21世纪高等教育计算机规划教材

COMPUTER

离散数学

Discrete Mathematics

吴明芬 张先勇 主编

朱铁丹 李继容 副主编

内容全面，深入浅出

实例丰富，易于理解和掌握

典型应用，增加知识趣味性

人民邮电出版社

POSTS & TELECOM PRESS

21世纪高等教育计算机规划教材

离散数学

Discrete Mathematics

吴明芬 张先勇 主编
朱铁丹 李继容 副主编

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 / 吴明芬，张先勇主编. -- 北京 : 人民邮电出版社，2014.9
21世纪高等教育计算机规划教材
ISBN 978-7-115-36543-9

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①吴… ②张… Ⅲ. ①离散数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第185103号

内 容 提 要

本书共 8 章，详细介绍了命题逻辑、谓词逻辑、集合与关系、函数、图论基础、特殊图、代数系统基础、几个典型的代数系统中的有关概念、定理及其证明方法。本书既强化基本概念的描述，又阐述了离散数学的证明方法及各部分知识的应用实例，展示了离散数学在计算机科学与技术及相关领域的应用，同时注重突出知识的内在联系、循序渐进及相互依存。

本书可作为应用型本科院校和工程类本科院校计算机科学与技术及相关专业的教材，也可供相关技术人员学习参考。

◆ 主　　编　吴明芬　张先勇
副 主 编　朱铁丹　李继容
责任编辑　许金霞
责任印制　彭志环　杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京鑫正大印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：14.5　　2014 年 9 月第 1 版
字数：386 千字　　2014 年 9 月北京第 1 次印刷

定价：36.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学基础理论的核心课程之一。离散数学以研究离散量（如整数、有理数、有限字母表等）的数学结构、性质和相互间的关系为主要目标，其研究的对象一般是有限个或可数个元素，因此它充分描述了计算机科学离散性的特点。计算机科学中的程序设计语言、数据结构、操作系统、数据库技术、编译理论、算法分析、可计算性与计算复杂性理论、逻辑设计、系统结构、容错诊断、人工智能与机器人、机器定理证明等理论课程都是以离散数学为基础的。

本书以教育部计算机科学与技术教学指导委员会最新编制的《高等学校计算机科学与技术专业规范》和《高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案》为指导，对教学内容进行定位和设计，并针对应用型本科院校和工程类本科院校计算机科学和技术及相关专业的本科生进行选材。本书在编写过程中结合了计算机科学和现代数学发展的新成果，以及作者多年离散数学课程教学和精品课程建设的经验，并考虑了教学时数相对较少的现实情况，充分听取了广大师生对该课程的意见。

离散数学的特点是概念多、理论性强和高度抽象，学生学习起来往往比较困难。五邑大学计算机学院、数学学院、经济管理学院的相关专业的培养计划中都将离散数学作为核心基础课程，但学时不断被压缩，如计算机学院，从最初的 72 学时，调整为 64 学时，再到 48 学时。针对这种情况，我们在参考各种离散数学教材的基础上，结合作者多年的教学实践，没有将离散数学内容按照模块分割，而是突出知识的内在联系，循序渐进，相互依存。本书共分 8 章，依次为命题逻辑、谓词逻辑、集合与关系、函数、图论基础、特殊图、代数系统基础、几个典型的代数系统。数理逻辑构造了一套符号体系，这个体系可以描述集合、关系、函数中的所有概念。而关系是笛卡儿乘积的子集，函数是关系的子集，代数运算是函数的子集。代数系统是带有代数运算的集合，半群、群、环、域、格和布尔代数是一些典型的代数系统，本质上图也是一类特殊的代数系统。本书在编写上，既强化基本概念的描述，又阐述了离散数学的证明方法及各部分知识的应用实例，展示了离散数学在计算机科学与技术及相关领域的应用。

本书的主要特色如下。

1. 将最基本、最重要的内容选入，并努力做到简明扼要、深入浅出，既保持各章体系的独立性，又展现出它们的密切联系。

2. 通过大量的实例从不同的角度对一些抽象的概念进行诠释，使其易于被学生接受和理解。

3. 将同类且对比鲜明的概念或结论集中阐述，并通过典型的实例进行对比说明，使学生深刻理解它们的区别与联系。

4. 每章内容的最后一节介绍了离散数学相关理论在日常生活、计算机科学及信息科学中的一些典型应用，以使学生认识到离散数学的重要性，增加知识的趣味

性，以激发学生学习的积极性。

5. 精心安排各部分内容的先后顺序，使教材的结构更合理、内容更充实、语言更通俗易懂。

总之，本书在内容的组织上，力求提供培养学生抽象思维、慎密概括和严密的逻辑推理能力知识的同时，注重展现离散数学在计算机科学及信息科学中的应用，以增强学生使用离散数学知识分析问题和解决问题的能力。通过学习离散数学课程，学生在获得离散问题建模、离散数学理论、计算机求解方法和技术知识的同时，还可以培养和提高抽象思维能力和严密的逻辑推理能力，为今后处理离散信息以及用计算机处理大量的日常事务和科研项目、从事计算机科学和应用打下坚实基础。

本书由张先勇老师撰写第 1 章、第 2 章，李继容老师撰写第 3 章和第 4 章，朱铁丹老师撰写第 5 章和第 6 章，吴明芬老师撰写第 7 章、第 8 章。老师之间相互补充修正，最后吴明芬对全书各章的应用进行了适当的补充并统稿。

计算机学院的研究生刘超和司彦飞帮忙处理了一些图片、习题的录入和答案的求解，管理学院的学生也帮助进行文稿录入。作者在此深表谢意。

我们在编写过程中参阅了许多国内外离散数学教材及专著，在此对这些作者们表示感谢。在本书的编写过程中，得到了人民邮电出版社领导和编辑的大力支持，在此表示深深的谢意。

由于我们的水平和经验有限，书中错误及不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2014 年 6 月于五邑大学

目　　录

第 1 章 命题逻辑

逻辑学是研究思维形式及其规律的科学。逻辑规律就是客观事物在人的主观意识中的反映。根据所研究的对象和方法的不同，逻辑学主要分为辩证逻辑、形式逻辑和数理逻辑。

数理逻辑是数学的一个分支，也称符号逻辑。最早提出用数学方法来描述和处理逻辑问题的是德国数学家莱布尼茨（G.W.Leibniz），后经德·摩根（De Morgan）、布尔（George Boole）、弗雷格（F. L.G. Frege）等科学家们的研究逐步形成了严格的数理逻辑体系。

数理逻辑最早应用于开关线路的理论中，之后在计算机科学与控制理论方面得到应用，并成为它们的理论基础。本书介绍的命题逻辑和谓词逻辑是数理逻辑的最基本的内容。

1.1 命题及联结词

1.1.1 命题

命题逻辑的研究对象是命题，即推理的前提和结论都是命题。

定义 1.1.1 有确切真值的陈述句称为命题。

命题必须是一个陈述句，命题要有确切的真值，真值只取两个值："真"和"假"。"真"和"假"二者必居其一，也只居其一。"真"和"假"分别用"T"（或"1"）和"F"（或"0"）表示。一切没有判断内容的句子，如感叹句、疑问句、祈使句、二义性的陈述句等都不能作为命题。

例 1.1.1 判断下列语句哪些是命题？如果是命题，指出其真值。

（1）广州是广东省会。

（2）广东省是中国常住人口最多的省份。

（3）他正在说假话。

（4）101+1=110。

（5）$x+y>0$。

（6）3 能被 2 整除。

（7）火星上有生物。

（8）请坐下！

（9）你有问题吗？

（10）今天天气真好呀！

解 语句（1）和语句（2）是命题，且真值为"真"。语句（3）虽是一个陈述句，但却无法

确定它的真值。如果把语句视为一个命题，且取值为“真”，那么和语句表达内容矛盾。如果取值为“假”，也和语句表达内容矛盾。这个语句在语义上的自相矛盾，是一个悖论。所以陈述句不一定都是命题。语句（4）在二进制数的运算中是一个真值为“真”的命题，在其他进制数的运算中是真值为“假”的命题。语句（5）中的 x、y 是未知数，$x+y$ 随着 x、y 的取值在变化，$x+y$ 可能大于零，也可能不大于零，其真假无法确定，故不是命题。语句（6）是命题，其真值为“假”。语句（7）是命题，其真值要根据实际情况做出判断。语句（8）、（9）、（10）不是陈述句，故不是命题。

以上这些命题语句都是一些简单的陈述句。在自然语言中语句常常是由几个简单语句连接而成的，例如，“如果周末天气晴朗，则我们将到郊外旅游”，“2 既是素数又是偶数”，“我乘公交车上班当且仅当天下雨”等等。所以我们把命题分成原子命题和复合命题。**原子命题**也称简单命题，即不能再分解为更为简单的命题的命题。**复合命题**是可以分解为若干简单命题的命题，而且这些简单命题之间是通过如“或者”、“并且”、“不”、“如果……则……”、“当且仅当”等这样的联结词和标点符号复合而构成的一个命题。

无论是原子命题，还是复合命题，统称为命题，通常用大写英文字母 A，B，C 或带下标的英文字母 P_i，Q_j 等表示命题。

1.1.2 命题联结词

在自然语言中，一般通过联结词和标点符号将一些简单的句子联结成复杂的语句，命题逻辑中最常见的联结词主要有以下五种。

定义 1.1.2 设 P 是任一命题，复合命题“非 P”（或“P 的否定”）称为 P 的否定式，记为 $\neg P$。“$\neg$”为否定联结词，$\neg P$ 为真当且仅当 P 为假，其真值如表 1.1.1 所示。

表 1.1.1 否定的真值表

P	$\neg P$
1	0
0	1

例 1.1.2 将命题“今天不是星期天”符号化。

解 设命题 P：今天是星期天。

则命题“今天不是星期天”可以符号化为：$\neg P$。

当 P 的真值为假时，$\neg P$ 的真值为真；当 P 的真值为真时，$\neg P$ 的真值为假。在自然语言中，联结词“$\neg$”是“非”、“不”和“没有”等的逻辑抽象。

定义 1.1.3 设 P，Q 是任两个命题，复合命题“P 并且 Q”（或“P 和 Q”）称为 P 与 Q 的合取式，记为 $P\wedge Q$。“$\wedge$”为合取联结词。$P\wedge Q$ 为真当且仅当 P，Q 同为真，其真值如表 1.1.2 所示。

表 1.1.2 合取的真值表

P	Q	$P\wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

例 1.1.3　将命题“2 既是素数又是偶数”符号化。

解　设命题 P：2 是素数，Q：2 是偶数。

则命题“2 是素数又是偶数”可符号化为：$P \wedge Q$。

当 P 的真值为真，Q 的真值也为真，则 $P \wedge Q$ 的真值为真；否则 $P \wedge Q$ 的真值为假。在自然语言中，联结词“$\wedge$”是“并且”、“既……又……”、“但”、“和”等的逻辑抽象。

定义 1.1.4　设 P，Q 是任两个命题，复合命题“P 或 Q”称为 P 与 Q 的析取式。记为 $P \vee Q$，“$\vee$”为析取联结词。$P \vee Q$ 为真当且仅当 P、Q 中至少一个为真。$P \vee Q$ 真值如表 1.1.3 所示。

表 1.1.3　析取的真值表

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

例 1.1.4　将命题“梁启越是 100 米或 200 米冠军”符号化。

解　设命题 P：梁启越是 100 米冠军，Q：梁启越是 200 米冠军。

则命题“梁启越是 100 米或 200 米冠军”可符号化为：$P \vee Q$。

当 P，Q 的真值均为假，则 $P \vee Q$ 的真值为假；其他情况 $P \vee Q$ 均为真。这里 P 和 Q 可以同时为真，即梁启越可以是 100 米冠军同时也是 200 米冠军。此时“$\vee$”也称为是“可兼或”。但是命题“我今天上八点到十点在大礼堂开会或在教室上离散数学课”是“不可兼或”，两者不能同时为真。“不可兼或”将在后面介绍。在自然语言中，联结词“$\vee$”是“或”、“或者”等逻辑抽象。

定义 1.1.5　设 P，Q 是任两个命题，复合命题“若 P，则 Q”称为 P 与 Q 的条件式，记为 $P \to Q$。“$\to$”为条件联结词，P 称为条件式的前件，Q 称为条件式的后件。$P \to Q$ 为假当且仅当 P 为真且 Q 为假。$P \to Q$ 真值如表 1.1.4 所示。

表 1.1.4　条件式的真值表

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

例 1.1.5　将命题“如果周末天气晴朗，则我们将到郊外旅游”符号化。

解　设命题 P：周末天气晴朗，Q：我们将到郊外旅游。

则命题可符号化为：$P \to Q$。

如果周末天气晴朗，即 P 为真，我们必然到郊外旅游，因此 Q 也为真。因此 $P \to Q$ 的真值为真。但如果周末天气不晴朗，即语句 P 为假，此时无论我们是否去郊外旅游，也即 Q 无论真假，都有 $P \to Q$ 的真值为真。

定义 1.1.6　设 P、Q 是任两个命题，复合命题“P 当且仅当 Q”称为 P 与 Q 的双条件式，记作 $P \leftrightarrow Q$，“$\leftrightarrow$”为双条件联结词。$P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 同时为真或同时为假。$P \leftrightarrow Q$ 真值如表 1.1.5 所示。

表 1.1.5　双条件式的真值表

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

例 1.1.6　将命题“1+1=2 当且仅当雪是白的”符号化。

解　设 P：1+1=2，Q：雪是白的。

则命题符号化为：$P\leftrightarrow Q$。

当 P 为真，Q 也为真；或者 P 为假，Q 也为假时，$P\leftrightarrow Q$ 都为真；否则 $P\leftrightarrow Q$ 为假。“$\leftrightarrow$”是自然语言中的“充分必要条件”、“当且仅当”等的逻辑抽象。

例 1.1.7　设命题 P：雪是白色的，Q：1+1=2。

将下列命题符号化：

（1）因为雪是白色的，所以 1+1=2。

（2）如果 1+1=2，则雪是白色的。

（3）只有雪是白色的，才有 1+1=2。

（4）只要雪不是白色的，就有 1+1=2。

（5）除非雪是白色的，否则 1+1=2。

（6）雪是白色的当且仅当 1+1=2。

解　根据题意以上命题符号化为：

（1）$P\to Q$。

（2）$Q\to P$。

（3）$Q\to P$。

（4）$\neg P\to Q$。

（5）$\neg P\to\neg Q$ 或 $Q\to P$。

（6）$P\leftrightarrow Q$。

在命题符号化过程中，$P\to Q$ 通常描述为：（1）因为 P 所以 Q；（2）只要 P 就 Q；（3）P 仅当 Q；（4）只有 Q，才 P；（5）除非 Q，才 P；（6）除非 Q，否则非 P；（7）没有 Q，就没有 P。

例 1.1.8　设命题 P：明天下雨，Q：明天下雪，R：我将去学校。

符号化下述语句：

（1）除非明天不下雨并且不下雪，否则我将不去学校。

（2）只要明天不下雨或不下雪，我就去学校。

（3）只有明天不是雨夹雪，我才去学校。

（4）明天上午我将雨雪无阻一定去学校。

解　（1）$R\to\neg P\wedge\neg Q$；

（2）$\neg P\vee\neg Q\to R$；

（3）$R\to\neg(P\wedge Q)$；

（4）$((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\wedge R$。

例 1.1.9　如图 1.1.1 所示的开关电路表示一复合命题，将此复合命题符号化。

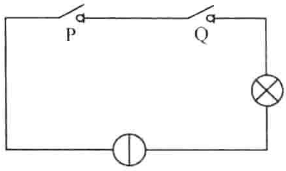

图 1.1.1（a）串联电路

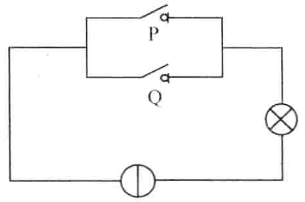

图 1.1.1（b）并联电路

解：设命题 P：开关 P 闭合；Q：开关 Q 闭合。

在图 1.1.1（a）中，只有当命题 P 和 Q 都为真时，也即是开关 P 和 Q 都闭合时，联接在电路上的灯泡才亮，此时该串联电路可用 $P\wedge Q$ 表示。

在图 1.1.1（b）中，只有当命题 P 为真或 Q 为真，或命题 P，Q 同为真时，也即是仅开关 P 闭合或仅开关 Q 闭合，或开关 P，Q 同时闭合时，联接在电路上的灯泡才会亮，此时该并联电路可用 $P\vee Q$ 表示。

联结词连接的是两个命题真值关系，而不是命题内容之间的连接，因此复合命题的真值只取决于构成它们的各原子命题的真值，而与它们的内容、含义无关，与联结词所连接的两原子命题之间是否有关系无关。

例如，雪是白的当且仅当 1+1=2。“雪是白的”与“1+1=2”在内容上毫无相关，但其真值却相同，所以该语句的真值结果为真。

联结词“$\wedge$”、“$\vee$”、“$\leftrightarrow$”具有对称性，而联结词“$\neg$”、“$\rightarrow$”不具对称性。联结词“$\wedge$”、“$\vee$”、“$\neg$”同构成计算机的“与门”、“或门”和“非门”电路是相对应的，从而命题逻辑是计算机硬件电路的表示、分析和设计的重要工具。

命题联结词运算之优先级（从高到低）为：否定—合取—析取—条件—双条件。同级的联结词，按其出现的先后次序（从左到右）运算。若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号，括号中运算的优先级最高。

除了五个联结词“$\neg$”、“$\wedge$”、“$\vee$”、“$\rightarrow$”和“$\leftrightarrow$”之外，还可以定义更多的联接词，如计算机中的硬件电路设计、分析常使用的异或、与非、或非等，将在 1.5 节给予详细说明。

1.2　命题公式及其分类

根据命题及命题联结词定义知道，不含任何联结词的命题叫做原子命题，至少含有一个联结词的命题称作复合命题。同时，为了更广泛地应用命题演算，在研究时，只考虑命题的“真”、“假”，而不管它的具体含义。对于给定的符号 P，Q，R 等，我们不关心它所代表的是什么命题，而是只关心 P，Q，R 等本身的“真”、“假”值。

定义 1.2.1　一个命题通常用 P，Q 等符号来表示，称为命题标识符。一个命题标识符如表示确定的命题，就称为**命题常量**。如果命题标识符只表示任意命题的位置标志，就称为**命题变元**。

因为命题变元可以表示任意命题，所以它不能确定真值，故命题变元不是命题。当命题 P 用一个特定命题取代时，P 才能确定真值，这时也称对 P 进行**指派**。当命题变元表示原子命题时，该变元称为原子变元。

1.2.1 命题公式

设命题 P 和 Q 是任意命题，则 $\neg P$，$P\wedge Q$，$(P\vee Q)\vee(P\rightarrow Q)$等都是复合命题。若 P 和 Q 是命题变元，则以上各式称作命题公式。具体定义如下。

定义 1.2.2 命题公式（简称公式，也称合式公式）可按如下规则生成：

（1）命题变元本身是一个公式。

（2）如果 G 是公式，则$(\neg G)$也是公式。

（3）如果 G，H 是公式，则$(G\wedge H)$，$(G\vee H)$，$(G\rightarrow H)$，$(G\leftrightarrow H)$也是公式。

（4）仅由有限步使用规则（1）、（2）、（3）后所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串才是命题公式。

由上述定义可知：

（1）原子命题变元是最简单的命题公式，称原子公式。

（2）有的命题公式没有确定的真值，只有对其命题变元进行真值指派后，方可确定命题公式的真值。

（3）命题公式的结构可以很简单，如原子命题公式，也可以很复杂。

（4）为了叙述方便，也分别称$(P\wedge Q)$，$(P\vee Q)$，$(P\rightarrow Q)$，$(P\leftrightarrow Q)$为合取式、析取式、条件式、双条件式，而称 P，Q 分别为$(P\wedge Q)$，$(P\vee Q)$的合取项和析取项。

假设 G 是含有 n 个命题变元 P_1，P_2，…，P_n 的公式，常将命题公式记为 $G(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n)$或简记 G。

例如，符号串：

$$P\wedge(Q\vee R)\leftrightarrow Q\wedge(S\rightarrow R)$$
$$\neg P\wedge Q$$
$$P\rightarrow(\neg P\wedge Q)$$
$$P\wedge Q\wedge(R\vee Q)\leftrightarrow(P\rightarrow R)$$

等都是命题公式。

但符号串：

$$(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg Q)$$
$$(P\rightarrow Q$$
$$(\vee Q\vee(R$$
$$P\vee Q\vee$$

等都不是合法的命题公式。

运用命题公式可以把自然语言中的有些语句，翻译成数理逻辑中的符号形式。

例 1.2.1 将下列命题符号化。

（1）虽然今天天气晴朗，老张还是不来。

（2）除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去。

（3）停机的原因在于语法错误或者程序错误。

（4）若 a 和 b 是偶数，则 $a+b$ 是偶数。

解 （1）假设命题 P：今天天气晴朗；Q：老张要来。

则“老张不来”可表示为 $\neg Q$，而“天气晴朗”与“老张不来”将会同时发生，所以它们之间的关系将是合取关系，即可符号化为：$P\wedge\neg Q$。

（2）“除非……否则不……”表示如果前者事件不发生，我一定不做什么；或者说如果我做了什么，前者是一定发生. 即如果我出去的话，你肯定陪伴了我或代我叫车子；或者如果你不陪伴我，也不代我叫车子的话，那我肯定不出去。

假设命题 P：你陪伴我；Q：你代我叫车子；R：我出去。

则“你不陪伴我”可表示为$\neg P$，“你不代我叫车子”可表示为：$\neg Q$，“我不出去”表示为：$\neg R$，全句可完整地符号化成：

$\neg P\wedge \neg Q\to \neg R$ 或 $R\to P\vee Q$

（3）“停机”、“语法错误”和“程序错误”在句子中只能作为一个名词，而不能作为一个完整的句子，即不能作为一个命题。要作为一个命题，句子中必须要有动词，如“机器停下来”、“语法出现错误”、“程序出现错误”可以是一个命题。在上述句子中，只能将“停机的原因在于语法错误”和“停机的原因在于程序错误”作为两个简单的命题。

假设命题 P：停机的原因在于语法错误；Q：停机的原因在于程序错误。

则它们之间的关系可用析取关系表示，即可符号化为：$P\vee Q$。

（4）整个句子的关系是一个非常明显的“如果……则……”关系，句中前提部分“a 和 b”中的“和”不能单纯的理解为两个名词之间的联结词，否则“a 和 b”是偶数是无法理解的。此时只能将该句子分解成“a 是偶数”和“b 是偶数”才行。

如果假设命题 P：a 是偶数；Q：b 是偶数；R：$a+b$ 是偶数。

则整个语句可完整地符号化成：$P\wedge Q\to R$。

1.2.2　命题公式的解释与真值表

公式是由命题变元、逻辑联结词、括号组成的合法的符号串，而命题变元是一个抽象的概念，若不指定命题变元的真值，则公式真值不确定。反之，若对所有的命题变元都指定一定的真值，则公式就变成了一个具有确切真值的命题。

定义 1.2.3　设命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在公式 G 中的所有命题变元，若指定 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一组真值，则这组真值称为公式 G 的一个解释，常记为 I。

因此，设 G 是一个公式，I 是 G 的一个解释，显然，G 在 I 下有真值。由于每一个公式可能存在着不止一种解释，这种解释的多少与公式中的命题变元的个数有关。对每一个命题变元都有“真”、“假”两种不同的解释，若有两个命题变元，则有 4 种不同的解释。一般来说，一个命题公式若有 n 个命题变元，则应有 2^n 个不同的解释。真值表可以直观地表示一个公式所有可能的解释与公式在各解释下的真值。

定义 1.2.4　公式 G 在其所有可能的解释下所取真值的表，称为 G 的真值表。

例 1.2.2　考虑一组命题公式：

$$G_1\triangleq \neg(P\to Q)\to P$$
$$G_2\triangleq (P\to Q)\wedge P$$
$$G_3\triangleq \neg(P\wedge \neg Q)\leftrightarrow \neg(P\to Q)$$

写出这组公式的真值表。

解　根据命题公式计算的优先级，公式 $G_1\triangleq \neg(P\to Q)\to P$ 的计算顺序依次为 $P\to Q$，$\neg(P\to Q)$，$\neg(P\to Q)\to P$。公式 G_1 的真值计算可以根据联结词的优先级逐步运算，结果如表 1.2.1 所示，也可以直接写出真值，如表 1.2.2 所示。

由于公式 G_1，G_2，G_3 均含有两个命题变元，可以将这三个公式同时写在一个真值表中，如

表 1.2.3 所示。

表 1.2.1　　公式 G_1 的真值表

$P\quad Q$	$P\to Q$	$\neg(P\to Q)$	$\neg(P\to Q)\to P$
0　0	1	0	1
0　1	1	0	1
1　0	0	1	1
1　1	1	0	1

表 1.2.2　公式 G_1 的真值表

$P\quad Q$	$\neg(P\to Q)\to P$
0　0	0　1　**1**
0　1	0　1　**1**
1　0	1　0　**1**
1　1	0　1　**1**

表 1.2.3　　公式 G_1，G_2，G_3 的真值表

$P\quad Q$	$\neg(P\to Q)\to P$	$(P\to Q)\wedge P$	$\neg(P\wedge\neg Q)\leftrightarrow\neg(P\to Q)$
0　0	1	0	0
0　1	1	0	0
1　0	1	0	0
1　1	1	1	0

例 1.2.3　设有公式：$G\triangleq(P\to((\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R))\vee Q$，试建立该公式的真值表，其中，$P$，$Q$，$R$ 是 G 的所有命题变元。

解　根据命题公式的定义及公式计算的优先级别，公式 G 的计算次序应该是：$\neg P$，$\neg P\leftrightarrow Q$，$(\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R)$，$P\to((\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R)$，G，则其真值表如表 1.2.4 所示。

表 1.2.4　　公式 G 的真值表

$P\,Q\,R$	$(P\to((\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R))\vee Q$
0 0 0	1　1　0　0　**1**
0 0 1	1　1　0　0　**1**
0 1 0	1　1　1　0　**1**
0 1 1	1　1　1　1　**1**
1 0 0	0　0　1　0　**0**
1 0 1	1　0　1　1　**1**
1 1 0	0　0　0　0　**1**
1 1 1	0　0　0　0　**1**

1.2.3　命题公式的分类

命题公式的真值随着各命题变元的真值的变化而变化。在例 1.2.2 中，从这三个公式的真值表可以看到一个非常有趣的事实：公式 G_1 对所有可能的解释都具有"真"值，公式 G_2 对所有可能的解释均具有"假"值，而公式 G_3 则有时为"真"，有时为"假"值。为此可根据命题公式的真值结果将公式分成如下三种不同类型的公式。

定义 1.2.5　（1）公式 G 称为永真公式（重言式），如果它所有解释之下的真值均为“真”。

（2）公式 G 称为可满足的，如果它不是永假的。

（3）公式 G 称为永假公式（矛盾式），如果它所有解释之下的真值均为“假”。有时也称永假公式为不可满足公式。

从上述定义可知三种特殊公式之间的关系：

（1）G 是永真的，当且仅当 $\neg G$ 是永假的。

（2）若 G 是永真式，则 G 一定是可满足式，但反之则不然。

（3）G 是可满足的，当且仅当至少有一个解释 I，使 G 在 I 下为真。

若公式 G 在解释 I 下是真的，则称 I 满足 G；若 G 在解释 I 下是假的，则称 I 弄假 G。

在逻辑研究、计算机推理以及决策判断时，人们对于所研究的命题，最关心的莫过于“真”、“假”问题，所以重言式和矛盾式在数理逻辑的研究中占有特殊且重要的地位。

能否给出一个可行方法，对任意的公式，判定其是否为永真公式、永假公式以及可满足公式的问题，称为给定公式的判定问题。给定一个命题公式，由于其包含的命题变元是有限的，所以其命题公式解释的数目也必是有限的，所以在命题逻辑中，任何一个给定公式的判定问题是可解的（可判断的，可计算的）。亦即，命题公式的永真性、永假性必是可判定的。其判定方法有真值表法和公式推演法。

例 1.2.4　写出下列公式的真值表，并验证其公式是重言式、矛盾式还是可满足公式。

（1）$G_1 \triangleq (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

（2）$G_2 \triangleq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \neg (P \to Q) \vee \neg (Q \to P)$

（3）$G_3 \triangleq (P \to \neg Q) \vee \neg Q$

解　由于三个公式均含有两个命题变元，所以可以将三个公式建立一个真值表，这样就可以根据真值表对公式 G_1、G_2 和 G_3 进行分类判断。公式（1）、（2）、（3）的真值表如表 1.2.5 所示。

表 1.2.5　　公式 G_1，G_2，G_3 的真值表

P Q	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \neg (P \to Q) \vee \neg (Q \to P)$	$(P \to \neg Q) \vee \neg Q$
0 0	1 **1** 1	1 **0** 1 0 1	1 **1**
0 1	1 **1** 1	0 **0** 1 1 0	1 **1**
1 0	0 **1** 0	0 **0** 0 1 1	1 **1**
1 1	1 **1** 1	1 **0** 1 0 1	0 **0**

从上述真值表知，公式（1）是永真公式、（2）是永假公式，公式（3）是可满足公式。

定义 1.2.6　设 G，H 是两个命题公式，P_1，P_2，$\cdots$，P_n 只是出现在 G，H 中所有的命题变元，如果对于 P_1，P_2，$\cdots$，P_n 的每一个解释，G 与 H 的真值结果都相同，则称公式 G 与 H 是等值的（或称等价的），记作 $G \Leftrightarrow H$。

因此，要判断两个公式是否等值，最原始的方法就是将两个公式的真值表列出，判断两个公式的真值表是否相同即可。

定理 1.2.1　对于公式 G 和 H，$G \Leftrightarrow H$ 的充分必要条件是公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式。

证明　“$\Rightarrow$”假定 $G \Leftrightarrow H$，则 G，H 在其任意解释 I 下或同为真或同为假，于是由“$\leftrightarrow$”的意义知，$G \leftrightarrow H$ 在其任何的解释 I 下，其真值为“真”，即 $G \leftrightarrow H$ 为永真公式。

“$\Leftarrow$”假定公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式，I 是它的任意解释，在 I 下 $G \leftrightarrow H$ 为真，因此，G，H 或同为真，或同为假，由于 I 的任意性，故有 $G \Leftrightarrow H$。