新时期大学数学信息化精品教材

◎丛书主编 龙爱芳 张军好

线性代数

学习辅导与习题全解

张军好 余启港 欧阳露莎 主编

科学出版社

·新时期大学数学信息化精品教材·
丛书主编　龙爱芳　张军好

线性代数学习辅导与习题全解

主　编　张军好　余启港　欧阳露莎
副主编　胡军浩　佘　伟　李学锋
安　智　谌永荣

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书为“新时期大学数学信息化精品教材”丛书之《线性代数》配套使用的学习辅导与习题全解，主要面向使用该教材的老师与学生，同时也可作为自学者、科技工作者等的阅读参考书及考研学生的复习资料.

本书的内容章节设置与教材完全同步，共6章，循着教材顺序对每一章内容作了清晰梳理、深入讲解，然后给出该章教材上的习题详解，最后给出一套精选的该章同步自测题.每章内容分为教学的基本要求，内容概述，方法、技巧与典型例题分析，考研题型与方法，教材课后练习全解，自测题共6部分.对教材中的理论、方法与题型作了凝练、归纳与剖析，让读者回顾、巩固、深化课堂内容.每一章同步自测题是作者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的，目的是给读者提供练习机会，让读者进一步消化知识、夯实考点、提高能力.

本书内容丰富，思路清晰，例题典型，方法性强，注重分析解题思路与规律，对培养和提高学生的学习兴趣以及分析问题和解决问题的能力将起到较大的作用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习辅导与习题全解/张军好，余启港，欧阳露莎主编.—北京：科学出版社，2014.7

新时期大学数学信息化精品教材

ISBN 978-7-03-041374-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张… ②余… ③欧… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第150552号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：蔡 莹

责任印制：高 嵘 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2014年8月第 一 版 印张：20 1/2

2014年8月第一次印刷 字数：402 000

定价：35.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书为“新时期大学数学信息化精品教材”丛书之《线性代数》配套使用的学习辅导与习题全解，主要面向使用该教材的老师与学生，同时也可供报考研究生的学生作为复习资料之用.

当今时期，我国的高等教育已经走向了大众化的教育，社会各界对高等教育的质量十分关注.编者编写这本配套教辅书，主要是为了适应这种新时期大学数学教育的新要求，一方面满足学生学习线性代数课程的需要，期望对保证和提高线性代数课程的教学质量，对广大学生掌握线性代数的基本思想与方法起到一种辅导作用；另一方面，也为了满足不同层次的学生的学习需要，利用辅导教材这种形式，对教材的内容与方法作出适当的延伸与扩展，对大学生继续深造给予帮助，同时对新时期的大学教育如何培养具有创新精神的优秀人才作出有益的探讨.

按照配套辅导教材的编写要求，本书的内容按章编写，基本与教材同步.每章包含教学的基本要求，内容概述，方法、技巧与典型例题分析，考研题型与方法，教材课后习题全解，自测题共 6 个部分.

教学的基本要求部分主要按新时期大学数学教学大纲对教材中的基本理论与方法按“了解”、“理解”与“掌握”三个层次进行了分类编注.

内容概述部分主要对该章的基本内容进行了整理与概括，使学生一目了然的可以看出这一章应该掌握的主要内容，形成对该章内容具有层次感的认识与记忆.

方法、技巧与典型例题分析是本书的核心内容之一，它对本章的内容与方法进行了归纳总结，将基本的理论、基本的方法、解题技巧等多方面的内容融于范例之中.这些典型例题注重分析解题思想，揭示解题规律，引导读者如何思考问题，对培养读者理性思维及分析问题和解决问题的能力大有帮助.

考研题型与方法部分主要将近十几年来全国硕士研究生入学考试试题中的线性代数部分进行了归纳与整理，对典型的测试类型进行了详细的剖析，并指出了经常测试类型的大致演变方向，让读者对考研题目有一个清楚的认识，把握学习的方向，这对以后考研大有益处.

教材课后习题全解部分是对教材节后练习与章后练习作出了详细的解答，以便读者在学习过程中对自己的解题答案与过程进行对照，比较，从中找出自己的不足之处，达到对问题的更深刻和更透彻的理解.

章后自测题是编者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的，目的是给读者提供更深入的练习机会，让读者进一步消化知识、夯实考点、提高能力.

本书由张军好、余启港、欧阳露莎任主编，由胡军浩、佘伟、李学锋、安智、谌永荣任副主编.全书由张军好统筹定稿.

本书的出版得到了科学出版社的领导和同志们的支持，同时也得到了中南民族大学数学与统计学学院的支持与帮助，在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正.

编　者

2014年3月于武昌南湖畔

目 录

第 1 章　n 阶行列式

一、教学的基本要求

（1）掌握排列逆序数的计算和奇偶性判别；

（2）掌握行列式的基本性质，并应用于行列式的计算；

（3）掌握余子式、代数余子式的计算，并应用于行列式的计算；

（4）掌握克拉默法则.

二、内容概述

1. 排列有关内容

（1）由数字 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列，简称为排列.特别地，n 级排列 $123\cdots n$ 称为 n 级自然排列或标准排列.

（2）在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ $(s<t)$ 中的两个数字 i_s, i_t，如果 $i_s>i_t$，则称它们构成一个逆序.排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 中全部逆序的总个数称为排列的逆序数，记为 $N(i_1i_2i_3\cdots i_n)$.

（3）求排列的逆序数的方法：对排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$，数出每个数字 i_t 后面比 i_t 小的数字的个数 N_t $(t=1,2,\cdots n-1)$.则 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 的逆序数

$$N(i_1i_2i_3\cdots i_n)=\sum_{t=1}^{n-1}N_t.$$

（4）逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

2. 行列式定义

由 n^2 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式（其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列位置的数，称为第 i 行第 j 列元素），它表示所有取值不同行、不同列的 n 个数的乘积并按照如下方法带上正号或负号的代

数和:每项乘积中的 n 个数按行号排成标准排列时,其列号排列的奇偶性决定该项的符号:奇排列时为负号,偶排列时为正号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中求和 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 取遍所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$.而 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.特别地,当 $n=1$ 时,规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

行列式 $|a_{ij}|$ 的一般项还可以写成如下形式

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)+N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

行列式的等价定义教材中定义 1.5 中的 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 可定义为

$$|a_{ij}| = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

这是一个将各项乘积中的 n 个数按列号排成标准排列,其行号排列的奇偶性确定该项的符号的定义.

3. 行列式的基本性质

(1) 将行列式转置,行列式的值不变.

转置变形:把行列式的行与列互换,即把原来在第 i 行第 j 列位置的元素换到第 j 行第 i 列上去,所得到的行列式称为原来行列式的转置行列式,记 D 的转置行列式为 D' 或 D^{T}.

(2) 行列式的初等变换及其性质:

1) 换行:第 i 行与第 j 行交换,记为 $r_i \leftrightarrow r_j$,

换列:第 i 列与第 j 列交换,记为 $c_i \leftrightarrow c_j$;

2) 倍行:第 i 行 k 倍,记为 kr_i,

倍列:第 i 列 k 倍,记为 kc_i;

3) 倍行加:第 j 行 l 倍加到第 i 行上去,记为 $r_i + lr_j$,

倍列加:第 j 列 l 倍加到第 i 列上去,记为 $c_i + lc_j$;

注意:1) 第 3 种初等变换的记号按规定不能写成 $lr_j + r_i$,$lc_j + c_i$;

2) k,l 为 -1 时,可以直接写成 $-r_i$,$-c_j$,$r_i - r_j$,$c_j - c_i$;

3) $l<0$,$l=-l_1$ 时,$r_i - l_1 r_j$ 可看成第 i 行减去第 j 行的 l_1 倍,$c_j - l_1 c_i$ 可看成第 j 列减去第 i 列的 l_1 倍;

4) $l=1$ 时,$r_i + r_j \neq r_j + r_i$,$c_j + c_i \neq c_i + c_j$.

规定:1) 每次变形对每个元素至多只能改变一次;

2) 每次变形所做的多个初等变换按从上往下的次序.

行列式的初等变换性质：

1）换行，值反号；

2）倍行，倍值；

3）倍行加，值不变．

（3）提取一行公因子，即可以把行列式中某一行所有元素的公因子提取出来放到行列式外面作为因子．

（4）具有如下特征之一的行列式，其值为 0：

1）有一行元素全为 0；

2）有两行元素对应相等；

3）有两行元素对应成比例．

（5）拆行拆值，即把一个行列式的某一行拆开成两行所得到的两个行列式的值之和就等于原行列式的值．

（6）展开性质．

1）在 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，余下的元素按原来的相对位置不动排成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，称 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，其中

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

2）n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于任一行的元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

3）n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，任一行的数字与另一行中同列数字代数余子式的乘积之和等于 0，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j).$$

4. 克拉默法则

1）如果 n 元 n 个方程的线性方程

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

满足条件 $D\neq 0$，则其有且仅有一组解，并且这组解满足公式 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即是以常数项“取代”D 中 x_j 的系数得到的，称为分子行列式.

2）如果 n 元 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D=|a_{ij}|\neq 0$，则其只有零解.反过来说就是，如果上述齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式 $D=|a_{ij}|=0$.

三、方法、技巧与典型例题分析

例 1 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & x & x \\ a & 0 & x & y \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$，求：

(1) D 中含元素 $x\cdot y$ 的项；(2) D 中项 x^2 的系数；(3) 元素 a 的代数余子式.

解 (1) 根据行列式定义中一般项的构成，各行各列取一个元素作乘积再带上符号的方法，知道 D 中含元素 $x\cdot y$ 的项为

$$(-1)^{N(2341)}\cdot 4\cdot x\cdot y\cdot 1+(-1)^{N(1342)}\cdot 2\cdot x\cdot y\cdot 3=4xy+6xy=10xy.$$

(2) D 中含元素 x^2 的项为

$$(-1)^{N(1432)}\cdot 2\cdot x\cdot x\cdot 3=-6x^2 \quad 和 \quad (-1)^{N(2431)}\cdot 4\cdot x\cdot x\cdot 1=4x^2.$$

因此 D 中项 x^2 的系数为 $-6+4=-2$.

(3) 元素 a 所在的位置为第 3 行第 1 列，其代数余子式为

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & x & x \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & x & x \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2}\begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 3 & x+3 & x \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ x+3 & x \end{vmatrix}=-[7x-2(x+3)]=-5x+6.$$

注意:(1)"D 中含元素 $x \cdot y$ 的项"意指行列式定义中的项,而"D 中项 x^2 的系数"意指 D 的值多项式中 x^2 的系数,这时要"合并同类项".

(2) a 的代数余子式与 a 的位置(不是下标)有关,而与 a 的值大小无关.

例 3　设四阶行列式 D_1 依次经过下列变形后变成 D_2:

(1) 交换第 1,3 行;(2) 2 倍第 2 行;(3) 第 1 行 3 倍加到第 4 行;(4) 3 倍第 2 列;(5) 转置;(6) 提出第 2 行的公因子 3(即第 2 行元素乘以 $\frac{1}{3}$ 倍).

若已知 $D_1=1$,求 D_2.

解　根据行列式的性质,记 $C_1=D_1$ 经交换第 1,3 行得 C_2,C_2 经 2 倍第 2 行得 C_3,C_3 经第 1 行 3 倍加到第 4 行得 C_4,C_4 经 3 倍第 2 列得 C_5,C_5 转置得 C_6,C_6 提出第 2 行公因子 3 后余下行列式为 C_7,则由 $D_1=1$ 得

$$C_1=1\Rightarrow C_2=-C_1=-1\Rightarrow C_3=2C_2=-2\Rightarrow C_4=C_3=-2$$

$$\Rightarrow C_5=3C_4=-6\Rightarrow C_6=C_5=-6\Rightarrow C_7=\frac{1}{3}C_6=-2,$$

从而 $D_2=C_7=-3$.

注:此题考查行列式的各种变形性质,特别要注意"倍行(列),倍值"和"提取行(列)公因子"性质的灵活应用,"什么时候乘以倍数(公因子)、什么时候除以倍数(公因子)".

例 3　试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否是六阶行列式 $D_6=|a_{ij}|$ 中的项.

解　题中所给两个乘积刚好都是 D_6 中不同行不同列的 6 个元素,因此要判别它们是不是 D_6 中的项,其须检查它们的符号对不对.

第 1 个 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 的 6 个元素的行位置(这时与第 1 个下标相同)排列为自然排列,第 2 个下标(即列位置)排列 431265 的逆序数为 $3+2+0+0+1=6$ 为偶数,所以带正号,即 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是 D_6 中的项.

第 2 个的 6 个元素次序重排列 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 即将行位置(第 1 个下标)排成自然排列,这时列位置(第 2 个下标)排列 452316 的逆序数为 $3+3+1+1+0=8$ 为偶排列,应带正号,故 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是 D_6 中的项.

例 4　不计算行列式的值,利用行列式的性质证明行列式 $\begin{vmatrix}1&0&4\\3&2&5\\4&1&6\end{vmatrix}$ 能被 13 整除.

证　$$\begin{vmatrix}1&0&4\\3&2&5\\4&1&6\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+10c_2+10^2c_1}\begin{vmatrix}1&0&104\\3&2&325\\4&1&416\end{vmatrix}=13\begin{vmatrix}1&0&8\\3&2&25\\4&1&32\end{vmatrix}.$$

注:此题方法,虽然题中的数都不能被 13 整除,但通过初等变换将第 3 列化成了能被 13 整除的数,从而提出 13 这个因子.

例 5 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$.

解法 1 $D\xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}x & x & 0 & 0\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 0 & 0 & y & y\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-r_3]{r_2-r_1}xy\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -x & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -y\end{vmatrix}\xlongequal[r_2-r_3]{r_4-r_1}xy\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

$=x^2y^2$.

解法 2 如果 $x=0$ 或 $y=0$,易知 $D=0$.如果 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$,构造行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix},$$

显然按第一列展开知 $D_1=D$.而

$$D_1\xlongequal[i=2,3,4,5]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -x & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & y & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+\frac{1}{x}c_2-\frac{1}{x}c_3+\frac{1}{y}c_4-\frac{1}{y}c_5}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

$=x^2y^2$,

所以 $D=x^2y^2$.

注:解法二是把原行列式添加 1 列 1 行,使所得的行列式易求值且与原行列式

值相等,这种计算行列式的方法称为加边法.

例 6　计算 n 阶行列式 $f(x)=\begin{vmatrix} a+x & ax & & & & \\ 1 & a+x & ax & & & \\ & 1 & a+x & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a+x & ax \\ & & & & 1 & a+x \end{vmatrix}$.

解　按行列式中第1行展开后,并将 xy 的余子式再按第1列展开,得

$$D_n=(a+x)D_{n-1}-axD_{n-2},\quad D_n-aD_{n-1}=x(D_{n-1}-aD_{n-2}).$$

这是一个递推关系式,它对一切 n 都成立,故依次递推可得

$$\begin{aligned}D_n-aD_{n-1}&=x^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=x^3(D_{n-3}-aD_{n-4})=\cdots\cdots=x^{n-2}(D_2-aD_1)\\&=x^{n-2}[(a+x)^2-ax-a(a+x)]=x^n,\end{aligned}$$

其中 D_2 和 D_1 是按上面的展开方法降阶至原行列式的右下角而得到的,从而

$$D_n-aD_{n-1}=x^n. \tag{1}$$

又在原行列式中,a 和 x 的地位一样,故同理得

$$D_n=xD_{n-1}+a^n. \tag{2}$$

联立式(1)和式(2)构成方程组,当 $x\neq a$ 时,解得 $D_n=\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$.而当 $x=a$ 时

$$\begin{aligned}D_n&=aD_{n-1}+a^n=a(aD_{n-2}+a^{n-1})+a^n=a^2D_{n-2}+2a^n\\&=a^2(aD_{n-3}+a^{n-2})+2a^n=a^3D_{n-3}+3a^n\\&=\cdots\\&=a^{n-2}D_2+(n-2)a^n=a^{n-2}(4a^2-a^2)+(n-2)a^n\\&=(n+1)a^n.\end{aligned}$$

注:本题的解法是根据原行列式的特点,经过展开得到递推行列式,然后用递推的方法解题的这种方法称为递推法.

例 7　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$(其中 n 是奇数).

解　这个行列式的特点是,第 i 行第 j 列的元素等于第 j 行第 i 列元素的相反数,即 $a_{ij}=-a_{ji}$,具有这种特点的行列式(n 是自然数)称为反对称行列式.

先把 D_n 转置为 D'_n,再对 D'_n 的每一行提取公因子 -1,得

$$D_n = D'_n = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n D_n.$$

由于题中的 n 是奇数可知 $D_n = -D_n$，从而得 $D_n = 0$，故奇数阶反对称行列式等于零.

例 8　已知 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$，试计算 D_n 的展开式中正项的项数.

解　将 D_n 的最后一行加到其余各行上去，则得到的为下三角行列式，它的主对角线上的元素最后一个是 1，其余都是 2，因此 $D_n = 2^{n-1}$. 为了计算 D_n 的展开式中正项的项数，设 D_n 的展开式的 $n!$ 项中有正项数 p 个，负项数 q 个，由于展开式的每一项是 $+1$ 或 -1，故

$$\begin{cases} p + q = n!, \\ p - q = 2^{n-1}. \end{cases}$$

从而 $p = 2^{n-2} + \frac{1}{2}n!$，即有 D_n 的展开式中正项的项数为 $2^{n-2} + \frac{1}{2}n!$.

例 9　计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$ $(b \neq c)$.

解　把 D_n 的第 1 列元素都写成两个数之和，从而 D_n 可拆成两个行列式之和

$$D_n=\begin{vmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a-c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & \cdots & b \\ 0 & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & c & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=c\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+(a-c)D_{n-1}$$

$$\xlongequal{c_j-bc_1}c\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c-b & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix}+(a-c)D_{n-1}$$

$$=c(a-b)^{n-1}+(a-c)D_{n-1}. \tag{1}$$

把 D_n 的第一行元素都写成两个数之和，从而 D_n 又可以拆成两个行列式相加

$$D_n=\begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+(a-b)D_{n-1}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-cr_1}b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b & \cdots & b & b \\ 0 & 0 & a-c & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-c \end{vmatrix}+(a-b)D_{n-1}$$

$$=b(a-c)^{n-1}+(a-b)D_{n-1}. \tag{2}$$

联立(1)、(2)两式组成关于 D_n, D_{n-1} 为未知数的方程组可以解出

$$D_n=\frac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}.$$

注:本例计算中使用了把已知行列式拆成两个行列式和的方法,这种把一个行列式拆成几个行列式的和计算的方法通常称为拆行(列)法.

例 10　证明:平面上 3 条不同直线 $\ell_1:ax+by+c=0$;$\ell_2:bx+cy+a=0$;$\ell_3:cx+ay+b=0$ 相交于一点的充要条件是 $a+b+c=0$.

证　3 条直线相交于一点,即方程组 $\begin{cases}ax+by+c=0,\\bx+cy+a=0,\\cx+ay+b=0\end{cases}$ 有唯一解,这里未知数 x,y 的个数 2 与方程的个数 3 不相等,但从另一个角度看,形式上可把 $(x,y,1)$ 看成三元齐次方程组

$$\begin{cases}ax+by+cz=0,\\bx+cy+az=0,\\cx+ay+bz=0\end{cases}$$

的一个非零解,其充要条件是其系数行列式等于零.由此得 3 条直线 ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 相交于一点的充要条件是 $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}=0$.即

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix}a+b+c&b&c\\a+b+c&c&a\\a+b+c&a&b\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}a+b+c&b&c\\0&c-b&a-c\\0&a-b&b-c\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\left[-(b-c)^2-(a-b)(a-c)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(b-c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2\right]=0.$$

由于 3 条直线为不同的 3 条直线,所以 a,b,c 不全相等,故 $a+b+c=0$.

例 11　已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 3 点 $(1,0)$,$(2,3)$,$(-3,28)$,求抛物线的方程.

解　将 3 点的坐标代入抛物线方程,得到 a,b,c 应满足的非齐次线性方程组

$$\begin{cases}c+b\cdot 1+a\cdot 1^2=0,\\c+b\cdot 2+a\cdot 2^2=3,\\c+b\cdot(-3)+a\cdot(-3)^2=28,\end{cases}$$

其系数行列式是三阶范德蒙德行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1^2\\1&2&2^2\\1&-3&(-3)^2\end{vmatrix}=(2-1)(-3-1)(-3-2)\neq 0.$$