]$上的非负连续函数，以及直线 $x=a, x=b$ 及 $y=0$ 所围成，而且假定整点 $M=(x,y)$ 满足条件 $a<x\leqslant b$，$0<y\leqslant f(x)$. 以 T 表示这样的整点的个数. 那么，我们有

$$T=\sum_{a<x\leqslant b}[f(x)]=\sum_{a<x\leqslant b}f(x)-\sum_{a<x\leqslant b}\{f(x)\} \tag{1}$$

这样就产生了两个问题：a) 求出第一个和的值；b) 求出第二个和的尽可能好的渐近公式. 在对 $f(x)$ 作相当一般的假定下，利用定理 1 可解决第一个问题. 而整点理论问题的基本困难在于第二个问题.

定理 1（Euler-Maclaurin 公式） 设 $f(x)$ 是区间$[a,b]$上的二次连续可微函数，以及函数 $\rho(x),\sigma(x)$ 由以下等式定义

$$\rho(x)=\frac{1}{2}-\{x\},\sigma(x)=\int_0^x\rho(u)\mathrm{d}u$$

那么，我们有

$$\sum_{a<x\leqslant b}f(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\rho(b)f(b)-\rho(a)f(a)+\sigma(a)f'(a)-\sigma(b)f'(b)+\int_a^b\sigma(x)f''(x)\mathrm{d}x$$

证 我们假定在区间$(a,b]$上至少包含一个整点，以整点划分积分区间，我们得到

$$\int_a^b\sigma(x)f''(x)\mathrm{d}x=\int_a^{[a]+1}\sigma(x)f''(x)\mathrm{d}x+\sum_{n=[a]+1}^{[b]-1}\int_n^{n+1}\sigma(x)f''(x)\mathrm{d}x+\int_{[b]}^b\sigma(x)f''(x)\mathrm{d}x$$

在所得到的每一个积分区间内，$\rho(x)$ 和 $\sigma(x)$ 是连续可微函数，且有 $\sigma'(x)=\rho(x)$. 所以，由两次分部积分可得

$$\int_a^{[a]+1}\sigma(x)f''(x)\mathrm{d}x=-\sigma(a)f'(a)+\frac{1}{2}f([a]+1)+\rho(a)f(a)-\int_a^{[a]+1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_n^{n+1}\sigma(x)f''(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(n+1)+\frac{1}{2}f(n)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{[b]}^b\sigma(x)f''(x)\mathrm{d}x=\sigma(b)f'(b)-\rho(b)f(b)+\frac{1}{2}f([b])-\int_{[b]}^b f(x)\mathrm{d}x$$

把以上所得的结果代入前面的关系式，即得定理的结论. 如果在区间$(a,b]$不包含整点，那么要证的结论右边的和式为 0. 注意到 $\sigma'(x)=\rho(x)$，直接对 $\int_a^b\sigma(x)f''(x)\mathrm{d}x$ 分部积分两次亦得定理的结论. 证毕.

注 在应用中，常常只要用到下面较简单的公式

$$\sum_{a<x\leqslant b}f(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\rho(b)f(b)-\rho(a)f(a)-\int_a^b\rho(x)f'(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

这时，这一公式仅需要 $f(x)$ 是区间$[a,b]$上的连续可微函数就成立.

现在我们来讨论 Gauss 问题和 Dirichlet 问题.

定理 2(Gauss)　对于 $K(R)$ 有以下渐近公式成立

$$K(R)=\pi R+\Delta(R)\quad \Delta(R)=O(\sqrt{R})$$

证　我们来考虑曲边梯形(见图 1)

$$0<x\leqslant\sqrt{\frac{R}{2}},0<y\leqslant\sqrt{R-x^2}$$

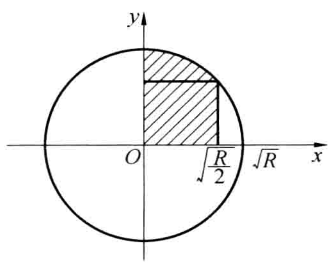

图 1

整个圆 K 可由 8 个这样的曲边梯形区域来构成. 因为这些区域的交是边长为 $\sqrt{\frac{R}{2}}$ 的正方形，所以从式(1) 推出

$$\begin{aligned}K(R)&=1+4[\sqrt{R}]+8\sum_{0<x\leqslant\sqrt{\frac{R}{2}}}[\sqrt{R-x^2}]-4\left(\left[\sqrt{\frac{R}{2}}\right]\right)^2\\&=8\sum_{0<x\leqslant\sqrt{\frac{R}{2}}}\sqrt{R-x^2}-2R+4\sqrt{2R}\left\{\sqrt{\frac{R}{2}}\right\}+\\&\quad 4\sqrt{R}-8\sum_{0<x\leqslant\sqrt{\frac{R}{2}}}\{\sqrt{R-x^2}\}+O(1)\end{aligned}$$

利用定理 1 计算上式中的和式

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{\frac{R}{2}}}\sqrt{R-x^2}=\int_0^{\sqrt{\frac{R}{2}}}\sqrt{R-u^2}\,\mathrm{d}u+\left(\frac{1}{2}-\left\{\sqrt{\frac{R}{2}}\right\}\right)\sqrt{\frac{R}{2}}-\sqrt{\frac{R}{2}}+$$

$$\sigma\left(\sqrt{\frac{R}{2}}\right)\frac{\sqrt{\frac{R}{2}}}{\sqrt{\frac{R}{2}}}+\int_0^{\sqrt{\frac{R}{2}}}\sigma(u)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}(\sqrt{R-u^2})\,\mathrm{d}u$$

因为 $|\sigma(u)|\leqslant\frac{1}{8}$，以及上式中第一个积分就是曲边梯形的面积，等于$\frac{\pi R}{8}+\frac{R}{4}$，由此推出

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{\frac{R}{2}}}\sqrt{R-x^2}=\frac{\pi R}{8}+\frac{R}{4}+\frac{\sqrt{R}}{2\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{R}{2}}\left\{\sqrt{\frac{R}{2}}\right\}-\frac{\sqrt{R}}{2}+O(1)$$

由此得到

$$K(R)=\pi R+\Delta(R)$$

这里

$$\Delta(R)=2\sqrt{2R}-8\sum_{0<x\leqslant\sqrt{\frac{R}{2}}}\{\sqrt{R-x^2}\}+O(1)=O(\sqrt{R}) \qquad (3)$$

这就证明了所要的结论.

定理 3(Dirichlet)　对于 $L(R)$ 有以下渐近公式成立

$$L(R)=R(\ln R+2\gamma-1)+\Delta_1(R)\quad \Delta_1(R)=O(\sqrt{R})$$

这里 γ 是 Euler 常数.

证　我们来考虑曲边梯形(见图 2)

$$1\leqslant x\leqslant\sqrt{R},0<y\leqslant\frac{R}{x}$$

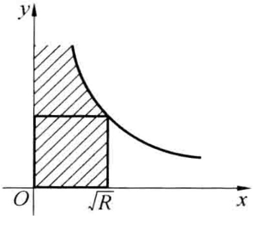

图 2

区域 L 可由这样的两个曲边梯形来构成.应用公式(1)得到

$$L(R)=2\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}}\left[\frac{R}{x}\right]-([\sqrt{R}])^2=2R\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}}\frac{1}{x}-2\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}}\left\{\frac{R}{x}\right\}-R+2\sqrt{R}\{\sqrt{R}\}+O(1)$$

由定理 1 可得

$$\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}}\frac{1}{x}=\int_1^{\sqrt{R}}\frac{\mathrm{d}u}{u}+\left(\frac{1}{2}-\{\sqrt{R}\}\right)\frac{1}{\sqrt{R}}-\frac{1}{2}+\sigma(\sqrt{R})\frac{1}{R}-\sigma(1)+2\int_1^{\sqrt{R}}\sigma(u)\frac{\mathrm{d}u}{u^3}$$

$$=\ln\sqrt{R}+\left(\frac{1}{2}-\{\sqrt{R}\}\right)\frac{1}{\sqrt{R}}-\frac{1}{2}+2\int_1^{\infty}\sigma(u)\frac{\mathrm{d}u}{u^3}+O\left(\frac{1}{R}\right)$$

由 Euler 常数的定义知

$$\gamma=\lim_{y\to\infty}\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant Y}\frac{1}{n}-\ln Y\right)$$

对括号中的和式应用定理 1 可得

$$\gamma=-\frac{1}{2}+2\int_1^{\infty}\sigma(u)\frac{\mathrm{d}u}{u^3}$$

综合以上各式，对 $L(R)$ 的值就得到公式

$$L(R)=R\ln R+2\sqrt{R}\left(\frac{1}{2}-\{\sqrt{R}\}\right)+2(\gamma-1)R-2\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}}\left\{\frac{R}{x}\right\}+$$
$$2\sqrt{R}\{\sqrt{R}\}+O(1)$$
$$=R(\ln R+2\gamma-1)+\Delta_1(R)$$

这里

$$\Delta_1(R)=\sqrt{R}-2\sum_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{R}}\left\{\frac{R}{x}\right\}+O(1)=O(\sqrt{R})\tag{4}$$

这就证明了所要的结论.

注 如果函数 $f(x)=\sqrt{R-x^2}\left(0<x\leqslant\sqrt{\frac{R}{2}}\right)$ 和 $f(x)=\frac{R}{x}(0<x\leqslant\sqrt{R})$ 的小数部分都是“一致”分布的，即对于任意区间 $(a,b)\subset[0,1]$，属于该区间上的函数 $f(x)$ 的小数部分的个数与该区间的长度成比例，那么有

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{\frac{R}{2}}}\sqrt{R-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{2}}+o(\sqrt{R})$$

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{R}}\left\{\frac{R}{x}\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{R}+o(\sqrt{R})$$

(为得到这些结论，只要把区间 $[0,1)$ 划分为相等的“小”区间)，以及由此就可以改进定理 2 和定理 3，得到

$$\Delta(R)=o(\sqrt{R}),\Delta_1(R)=o(\sqrt{R})$$

§2 整点理论问题与三角和的关系

§1 中的整点问题可以归结为 $f(x)$ 的小数部分的和的渐近性质问题. 这与 $\{f(x)\}$ 的值的分布问题密切相关，后者就导致研究三角和. 建立这些联系是 §2 的基本内容.

在这些问题的研究中，经常用到的是考虑某种类似于区间的特征函数的函数，但它要远为光滑.

在下面的引理中，我们来构造这种函数.

引理 1 设整数 $r\geqslant 1$，α,β 及 Δ 是实数，满足 $0<\Delta<\frac{1}{4}$ 及 $\Delta\leqslant\beta-\alpha\leqslant 1-\Delta$. 那么，存在周期为 1 的函数 $\psi(x)$，满足条件：

a) 在区间 $\alpha+\frac{\Delta}{2}\leqslant x\leqslant\beta-\frac{\Delta}{2}$ 上，$\psi(x)=1$；