1. 解方程 $|x|+2=0$ 由于 $\pm x=-2$ 所以

$x=\pm 2$

2. $\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\sqrt{(a-b)^2}=a-b$;

$\sqrt{x^2}+\sqrt{(1-x)^2}=x+1-x=1$。

3. 由于 $\sqrt[3]{-8}=-2$

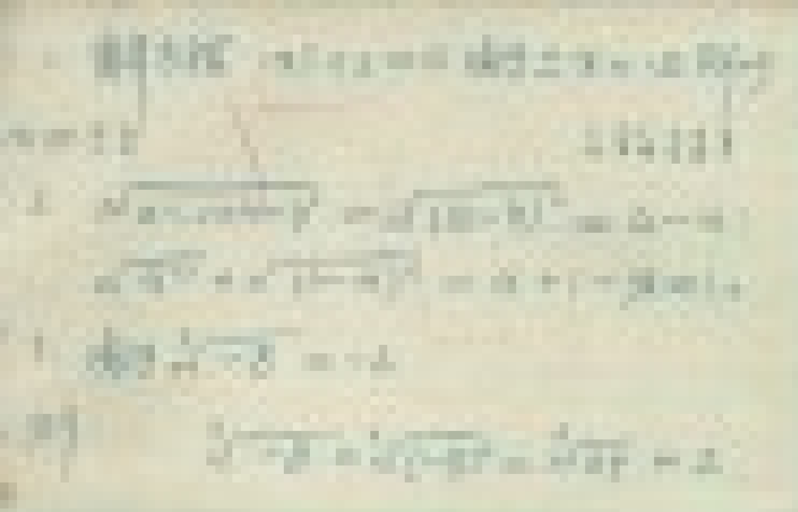
则 $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=2$,

初中数学解难

初中数学解难
初中数学解难

岳明义

学苑出版社



初中数学解难

初中数学解难

初中数学解难

岳明义 著

初中数学解难　　岳明义　著

学苑出版社出版　　社址：北京西四颁赏胡同四号

新华书店北京发行所发行　　一二〇一工厂印刷

开本　787×1092　1/32　印张：4.75　字数：105千字

印数　00001—5100册

1990年9月第1版　1990年9月第1次印刷

ISBN　7—80060—742—9/G·420　　定价：2.40元

前　　言

为了帮助初中生和知识青年解决学习中的疑难问题，学好初中数学这门功课，编写了《初中数学解难》一书。

《初中数学解难》依据教学大纲，紧密结合现行初中数学教材，针对初中生学习中可能遇到的难点和疑点，选用通俗、生动的实例给予深入浅出的解答，以求弥补初中生课堂学习之不足，加深对课本所学知识的理解。在编写中，力求富有知识性、趣味性、针对性和实用性。同时，也注意了从不同角度和不同侧面去培养、提高初中生分析问题和解决问题的能力；力求使这本书成为初中生和知识青年的有益辅助读物，家长指导检查学生学习的助手，教师备课的参考书。

这本书，一般以教材为序，一个疑难点写一专题。有的以问答形式，有的用论证形式。各篇虽有联系，但都可以独立成篇；篇幅长短不一，本着要言不繁的原则，当长则长，宜短则短，力求文字生动活泼，内容简明易懂，并富有启发性。

由于本人水平有限，书中难免有疏漏不足之处，欢迎读者批评指正。

岳明义

目　录

第一部分　基础知识

第二部分　运算与解法

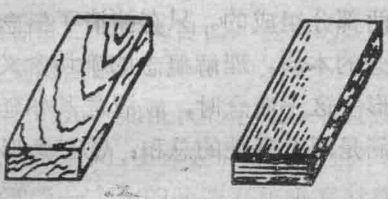
第一部分　基础知识

一、如何学习概念

（一）学习概念要从我们熟悉的事物和知识开始由具体到抽象

数学中的概念，就是人们在生产实践中抓住了事物的本质、事物的全体以及事物的内部联系而总结出来的。因此在学习中，应当从实际事例和我们已有的知识出发来学习概念。这样才能准确地理解概念，掌握概念的本质和所学的知识。

例如，学习“长方体”这个概念，首先应观察图示的一个木块或一个铁块。很显然，它们的物理性质是截然不同的：一个轻，一个重；一个软，一个硬等。但是撇开这些物理性质，只看它们的形状和大小，则是一样的，从而人们在实践中逐渐形成了“长方体”的概念。抽去物体的物理性质，只考察各种物体的形状和大小及位置关系时，就产生了各种几何体或几何图形的概念。



（图 1）

例如，“数轴”这个概念，劳动人民在生产实践中，创造了许多刻度尺和刻度器来表示量的大小。我们常见的米尺、秤、温度计等，它们都

具有计量的起点、计量的方向和计量的单位。因此，可以从这些物理模型中，把它们所共有的数与形的关系抽象出来，于是构成了数轴。我们把规定了方向、原点和长度单位的直线，叫做数轴。这样，数轴就可以使我们直观地看到整个有理数的表象。

再如，“轨迹”这个概念。火车行驶，沿铁轨前进；飞机飞行要有航线；人造地球卫星和月球绕地球旋转都有一定的轨道。这些现象给人们一个共同的印象：运动的物体在运动中都经过一定的路线，这条路线就是物体运动的轨迹。各种实际物体的运动轨迹，反映到几何中，抽象成为动点的轨迹。简单说，就是：

一个点按着某种条件运动时，它所经过的路线就是这点的轨迹。例如火车的一个车轮在一条笔直的铁轨上滚动，它的中心所经过的路线是一条直线。经过数学抽象之后，便得到这样的几何轨迹：在一条定直线的一侧，一个已知圆切于这条直线滚动时，圆心的轨迹是一条直线。

（二）弄清概念的本质属性

概念是由内涵和外延两部分组成的。只有搞清了概念的内涵和外延，才能揭示概念的本质，理解概念的确切含义。

例如，学习“正三角形”这一概念时，应清楚其外延里包括有一切三角形，其内涵是两个属性的总和：①三角形，②三边相等。

“圆”这个概念它的本质属性是“它上面所有的点和它的中心等距”。其他平面图形便不具有这个性质。

“全等多边形”这个概念，它的本质属性表现为“各对应边及各对应角分别相等”。

再如，学习“平行四边形”、“矩形”、“菱形”、“正方形”这些概念时，只有弄清了它们各自的外延和内涵才易准确地区分。它们的外延虽都是四边形，但它们的内涵却不相同：

平行四边形的内涵是两个属性，即四边形和两组对边分别平行的总和。

“矩形”的本质属性是有一个角是直角的平行四边形。

“菱形”的本质属性是一组邻边相等的平行四边形。

“正方形”的本质属性是有一个角是直角并且有一组邻边相等的平行四边形。

给一个概念下定义时一定要注意以下几点：

（1）定义应该与所定义的概念恰如其分，不过广也不过狭。

例如，“圆是封闭的曲线”，这样的定义就广了；“各边相等的四边形是平行四边形”这样定义就狭了。

（2）定义不应是恶性循环的。如果用甲概念去定义乙概念，反过来又用乙概念来定义甲概念，这实质上也就是用概念自己来定义自己。这样的定义叫做循环的定义，在逻辑上是错误的。

例如，如果我们定义两条直线互相垂直为，“若两条直线交成直角，便称它们互相垂直”后，反过来定义直角的定义为“当一个角的两边互相垂直时称它为直角”，便是犯了循环定义的错误。这样的定义方法是无法说明概念的实质的。

（3）定义不应是否定的。

例如，“菱形不是正方形”。这样就无法说明菱形的本质属性。

（4）定义要明显精确，不应模棱两可。

例如，“无起止的线叫做直线”。这样就无法肯定这线一定是直线，会给人以糊涂的概念。

（三）善于对比

概念明确，阐述数学问题就能准确清晰，就能揭示其内在规律。概念不明确，意思就含混不清，直接影响学习效果，导致运算错误。在学习中对于容易产生混淆的概念，要善于运用对比的方法去认识它们之间的区别和联系。平时最容易出现概念混淆的情况，主要有以下几种：

（1）概念不清。

例如，同学们对等式、方程、恒等式等概念常常混为一谈。错误地认为它们都是等式，没有什么本质的区别。主要原因就是对这几个概念不清所造成的。我们要通过对比加以区分：

等式是用等号连接的两个代数式，如 $s=\frac{1}{2}ab$，$3+2-4=1$ 等。

方程虽是等式，但它是含有未知数的等式，是有条件的。如 $x^2+2x-3=0$ 是一元二次方程，只有在 $x=1$ 和 $x=-3$ 时方程才成立。

恒等式则是表示两个代数式恒等的等式。如 $a+b=b+a$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 等。

这里，恒等式和等式、方程的主要区别在于“恒等”二字。“恒等”概念是对两个代数式而言的。如果两个代数式里的字母，换成任意的数值，这两个代数式的值都相等，我们就说这两个代数式恒等。

等式 $t^2+6=5t$ 就不是恒等式，因为尽管有 $t=2$ 时，左边 $=2^2+6=10$，右边 $=5\times2=10$；$t=3$ 时，左边 $=3^2+$

$6=15$，右边$=5\times3=15$。但$t=1$时，左边$1^2+6=7$，而右边$=5\times1=5$。

又如，$x+7=4$也不是恒等式。

再如，同学们初学乘法公式时，常错误地认为$(a\pm b)^2=a^2\pm b^2$。这时，我们可给出字母a与b的值并代入公式$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$和$a^2\pm b^2$中验算比较，从所得结果的不同，可知两概念的本质区别，从而澄清错误认识。

其余四个公式，也可分为两组，一组是二数和与二数差的立方公式；一组是二数的立方和与立方差公式，内容较复杂，也可对比记忆。

（2）分类不当。

例如，“旋转体包括圆柱、圆锥、圆台、球和各种旋转体”这种描述就不恰当。圆柱、圆锥、圆台、球都是旋转体的一种，因此与各种旋转体不能并列，应在“各种旋转体”前面加上“其他”。即旋转体包括圆柱、圆锥、圆台、球和其他各种旋转体。这样，概念就清楚了。

（3）指代不明。

例如，“如果两条直线都和第三条直线垂直，那么，两条直线平行。”这里“两条直线”，不知是指已知三条直线中的哪两条。为此，应在那么的后面加上“这”字。

又如，同学们对“内接”、“外接”、“内切”、“外切”等概念，由于指代不明，易对这些概念发生混淆。应画出图形，经过对比，加以区分：“内”、“外”是以一个图形为准而言的，说明另一个图形在它里面或外面。

例如“三角形的外接圆”是以三角形为准的，指的是在三角形外面，经过它的三个顶点的圆。

“圆的内接三角形”是以圆为准的，指的是在圆的里面，并且三个顶点在此圆上的一个三角形。

内切、外切亦然。“接”和“切”是说明多边形的顶点或边和圆的关系。多边形的各顶点都在圆上的叫“接”，多边形的各边都切于圆的叫“切”。

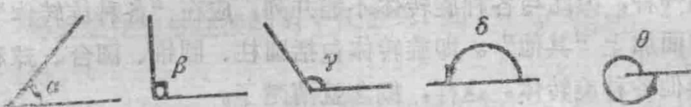
为了直观清晰地理解和区分数学概念，还可以用图象和图表等方法来加以对比。

如线段、射线和直线的图象如下：

线段 AB　　　　射线 OA　　　　直线 l

（图2）

又如锐角、直角、钝角、平角、周角的图象如下：



（图3）

锐角 α：$0^\circ < \alpha < 90^\circ$；直角 $\beta = 90^\circ$；钝角 γ：$90^\circ < \gamma < 180^\circ$；平角 $\delta = 180^\circ$；周角 $\theta = 360^\circ$。

二、谈谈乘法公式的学习

乘法公式是特殊形式的多项式乘法，应用很广，它可以简化运算中的某些过程，尤其在因式分解、解方程及其他内容中经常用到，因而是整式的乘除一章的重点教材之一。这几个公式很重要，同学们一定要熟练地掌握这些公式，灵

活运用这些公式。

（一）要复习好幂的运算法则和多项式乘法的法则

幂的运算法则是整式乘除法的基础，当然也是多项式相乘的特例。因此在开始学习乘法公式前，一定要复习好幂的运算法则和多项式乘法法则：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0,\ m > n)。$$

式中的m、n都是正整数。

$$(a+b)(m+n) = am + an + bm + bn$$

同时还要再通过一些例题加以练习。例如：

（1）计算：

① $a^n x(a^{m-1}x^2)$；　② $b^{n+1}c^{n+2}b^{n-1}c^{n+1}$；

③ $[(-2x^2y)^3]^2$；　④ $[(-a^2b)^3]^3 \cdot (-ab^2)$；

⑤ $x^{n+1}(x^n - x^{n-1} + x)$；　⑥ $(x+y-z)(x-y+z)$；

⑦ $(a-b+c+d)(a+b-c-d)$。

（2）求证：

① $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$
$= a^3+b^3+c^3-3abc$；

② $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$
$= -x^4-y^4-z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2$。

这样做，可为进行乘法公式的学习铺平道路。

（二）要明确两个问题

学习乘法公式要明确两个问题：一是公式的来源和特点；二是公式的应用和公式应用的范围。前者，主要是在推

导公式的过程中去解决；后者可在解题中加以解决。课本中介绍的五个公式，重点是前三个。公式的推导要紧紧抓住多项式相乘的法则，同时要充分利用直观的图形证明，以加深我们对公式的理解和掌握。

1. 平方差公式

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

学习时要注意：

（1）从多项式乘以多项式的复习引出公式后，要明确由公式直接得出a^2-b^2可以简化（$a+b$）（$a-b$）相乘的运算过程，并要通过以下练习，用两种方法（一般乘法和公式法）加以运算和比较。例如：

化简：$x(x+3)-(x+a)(x-a)-(a+1)(a-1)$

解：用一般乘法：

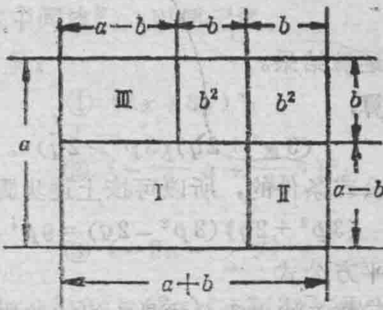
$$\begin{aligned}原式&=x(x+3)-(x^2+ax-ax-a^2)\\&\quad-(a^2+a-a-1)\\&=x^2+3x-x^2+a^2-a^2+1\\&=3x+1。\end{aligned}$$

用公式法，就可使运算步骤简化：

$$\begin{aligned}原式&=3x+x^2-x^2+a^2-a^2+1\\&=3x+1。\end{aligned}$$

（2）要清楚公式的特点：公式左边两因式的字母相同，指数都是1，字母中间的符号一个是加，一个是减；公式右边的字母跟左边每个因式中的字母相同，指数都是2，中间是减号。然后再用语言叙述这个公式。

（3）要利用图形，对公式加以证明。由下图可以看出：



（图 4）

（Ⅰ＋Ⅱ）的面积为 $(a+b)(a-b)$，

（Ⅰ＋Ⅲ）的面积为a^2-b^2，

Ⅱ的面积＝Ⅲ的面积，

故（Ⅰ＋Ⅱ）的面积＝（Ⅰ＋Ⅲ）的面积，

所以，

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

（4）还应明确，正确应用这一公式的关键除了要掌握公式的特点外，还要理解字母的含义。公式中的字母可以表示具体的数（正数或负数），也可以表示单项式或多项式。只要符合公式特点，就可应用这一公式。例如公式中的字母可以表示具体的数，如

$(5+4)(5-4)=5^2-4^2=25-16=9$；

也可以表示单项式或多项式，如

$[x+(2y-3)][x-(2y-3)]=x^2-(2y-3)^2$

（5）通过练习，要总结出使用公式的步骤：

1）认清问题（两数的和、差相乘）；

2）定出哪个数相当于公式中的a，哪个数相当于b，代入公式；

3）求出运算结果。

例如，计算：

$$(3p^2+2q)(3p^2-2q)\text{。}$$

这是符合公式条件的，所以可按上述步骤直接运算，即

$$(3p^2+2q)(3p^2-2q)=9p^4-4q^2\text{。}$$

2．完全平方公式

二数和与二数差的平方公式是一组，式中各项的绝对值都相同而符号不尽相同。与两数平方差公式也有很大差异，可以对比记忆。在熟练掌握平方差公式的基础上，学习这两个公式问题不会太大。同学们在运用这两个公式时，常出现如下错误：

$$(a+b)^2=a^2+ab+b^2,$$

$$(m-n)^2=m^2-n^2,$$

等等。发生这些错误的原因是由于未掌握住公式的来源和特点，把两数和（差）的平方与两数的平方和（差）混淆了。因此，学习公式的推导时应注意以下几点：

（1）公式的推导，要用乘法来完成；

（2）得出公式后，要通过观察，总结出公式的特点：公式的左边是两数和（差）之后再平方；公式右边是三项，首末两项分别是左边括号里两数的平方，符号都是“+”；中间项是这两数积的2倍，公式左边是加，这项也加；左边括号里是减号，这项也是减号；

（3）用课本中的图说明公式的来源，以加深我们对公式的理解；