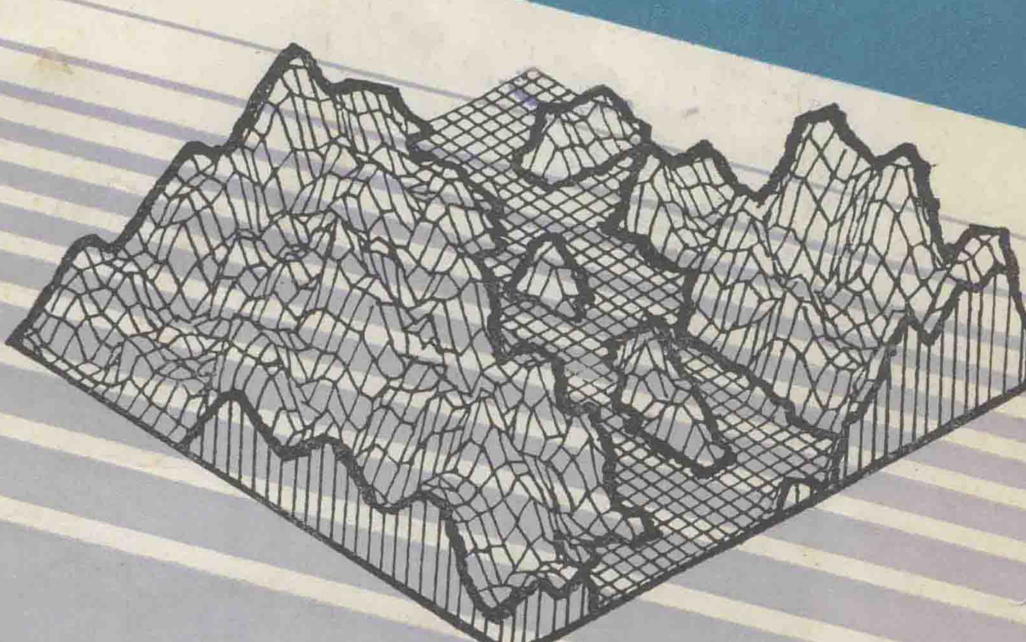
分形几何

——数学基础与应用

谢和平 张永平 宋晓秋 徐汉涛 编译



重庆大学出版社

分 形 几 何

——数学基础与应用

谢和平　张永平　宋晓秋　徐汉涛　编译

（国家自然科学基金资助项目）

重 庆 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书详细介绍了分形几何的数学基础与各种分形模型，给出了各种分形结构的构造和维数的计算方法。内容主要包括：测度与维数、分形集的局部结构、自相似集与自仿射集、动力系统中的分形、随机分形、多重分形测度以及分形在物理和力学中的应用。每章后均附有一定数量的习题。本书内容丰富，论述严谨，条理清楚，便于自学。

本书可作为数学专业高年级本科生、研究生以及物理、力学、化学等专业研究生的教材或教学参考书，也可供从事分形理论和应用研究的广大科技工作者参考。

分 形 几 何

——数学基础与应用

谢和平 张永平 宋晓秋 徐汉涛 编译

责任编辑 刘茂林 吴达周

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重庆建筑工程学院印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：13.75 字数：343 千

1991年 5 月第 1 版 1991年 5 月第 1 次印刷

印数：1—2600

标准书号：ISBN 7-5624-0397-X / O·59 定价：7.85元

序　言

自从法国数学家Mandelbrot于本世纪70年代引入“fractal”一词以来，分形几何理论和应用都有了惊人的发展。分形现象广泛存在于自然科学和社会科学的众多领域，分形几何的应用对自然科学和社会科学的发展产生了深刻的影响。80年代以来，国内也出现了“分形热”，并且出版了几本介绍分形几何概念和应用的著作和译著，然而还是缺少系统地论述分形几何理论和方法的著作。英国数学家Falconer所著“*Fractal Geometry: Mathematical Foundation and Applications*”（Wiley, New York, 1990）较系统地介绍了分形几何数学理论、模型和方法，论述严谨而且通俗易懂，每章后面有注释与参考，包含进一步的参考资料。每章后还附有习题，此书既是一本好教材，也是从事分形几何理论和应用的好的参考书。为了将此书中丰富的内容介绍给我国读者，我们将此书编译出版。编译过程中，在保持原有特色的前提下有所取舍，并且在最后一章中将分形在力学方面的部分应用成果编入此书。

在本书的引言中概貌地介绍了一些分形集的例子，其中部分例子将在后面的有关章节进一步加以论述。为了便于读者阅读本书，在第一章中简要地介绍了一些数学概念。在第二章中介绍了分形几何中最基本的概念：Hausdorff测度与维数。第三章中介绍了维数的其它几种定义，其中最重要的是盒维数。维数是描述集合的分形特征的一个重要参数。第四章中将介绍求维数的几种方法和技巧。第五章中讨论了分形集的局部性质。分形集的投影性质、分形集的笛卡尔积和交的性质分别在第六、七、八章中介绍。第九章讨论由函数迭代的不变集确定的分形，其中主要包含自相似分形与自仿射分形。第十章介绍出现在数论中几个分形的例子，它们是具有一些特殊性质的分形集。第十一章讨论函数图象的Hausdorff维数和盒维数。纯数学领域中的几个经典的分形集在第十二章中介绍。第十三、十四章介绍了动力系统中的分形。在各种分形构造方法中都可以引入随机性，从而导出各种随机分形，而且随机分形也是一些自然现象的模拟，它能更真实地反映象布朗运动等一些自然现象所具有的特性，这些内容我们将在第十五章和十六章中进行详细地阐述。第十七章介绍多重分形测度概念，这一概念代表着分形几何理论和应用研究的一个方向。第十八章介绍分形在物理和力学上的应用，其中一些方法可自然地开拓到分形几何的其它应用领域。

为了便于读者阅读本书，我们对内容的难易程度作了区别，其中带＊号的内容可有所取舍，这对于掌握主要内容和方法不会有大的影响。

本书谢和平为主编。参加本书初稿释译的有徐汉涛（序言、第3章至第17章）、宋晓秋（第18章）、张永平（第2、3章），宋晓秋校对了全部译稿，在此基础上由张永平执笔编写。宋晓秋还参加了编写稿的整理工作。由于我们的水平有限，错误和不当之处，望读者批评指正。

本书的出版得到中国矿业大学李安昌教授、重庆大学杨万年教授的支持和鼓励，在此表示衷心的感谢。

本书的出版得到国家自然科学基金的资助。

编译者　　1990年12月

引　言

过去，数学主要是讨论集合和函数，对此，可应用经典的微积分方法加以研究。对那些不十分光滑或不规则的集合和函数则认为是“病态的”而遭受忽视，认为它们不值得研究。

最近几年这种观点已改变。人们认识到数学上的许多不光滑集能够并值得研究。而且，不规则集表达许多自然现象要比经典几何图形好得多。分形几何给出了研究这种不规则集的一般结构。

我们从考虑分形的几个简单例子开始，注意它们的一些特征。

康托三分集是一个著名且易于构造的分形，而且它具有分形的许多典型的特征。它是由单位区间经一系列删除过程所得，见图 0.1。设 E_0 为区间〔0，1〕，设 E_1 是以 E_0 中去掉中间的 $\frac{1}{3}$ 所得的集，所以 E_1 由〔0，$\frac{1}{3}$〕和〔$\frac{2}{3}$，1〕这两个区间组成。从这些区间中去掉中间的 $\frac{1}{3}$ 得 E_2；因此，E_2 由〔0，$\frac{1}{9}$〕，〔$\frac{2}{9}$，$\frac{1}{3}$〕，〔$\frac{2}{3}$，$\frac{7}{9}$〕，〔$\frac{8}{9}$，1〕四个区间组成。如此继续，E_k 是从 E_{k-1} 的每个区间中去掉中间的 $\frac{1}{3}$ 所得的集。这样 E_k 由 2^k 个区间长度为 3^{-k} 的区间组成。康托三分集 F 是由所有 E_k 的公共点组成；即 F 是交 $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$。康托集 F 可认为是集序列 E_k 当 k 趋于无穷时的极限。显见不可能由 F 自身表示出它的细小部分，所以，F 的图形近似于某个 E_k 的图形，当 k 充分大时这种近似是较好的。

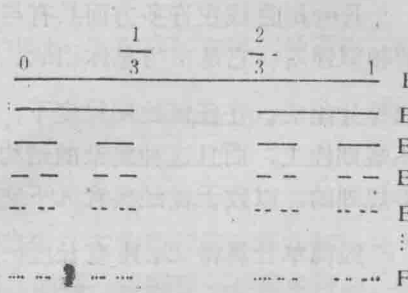


图0.1　康托三分集的构造

粗略地看，在 F 的构造过程中，从〔0，1〕区间去掉许多点，似乎没剩下点。事实上，F 是无限集（且是不可数的），F 中的点的任一邻域内包含它的无限多点。康托三分集 F 由〔0,1〕区间上三进制表示中不包含数字 1 的数组成，即所有数字具有形式：$a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \cdots$，其中对每个 a_i，$a_i = 0$ 或 2。

我们列出康托三分集的一些性质，将会看到许多分形也具有相似的性质。

（i）　F 是自相似的。显然 F 在区间〔0，$\frac{1}{3}$〕和〔$\frac{2}{3}$，1〕中部分与 F 几何相似，相似系数为 $\frac{1}{3}$。且 F 在 E_2 的四个区间中的部分与 F 相似，相似系数为 $\frac{1}{9}$，等等。康托集包含许多相似系数不同的相似子集。

（ii）　集 F 具有“精细结构”，即在任意小的尺度内都包含整体特征。将 F 的图形放大得愈大，中间的间隔则愈易看见。

（iii）　虽然 F 具有复杂琐碎的构造，但 F 的定义是非常直截了当的。

（iv）　F 是由递归过程得到，它的构造由重复去掉区间的中间 $\frac{1}{3}$ 组成，连续的过程得

到F的越来越好的近似E_k。

（v） F不易于用经典的几何术语来描述，它的点的轨迹不满足某些简单的几何条件，也不是某个简单方程的解。

（vi） 很难描述F的局部几何性质，在它的每个点的附近都存在着大量的、各种不同距离的点。

（vii） 虽然F在某种意义下是相当大的集合（它是无限不可数的），但它是不能用通常的度量——如长度来数量化的。在任何合理的长度定义下，其长度为0。

第二个例子是许多读者熟悉的Koch曲线，见图0.2。设E_0是单位长线段，从E_0中去掉中间的$\frac{1}{3}$并用底边在去掉的线段上的等边三角形的另外两边代替，E_1由这四条线段组成。对E_1的每一线段进行同一过程得E_2，如此继续。因此E_k由等边三角形的另外两边代替E_{k-1}中每一线段的中间$\frac{1}{3}$得到。当k很大时，E_{k-1}与E_k只在枝节上不同，当k趋向于无限时，折线E_k趋于极限曲线F，称为Koch曲线。

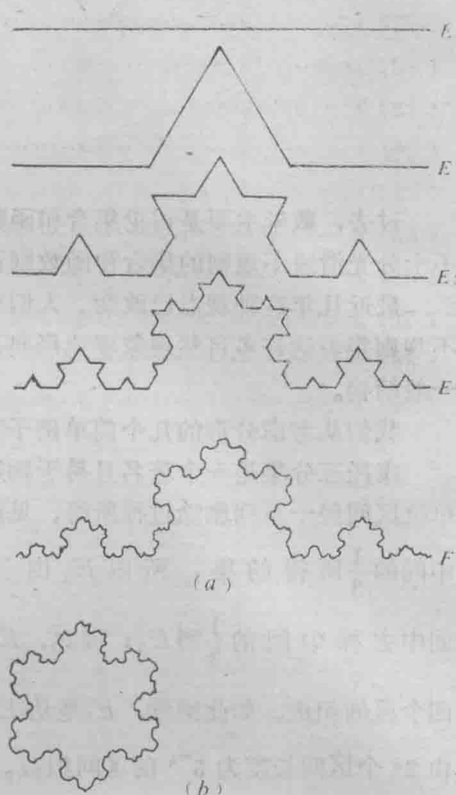


图0.2 (a) Koch曲线的构造，(b) 三条Koch曲线合在一起形成雪花曲线

Koch曲线在许多方面具有与康托三分集所列的相似性质。它是由与总体相似、相似系数为$\frac{1}{3}$的四等分组成。在任何比例尺度下，精细结构表现在不规则性上，而且这种复杂的结构是由简单的构造所得。当合理地称F为曲线时，F是非常不规则的，以致于在经典意义下它不具有切线。

经简单计算得E_k具有长度$\left(\frac{4}{3}\right)^k$，当$k$趋于无限时得$F$具有无限长。另一方面，$F$在平面上的面积为0，所以长度和面积都不能描述$F$的大小。

许多别的集可用这种递归的过程构造而得。例如，Sierpinski垫片是从原来的等边三角

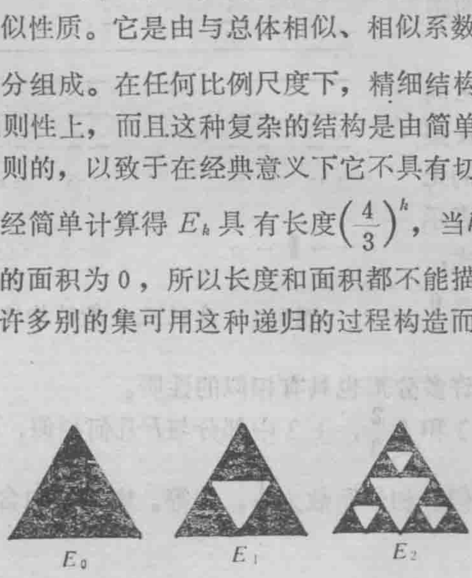


图0.3 Sierpinski 垫片的构造

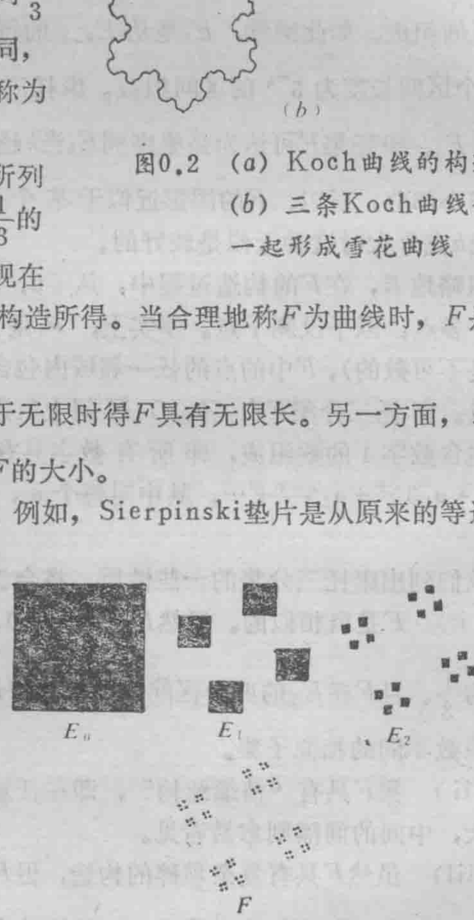


图0.4 康托尘集的构造

形中重复去掉倒的等边三角形所得，见图0.3。（为此，最好将这一过程看作将原来的等边三角形重复地用三个高为原来的一半的等边三角形代替）。康托集在平面上的模拟是“康托尘集”，见图0.4。在每一步中，每一剩余的正方形被分成16个小正方形，其中四个保存下来，其它的舍弃，（当然，正方形的其它排列可组成不同的集）显见，这个例子具有康托集和Koch曲线相似的性质。图0.5中描述的例子是用两个不同的相似比构造而得。

有许多其它类型的构造，有些将在本书后面详细讨论，这些集合也具有这种性质。图

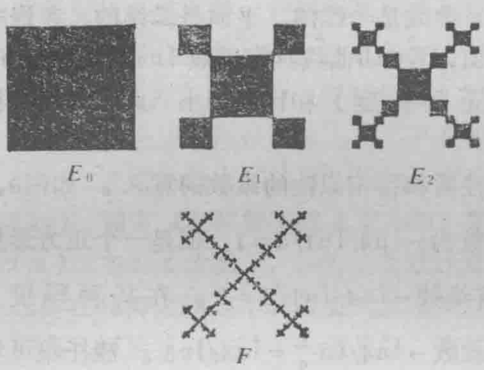


图0.5 两个不同相似比构造的自相似分形

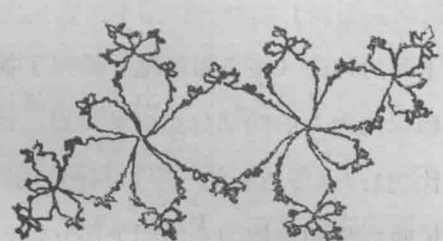


图0.6 Julia集

0.6描述的十分复杂的Julia集，是对适当的常数c，由二次函数$f(z)=z^2+c$构造而得。虽然这个集在康托集和Koch曲线的自相似意义下，不是严格的自相似集，它在这个集的任意小的部分，可经过放大和稍作变形得到与原来整体的集一致，它是“拟自相似的”。

图0.7显示了函数 $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{k}{2}}\sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k}t\right)$的图形。无限项的和得到的图形具有精细的结构，它不是经典的微积分可以使用的。

有些构造是随机的。图0.8表示一条“随机Koch曲线”，在构造的每一步中掷一硬币以确定在曲线的哪一边放置一对新的线段。这条随机曲线当然具有精细的结构，但Koch曲线严格的自相似被统计自相似所代替。

这些就是通常被称为分形的集合。（分形一词由Mandelbrot在它的早期文章中给出，

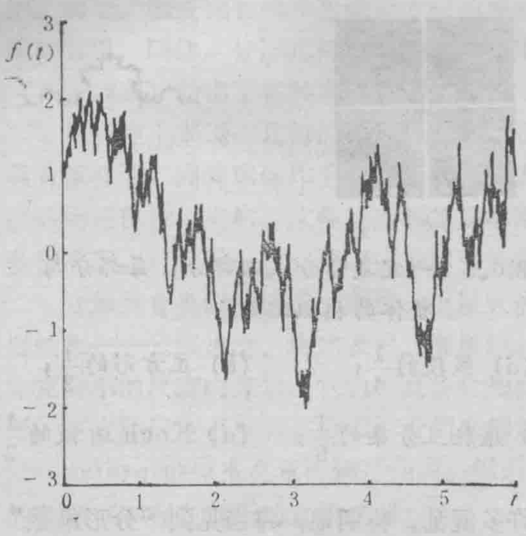


图0.7 $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{k}{2}}\sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k}t\right)$ 的图象

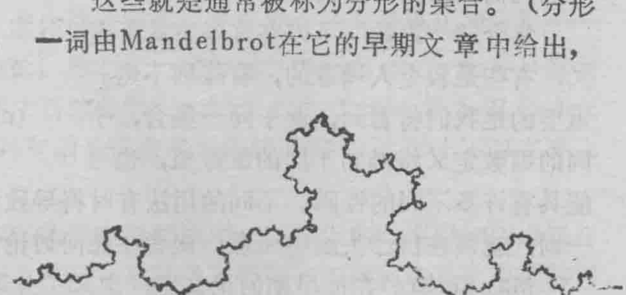


图0.8 随机Koch曲线

由拉丁文fractus而来，意味着“破碎的”，描述的物体太不规则，不适合用传统的几何方法描述)。象康托集中所列出的性质是分形的特征，在本书中我们要始终牢记这种集合所具有的这些性质。当然，被称为分形的集合必须具有精细结构，即在所有比例尺度上都包含整体。许多分形在某些程度上有自相似性，即在一定程度上其组成部分与整体相似。有时这种相似性比几何中严格相似性要弱；例如，相似性可以是近似或统计相似。

古典的几何和微积分方法不适合于分形的研究，必须用别的方法。分形几何的主要工具是它的形式众多的维数。我们非常熟悉的（光滑）曲线是一维的，平面是二维的，在许多情况下，还不太明白康托集具有维数$\ln 2/\ln 3=0.631$，Koch曲线具有维数 $\ln 4/\ln 3=1.262$，后面的数字至少与Koch曲线是比1-维大（具有无限长度）和比2-维小（面积为0）相一致。

下面的讨论（相当粗糙地）给出了描述尺度性质和自相似性的维数的意义。如图0.9表示，相似比为$\frac{1}{4}$的四部分组成的线段，直线段维数为$-\ln 4/\ln 1/4=1$。但是一个正方形是由相似比为1/2（即边长的一半）四部分组成，具有维数$-\ln 4/\ln 1/2=2$。在某种程度上，Koch 曲线由相似比为$\frac{1}{3}$的四个部分组成，具有维数$-\ln 4/\ln\frac{1}{3}=\ln 4/\ln 3$。康托集可看成由相似比为$\frac{1}{9}$的四个部分组成，具有维数$-\ln 4/\ln\frac{1}{9}=\ln 2/\ln 3$。一般地，一个集由相似比为 r 的m部分组成时，可认为它具有维数$-\ln m/\ln r$。由这种方式得到的数通常称为集合的相似维数。

很不幸，相似维数仅对一小类严格自相似集有意义。但是，其它一些维数定义具有更广泛的应用。例如对任何集可定义Hausdorff维数和盒计数维数，可证明在图0.9的四个例子中它们都等于各自的相似维数。本书的前面几章是关于Hausdorff维数的定义及性质，以及计算方法。非常粗略地说。维数表示一个集合占有多大空间。当用很小的尺度观察一个不规则集时得到的是测度。维数包含了集合的几何性质的许多信息。

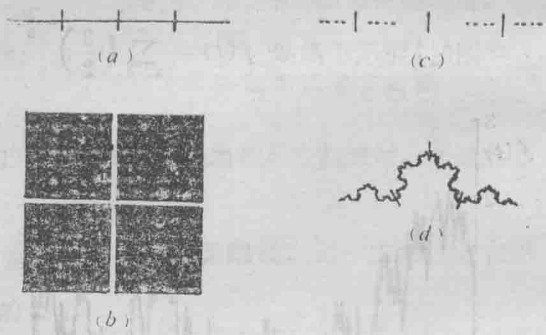


图0.9 一定集合分成四部分，每部分与整体的相似比为：

(a) 线段的$\frac{1}{4}$； (b) 正方形的$\frac{1}{2}$；

(c) 康托三分集的$\frac{1}{9}$； (d) Koch 曲线的$\frac{1}{3}$

集合的“维数”可以在许多方式下定义，有些是较令人满意的，有些则不然。重要的是我们将看到，对于同一集合，不同的维数定义将得到不同的维数值，也可能具有许多不同的性质。不同的用法有时将导致许多混乱。特别地，每当见到“分形维数”一词，就须在自己头脑中注意。读者在任何讨论过程中都必须注意定义的正确应用。

Mandelbrot在他早期的论文中，定义了分形集是满足Hausdorff维数严格大于拓扑维数的集合（集合的拓扑维数始终是整数，当它完全不连通时维数为0；当它的每点的任意小邻域内其边界维数为0时，集的维数为1等等）。这个定义由于不包括一些显然该被认为是

分形的集合而不能令人满意。人们提出了另外的一些定义，但它们看起来都有这类缺点。

我们认为，分形的定义应该以生物学家给出"生命"定义的同样方法给出。不存在确切简明的定义，但可以列出生物的特性，如在一定程度上与环境无关的生殖、生存和行动能力，绝大多数生物都具有所列的大部分性质，虽有些生物在其中某些方面有例外。同样地，最好是将分形集看作具有如下所列性质的集合，而不是寻求分形的确切定义，它将不可避免地排除一些有趣的情形。从数学工作者的观点来看，这种做法并不是坏事。但对"非分形"，其性质很少使人感兴趣，它们都是非常显见，且容易用其它的方法得到。

当我们参考分形集F时，必须在头脑中具有如下的观点：

（i） F具有精细结构，即在任意小的比例尺度内包含整体。

（ii） 无论从局部和整体上看，F是如此不规则以致于不能用传统的几何语言来描述。

（iii） 通常F具有某些自相似性，或许是近似的或是统计意义下的。

（iv） 通常（在某些方式下定义的）集F的"分形维数"比它的拓扑维数要大。

（v） 在许多情况下，F的定义是非常简单的，或许是递归的。

怎样在几何上描述不同种类的分形集呢？

经典几何给我们提供了一条思路。在本书的第Ⅰ部分（1—8章），我们研究分形的一些熟悉的几何性质。一般地，空间中圆在平面上的正交投影（或影子）为椭圆，分形投影定理告诉我们有关分形的投影。在许多情况下，切线是圆周的很好的近似。虽然分形在任何意义下趋于不具有切线，通常可大量讨论它们的局部形式。一般情况下平面上的两个圆或者相交于两点或者不相交（把相切看作例外）。应用维数，我们可给出分形相交的类似叙述。将某圆沿着垂直于该圆所在的平面的方向运动，则扫描出一个圆柱，它具有与作为起点的那个圆有关的一些性质。对分形进行类似的且更为一般的构造也是可能的。

经典几何虽然有着相当多的内在兴趣所在，但是，它在数学的其它领域也有广泛的应用。例如，圆或抛物线作为微分方程的解曲线而出现，且这种曲线的几何性质帮助我们理解微分方程，同样，分形几何的一般理论能用在具有分形的许多数学分支上。本书第Ⅱ部分（9—18章）给出了各种有关的例子。

从历史上来说，几何的研究兴趣受其在自然中应用的激发。椭圆作为行星轨道的形状而具有重要性，同样球体作为地球的形状也占据着重要性。关于椭圆和球体的几何能用来解决这些物理现象。当然，这些轨道并非是标准的椭圆形，而地球实际上也并非是球体，但在许多情况下，对行星运行的预测或地球引力场的研究，作这样的近似可能是完全合适的。

分形具有类似的情况。浏览一下最近的物理学书刊及文献，就可发现各种描述为分形的自然体——云层边沿、地球表面、海岸线、液体湍流等等。其中没有一个是真正的分形——在充分小的尺度内来看，它们不具备分形特征。然而在一定的尺度内它们表现得非常象分形，在这种尺度下可看作分形。可用来描述"自然分形"和数学上的"分形集"的区别在Mandelbrot的原来文章得到了强调。但这种区别看起来已变得较模糊。本质上不存在真正的分形（不存在真正的直线或圆）。

如果这种分形几何是有价值的，则它应在物理中得到应用。在这方面已取得一些进展，本书最后给出了一些例子。虽然有些自然现象已用分形数学来解释（布朗运动是个很好的例子），但是，许多应用是描述性的，而不是预言性的。分形研究中用到的数学知识大部分并不是特别新的，虽然其中的兴趣所在是新的。为取得进一步的进展，某些合适的数学知识的

应用和发展值得优先考虑。

注 释 与 参 考

这个引言包含作者的一些观点和偏见，这些可能与其它分形工作者不一致，请读者自行注意！

从许多层次上来说都值得欣赏的关于分形的基础研究论文是Mandelbrot(1982)的那篇集科学性、哲理性与图示性于一身的专著〔72〕（该文由其1975版本发展而来），它包含了关于自然界与数学中的各类不同的分形的例子。这本专著，对已做的分形方面的工作给予了启示与鼓舞。

分形其它方面的一些书籍包括文献〔38〕，它致力于数学处理；Peitgen和Richter〔90〕致力于对复杂动力学给出极好的说明性的通盘考虑。文献〔46〕主要关于物理上的应用；由Peitgen和Saupe所编辑的书〔91〕是关于计算机描绘分形图的例子；而文献〔5〕主要涉及迭代函数的计算。所有这些书中都包含更进一步的参考资料。

目 录

第一章 预备知识

本章介绍在本书中将使用的基本数学概念和符号。在§1.1和§1.2将简明介绍集合论和函数，不熟悉这些内容的读者可参考这方面详细的教科书。在分形理论中，测度和质量分布扮演很重要的角色，§1.3将介绍这方面的内容，为适应读者，对某些测度的存在性证明我们不加深究，这样可以避开在测度论中所涉及到的很多技巧上的困难，十五章和十六章涉及到概率论的一些概念将在§1.4介绍。

§1.1 基本集合理论

本节我们回顾集合论和点集拓扑方面的一些基本概念。

我们一般是在 n 维欧氏空间 R^n 中考虑问题，R 就是实数集或“实直线”，而 R^2 是欧氏平面。R^n 中的点一般用小写字母 x，y 等表示，偶然也使用坐标形式 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$。加法和数乘是按通常方式定义的，故 $x+y=(x_1+y_1,\ \cdots,\ x_n+y_n)$，$\lambda x=(\lambda x_1,\ \cdots,\ \lambda x_n)$，其中 λ 是一个实的标量。使用 R^n 上的通常的欧氏距离（或度量），若 x、y 是 R^n 的点，它们之间距离为 $|x-y|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$。

集合一般是指 R^n 的子集，用大写字母 E，F，V 等表示。通常，$x\in E$ 意指 x 属于集合 E，$E\subset F$ 意指 E 是 F 的一个子集，我们用 $\{x$：条件$\}$ 表示使“条件”得以满足的点 x 的集合。当然，频繁出现的集合有特殊的记号。不包含任何元素的集合称为空集，记为 ϕ。整数集用 Z 表示，有理数集用 Q 表示。用上标 $^+$ 表示集合的正元素。这样，R^+ 表示正实数，Z^+ 表示正整数。偶尔也涉及复数集 C，其很多性质与平面 R^2 是一致的，且 x_1+ix_2 对应于 $(x_1,\ x_2)$。

中心为 x 半径为 r 的闭球记为 $B_r(x)=\{y:|y-x|\leqslant r\}$。类似地，开球为 $B_r^0(x)=\{y:|x-y|<r\}$。从而闭球包含边界球面，而开球不包含边界。当然 R^2 中球是圆盘而 R^1 中球则是区间。

中心在 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 边长为 $2r$ 的坐标立方体是集合：$\{y=(y_1,\cdots y_n):|y_i-x_i|\leqslant r$，对 $i=1,\ \cdots,\ n\}$（在 R^2 中的坐标立方体是一个正方形，而在 R^1 中则是一个区间）。

有时将涉及到集合 A 的 δ-平行体 A_δ，这是一个与 A 的距离不超过 δ 的点的集合，因此 $A_\delta=\{x:|x-y|\leqslant\delta$，对 A 中的某点 $y\}$。

记 $A\cup B$ 为集合 A 与 B 的并集，它是由属于 A 或者属于 B 中的点组成的集合。$A\cap B$ 表示 A 与 B 的交，它是由既属于 A 又属于 B 的点组成。一般地 $\cup_\alpha A_\alpha$ 表示任意一族集合 $\{A_\alpha\}$ 的并，即，由至少属于 $\{A_\alpha\}$ 的一个集合 A_α 的点组成。用 $\cap_\alpha A_\alpha$ 表示它们的交，它是由所有 A_α 的公共点组成。一族集合称为不交的，如果其任意一对集合的交是空集。A 与 B 的差集是由属于 A 但不属于 B 的点组成，记为 $A\setminus B$。集合 $R^n\setminus A$ 称为 A 的余集或补集。

所有有序点对的集合 $\{(a,\ b):a\in A$ 且 $b\in B\}$ 称为 A 与 B 的（笛卡尔）积，用 $A\times B$ 表示。若 $A\subset R^n$ 且 $B\subset R^m$，则 $A\times B\subset R^{n+m}$。

若 A 与 B 是 R^n 的两个子集，λ 是一个实数，定义集的向量和为 $A+B=\{x+y:x\in A$ 且

$y \in B\}$，定义数乘为$\lambda A = \{\lambda x: x \in A\}$。

一个无限集称为可数的，若它的元素可以按方式x_1，x_2，…排列且A的所有元素都出现在这样排列的一个特定位置上。否则，称为不可数。例如集Z和Q都是可数的，而R是不可数的。

若A是任意实数集，则上确界$\sup A$是使得对A中一切x满足$x \leqslant m$的最小数m，若这样数不存在则上确界是∞；类似地，下确界$\inf A$是对A中一切x使得$x \geqslant m$的最大数M或是$-\infty$。直观地，上确界和下确界分别作为集合的最大值和最小值，然而，上确界和下确界不一定是集合中的元素，认识这一点是重要的。用$\sup_{x \in B}(\quad)$表示括号中的可能依赖于集B中的点x的量的上确界。

定义R^n的一个（非空）子集的直径$|A|$为A中点对之间距离的上确界，故$|A| = \sup\{|x - y|: x, y \in A\}$。一个集合称为有界的，如果它具有有限的直径，或等价地说，A被包含在某个（充分大的）球内。

序列的收敛性是按通常方式定义的。当$k \to \infty$时R^n中序列$\{x_k\}$收敛于R^n中一点x，若对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在数K使得当$k > K$时，$|x_k - x| < \varepsilon$，也就是$|x_k - x|$收敛于0。x称为序列的极限，记为$x_k \to x$或$\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$。

在涉及球的定义时所提到的"开"和"闭"的概念适用于更一般的集合。直观地，一个集合是闭集，若它包含它的边界；若不包含边界点则是开集。更明确地，R^n中一个子集A是开集，若任意$x \in A$，都存在某个包含在A中的以x为中心、半径大于零的球$B_r(x)$。A是闭集，当若A中的一个点列$\{x_n\}$收敛于R^n中的一点x时，则$x \in A$。空集ϕ和R^n为两个既开又闭的集合。

可以证明一个集合是开集当且仅当它的余集是闭集。任意一族开集的并是开集。任意有限多个开集的交是开集。任意一族闭集的交是闭集，任意有限多个闭集的并是闭集。

集合A称为点x的一个邻域，若存在某个中心在x且包含在A之中的（小）球。

所有包含A的闭集的交称为A的闭包，记为$\overline{A}$。所有被A包含的开集的并称为A的内部，记为$\mathrm{int}(A)$。A的闭包是包含A的最小闭集，A的内部是被A所包含的最大开集。则A的边界∂A为$\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int} A$。

集合B是A的稠密子集，若$B \subset A \subset \overline{B}$，即若$B$中的点可以任意接近于$A$中的每一点。

一个集A是紧集，若覆盖A（即其并包含A）的任何一族开集都有一个覆盖A的有限子覆盖。技巧上，紧性是一个能把条件的无限集化为有限多个的极为有用的性质。然而，就本书而言，R^n中的紧子集，既是有界又是闭的。

任意一族紧集的交是紧集。可以证明若$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$是一个递减的紧集序列，则交$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$是非空的紧集。而且，若$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$包含在某个开集$V$中，则对某个$k$，有限交$\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$也包含在$V$中。

R^n中一个子集A称为连通的，若不存在开集U和V使得$U \cup V$包含A且$U \cap A$与$V \cap A$是不交的非空集。直观地，认为一个集合是连通的，若它恰恰组成一"块"。包含x的A的最大连通子集称为x的连通分支。一个集A称为完全不连通的，若每一点的连通分支仅由这一个点组成。更确切地说，若对A中任意两个不同点x和y，我们可以找到不交开集U和V使得$x \in U$，$y \in V$且$A \subset U \cup V$。

有一种必须涉及的较大的集类，这就是Borel集类，它的定义是直接的且不会引起读者的误解。Borel集类是R^n中具有下列性质的最小子集族：

(a) 每一个开集和闭集是一个Borel集；

(b) 每一个有限或可数的Borel集的族的并是Borel集，Borel集的任意有限或可数族的交是Borel集。

实际上，在本书中我们所感兴趣的R^n的子集是Borel集。可以从开集或闭集开始用一系列可数并或交构造的任何集都是Borel集。在本书中假设所遇到的集都是Borel集。

§1.2 函数与极限

设X与Y是任意集合。从X到Y的一个映射(函数或变换)是把x中的每一个点x都与Y中的点$f(x)$联系起来的一种规则或公式。用$f:X\to Y$表示这种情形。X称为f的定义域，Y称为上域。若A是X的一个子集，记$f(A)$为A的象，其由$\{f(x):x\in A\}$给出。若B是Y的一个子集，称$f^{-1}(B)=\{x\in X:f(x)\in B\}$为$B$的逆象或原象。注意在这里单点的原象可以包含很多点。

一个函数$f:X\to Y$称为单射或一一对应的函数，若$x\neq y$时，$f(x)\neq f(y)$，即f把X的不同元素映成Y的不同元素。一个函数称为满射或映上函数，若对Y中的每个y，都存在X中的元素x使得$f(x)=y$，即Y的每个元素都是X的某点的象。一个函数既是单射又是满射称为双射或X与Y之间的一一对应。若$f:X\to Y$是双射，则我们可通过取$f^{-1}(y)$为X的使得$f(x)=y$的唯一元素定义反函数$f^{-1}:Y\to X$。在这种情况，对$x\in X$有$f^{-1}(f(x))=x$，对$y\in Y$有$f(f^{-1}(y))=y$。

函数$f:X\to Y$与$g:Y\to Z$的复合是由$(g\circ f)(x)=g(f(x))$所定义的函数$g\circ f:X\to Z$。用明显的方法可把这个定义推广到任意多个函数的复合。

从R^n到R^n的某些函数具有特殊的几何意义；在本书中通常它们被作为变换且用大写字母表示。它们的效果如图1.1所示。变换$S:R^n\to R^n$称为一个叠合或等距，若它保持距离，即对于x，$y\in R^n$，$|f(x)-f(y)|=|x-y|$。叠合也是保角的，且把一个集合变成一个几何叠合的集。它的特殊情况包含下列几种：平移，它的形式是$S(x)=x+a$且它的作用是把X的点平行移动向量a；旋转，它有一个中心a，使得对所有x满足$|S(x)-a|=|x-a|$，(为了方便起见，把恒等变换$I(x)=x$作为旋转)；反射，它是把点都映成关于某个$n-1$维平面的镜象。一个由旋转和平移组合而成的叠合为一个刚体运动或直接叠合。一个变换$S:R^n\to R^n$称为相似，若存在常数c，使得对所有x，$y\in R^n$，$|S(x)-S(y)|=c|x-y|$。一个相似变换把集合变换成几何上的相似集。

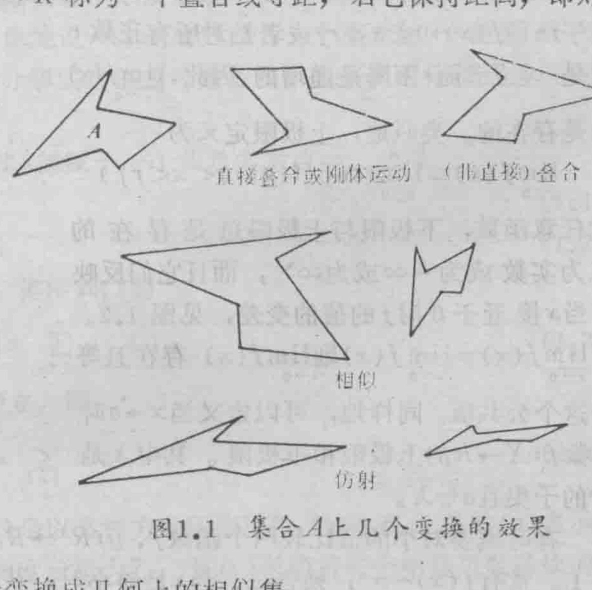


图1.1 集合A上几个变换的效果