高等学校教材

# 高等数学

## （基础部分）

上册

清华大学数学教研组　编

高等教育出版社

高 等 学 校 教 材

# 高等数学

（基础部分）

上册

清华大学数学教研组　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是在清华大学数学教研组1958年所编高等数学讲义的基础上修订而成的。1963年清华大学数学教研组程紫明等同志将书稿作了进一步整理修改后，由高等数学课程教材编审委员会委托浙江大学周茂清同志与西安交通大学陆庆乐同志进行初审，并经高等数学课程教材编审委员会复审，推荐作为高等工业学校高等数学试用教科书出版。在1964年8月第一版重印前由清华大学数学教研组作了一次勘误。

本书分上下两册出版，上册内容是平面解析几何与一元函数的微积分学。

本书深度比较适合对工科学生所要求的水平，内容的讲解在详略程度上大体恰当，除作为教学用书外，也可作为有关工程技术人员的自学用书或参考书。

本书于1964年出版，恰逢高等教育出版社建社60周年，甲午重印，以飨读者。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：基础部分．上册/清华大学数学教研组编．—北京：高等教育出版社，2014.8
ISBN 978-7-04-039995-0

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①清…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第112602号

策划编辑　蒋　青　　责任编辑　蒋　青　　封面设计　杨立新　　版式设计　于　婕
插图绘制　郝　林　　责任校对　胡美萍　　责任印制　韩　刚

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 咨询电话 | 400-810-0598 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 邮政编码 | 100120 | | http://www.hep.com.cn |
| 印　　刷 | 涿州市星河印刷有限公司 | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 开　　本 | 850mm×1168mm　1/32 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　张 | 16.125 | 版　　次 | 2014年8月第1版 |
| 字　　数 | 410千字 | 印　　次 | 2014年8月第1次印刷 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 定　　价 | 33.60元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　39995-00

# 出版说明

1954年5月,高等教育出版社正式成立。60年来,在教育部领导的关怀下,在数学教育工作者的支持下,高教社出版了众多数学教材,可谓群贤毕至,精品迭出,伴随着青年学子们度过了难忘的大学时光。

由于各种原因,部分优秀教材没有机会再版或重印。这其中有我国第一部高等数学教学大纲的制定者朱公谨先生编写的《高等数学(初稿)》;教材编审委员会主任赵访熊先生主编的《高等数学》;西安交通大学陆庆乐先生主编的《高等数学(基础部分)》;清华大学程紫明主编的《高等数学(基础部分)》;还有项武义先生的《微积分大意》,谷超豪、李大潜、沈玮熙的《应用偏微分方程》,吴大任先生的《微分几何讲义》(修订版),北京大学的《数学分析》及其习题集……这些教材,不仅是数学专家、广大数学教师的教学经验的积累,也是历届数学教材编审委员会的集体智慧的结晶,更是各个时期数学教学改革的成果代表,它们呈现了数学教材建设的真实历史,深深影响了几代人。

虽然这些教材出版时间较早,但从数学学科的发展和教学改革的趋势来看,它们对现在的数学课程教学仍然有一定的借鉴意义。为了使广大读者能够对比各时期高校数学教学要求、教学内容体系的变迁,更好地传承数学的教学思想、教学方法,促进当前数学教学改革,提高教学质量,我们遴选了60年来具有代表性的经典数学教材进行重新印刷。

这套教材的重版,牵动各方专家的关注,凝结了很多前辈的厚

爱和支持。在联系原作著作权人的过程中，西安交通大学马知恩教授、上海交通大学乐经良教授、清华大学盛祥耀教授都给予了我们帮助。已故作者的子女也积极地配合我们工作。高等教育出版社的郭思旭编审从选题到提供样书给予了很大帮助，胡乃冏、徐刚编审提供了部分资料和样书，王雎老师为这套书的封面从选纸到配色做了精美的设计，使得这套教材不仅保持了原有的风貌，更融入了现代元素。

在本套教材的重版编辑过程中，我们克服了重重困难，本着古建筑修复中"整旧如旧"的原则，尽管这套书中提及的有些算法已经不再用了，我们仍然保留了这些部分，以求保持经典教材的原汁原味，仅做了规范方面的微小改动。重温经典，不仅让老专家、老前辈们抚今追昔，也让我们倍感自豪和使命感，我们还会进一步增加重版的品种，奉献给读者更多优秀教材。

由于本套教材的重版在较短时间内完成，虽竭尽全力，疏漏之处在所难免，恳请各位专家和广大读者批评指正。

高等教育出版社

2014年4月

# 上册目录

# 预备知识

## §1. 实数与数轴

数，最初产生于点算物件的个数，最基本的数是自然数：1，2，3，⋯.

数的运算中，最简单的是加法运算.事实上，点算物件的个数也体现着一个一个地累加.

由于生产的逐渐发展，人们对客观事物的认识逐渐深入，数的运算扩充为四则运算，数的范围亦由自然数扩充到整数：0，±1，±2，⋯，再扩充到有理数.所谓有理数，是指$\frac{q}{p}$这种形式的数，其中$p,q$都是整数，且$p\neq0$.有理数当然包括了所有整数，这是因为，当$p=1$时，有理数就简化为整数.

有理数可以用十进位小数来表示，这些小数或者是有尽的，或者是循环的.例如：

$$\frac{1}{4}=0.25,\quad \frac{5}{6}=0.8\dot{3},\quad \frac{22}{7}=3.\dot{1}42\,85\dot{7}.$$

反过来，任何一个有尽小数或循环小数也都可以化为有理数.

在实际生活中，常要测量一些物理量，如长度、面积、时间、温度、质量等，取了一定的单位以后，这些量都可以被测量，测量的结果用数来表示.但有些量不能用有理数来表示，例如，对于两直角

边皆为单位长度的直角三角形,其斜边的长度为$\sqrt{2}$个单位长度,$\sqrt{2}$不是一个有理数,又如半径为单位长度的圆,它的面积是 π 个单位面积(单位长度的平方),π 也不是一个有理数.像$\sqrt{2}$,π 这样的数,如果用十进位小数来表示,都是不循环的无尽小数:

$$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 5\cdots,\quad \pi=3.141\ 592\ 6\cdots,$$

这种不循环的无尽小数叫做无理数.

有理数与无理数统称为实数.在实数范围内,可以进行更多种的运算,如对于正的实数可以进行开方、取对数,对于任何实数可以取三角函数等.在高等数学这一门课程中,除了个别情况外,所遇到的都是实数.

大家都知道,在数学中经常采取数与形相结合的方法来研究问题,例如,三角函数这种数量关系与直角三角形紧密联系着,又如,数量间的比例关系与相似形有直接的联系.通过图形我们不仅能直观地认识数量的抽象性质,并且还可以利用图形解决一些数量的问题(如第六章中将要讲到的方程的图解法);通过数量关系的研究也能解决一些重要的几何问题(如第五章中将要讲到如何利用数量关系来精密地作出曲线的切线).现在我们研究实数,也要设法将数与形结合起来.

设有一条无穷长的直线,习惯上都把它放在水平的位置,在这直线上任取一点 $O$,称为原点,在这直线上规定好一个正方向(习惯上规定向右的方向为正方向),在这直线上再规定好一个长度的单位,如图 0.1.这种具有原点、正方向与长度单位的直线叫做数轴.

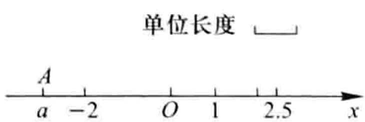


图 0.1

对于每一个实数 $a$，我们可以在数轴上规定一个点 $A$ 与它对应. 规定的方法是：若 $a=0$，则点 $A$ 就是原点；若 $a>0$，则点 $A$ 在原点之右，且点 $A$ 与原点间的距离等于 $a$ 个单位长度；若 $a<0$，则点 $A$ 在原点之左，且点 $A$ 与原点间的距离等于 $-a$ $(-a>0)$ 个单位长度.

反过来说，对于数轴上每一个点 $A$，我们可以规定一个实数 $a$ 与它对应. 规定的方法是：若点 $A$ 是原点，则 $a=0$；若点 $A$ 在原点 $O$ 之右，则 $a=|OA|$ （$|OA|$ 表示点 $A$ 与原点 $O$ 之间的距离）；若点 $A$ 在原点 $O$ 之左，则 $a=-|OA|$.

这样一来，所有实数与数轴上所有的点形成了一种一一对应的关系，从而实数的性质与数轴上的点的性质就发生了紧密的联系.

总起来说：**有理数与无理数统称为实数. 每一个实数可用十进位小数来表示，有理数可用有尽小数或循环小数来表示，无理数可用不循环的无尽小数来表示. 在所有实数与数轴上所有点之间存在着一一对应的关系，也就是说，对于每一个实数 $a$，在数轴上有一个点 $A$ 与它对应，对于数轴上每一个点 $A$，有一个实数 $a$ 与它对应. 这种对应关系可以用下面的数学式子来表示：**

$$a=\begin{cases}|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之右},\\ 0, & \text{当点 } A \text{ 与原点 } O \text{ 重合},\\ -|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之左},\end{cases}$$

**其中 $|OA|$ 表示点 $A$ 与原点 $O$ 之间的距离，也就是线段 $\overline{OA}$ 的长度.**

**数轴也称为实数轴，也简称为轴. 与点 $A$ 相对应的实数 $a$ 称为点 $A$ 在数轴上的坐标.**

为了简单计，我们时常不去区分一实数和它的对应点，而用同一符号来表示它们，我们有时说实数 $a$，也有时说点 $a$.

数轴上与有理数相对应的点叫做有理点，与无理数相对应的

点叫做无理点.

显然,如实数 $a$ 小于实数 $b$,则点 $a$ 在点 $b$ 的左方,且 $b-a$ 就是点 $a$ 与点 $b$ 间的距离.

**现在我们进而提出实数的两个重要性质:**

**第一,有理数的稠密性.** 任给两个有理数 $a,b\ (a<b)$,则在 $a,b$ 之间至少可以找到一个有理数. 例如,$a,b$ 的算术平均数 $c=\frac{a+b}{2}$就是 $a,b$ 之间的一个有理数. 同样,在 $a,c$ 之间也至少可找到一个有理数. 依次类推,可知 $a,b$ 之间可以找到无穷多个有理数. 所谓有理数的稠密性就是指:不论有理数 $a,b$ 相差多么小,在 $a,b$ 之间总可以找到无穷多个有理数,也就是说,有理点在数轴上是到处稠密的.

用同样的方法可以论证,实数也具有稠密性.

**第二,实数的连续性.** 既然实数与数轴上的点一一对应,可见实数充满数轴而没有"空隙",这就叫做实数的连续性. 有理数虽然稠密,但并不连续,例如$\sqrt{2}$,$\pi$ 这些无理数就是有理数中的"空隙",有理点之间有无穷多这种"空隙".

实数的连续性是实数的一个最根本的性质. 在以后的学习中常要用到这个性质.

## §2. 绝对值

当我们对一个物理量进行直接测量时,常常是测不准的,有时偏大,有时偏小. 评定测量的准确度时,经常注意到的是偏离的大小,而不计较偏大了还是偏小了,处理这类问题时,常要用到实数的绝对值. 现在我们来介绍一下绝对值的定义及关于绝对值的一些性质.

**定义.** **对于实数 $a$,定义 $a$ 的绝对值 $|a|$ 为**

$$|a| = \begin{cases} a, 若\ a>0, \\ 0, 若\ a=0, \\ -a, 若\ a<0. \end{cases}$$

**例一.** $|2|=2.\quad |-3.1|=3.1.\quad |0|=0.$

容易看出,不论点 $a$ 在原点的右方或左方,实数 $a$ 的绝对值 $|a|$ 表示点 $a$ 与原点间的距离,如图 0.2.

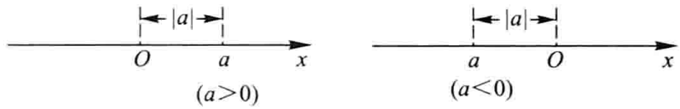


**图 0.2**

**I. 关于绝对值的性质**

以下关于绝对值的一些性质都是明显的.

(i) $|a|\geqslant 0$.

这个不等式表示 $|a|>0$ 或者 $|a|=0$.

(ii) $|-a|=|a|$.

这个等式表示 $-a$ 和 $a$ 的绝对值相同.

(iii) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

$a>0$ 时,右边是等号,左边是不等号;$a<0$ 时,右边是不等号,左边是等号;$a=0$ 时,左边右边都是等号.

(iv) **对于实数 $a$,如有一正数 $\varepsilon$,使**

(1) $$|a|<\varepsilon,$$

**则必然有**

(2) $$-\varepsilon<a<\varepsilon.$$

**其逆亦真.**

从几何上来看,(1) 表示点 $a$ 与原点间的距离小于 $\varepsilon$,(2) 表示点 $a$ 在点 $-\varepsilon$ 与点 $\varepsilon$ 之间,所以,它们表示相同的意义,如图 0.3.


图 0.3

（ⅴ）对于实数 $a$，如有一正数 $N$，使

(3) $$|a| > N,$$

则必然有

(4) $$a > N \quad \text{或} \quad a < -N.$$

其逆亦真.

从几何上来看，(3) 表示点 $a$ 与原点间的距离大于 $N$，(4) 表示点 $a$ 在点 $N$ 之右或在点 $-N$ 之左，它们也表示相同的意义，如图 0.4.


图 0.4

**Ⅱ. 有关绝对值的四则运算**

（ⅰ）对于任意两个实数 $a, b$，恒有

(5) $$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

证明：根据性质（ⅲ），有

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$
$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

两式相加，得

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

根据性质（ⅳ），即知

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$ 证毕.

**例二.** 当 $a, b$ 同号时，(5) 式中等号成立，如

$$|3+5| = |3| + |5|,$$
$$|(-3)+(-5)| = |-3| + |-5|.$$

当 $a, b$ 异号时，(5) 式中不等号成立，如

$$|3+(-5)|<|3|+|-5|,$$
$$|(-3)+5|<|-3|+|5|.$$

（ii）**对于任意两个实数 $a,b$,恒有**

(6) $$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

证明:因为

$$|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

故得

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$ 证毕.

（iii）**对于任意两个实数 $a,b$,恒有**

(7) $$|ab|=|a|\cdot|b|,\quad\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ (b\neq0).$$

根据绝对值的定义,这两个公式显然是正确的.

## §3. 变量及变量的变化范围

我们考察各种自然现象与技术过程时,常会遇到各种各样的量,如水库中水的深度、丰产田的面积、汽车行驶时汽油的消耗量、机床安全运转的时间、高炉的温度、工厂内工人的名额等.这些量都有共同的特征,即采取了一定的单位以后,这些量都可以通过度量用数来表示.这些数就叫做这些量所取的值.

在一定的运动过程中,有的量变化,即取不同的值,有的量则保持一个固定的值而不变,前者叫做变量,后者叫做常量.例如人造卫星与地球间的距离是一个变量;在一定时期内,车间里的车床台数是一个常量.若一个量在所讨论的过程中变化很小,以至对某个实用目的来讲可以忽略不计时,我们也把它算作是常量.例如,在不同的地点,落体的重力加速度是不同的,因而它是个变量,但在较小地区中研究落体运动时,通常将重力加速度看成常量.因此,一个量是常量还是变量,要根据具体情况来决定.

为了控制技术过程,使它满足生产实践中所提出的种种要求,就必须把问题中所涉及的各个变量的变化情况弄清楚.例如,为了把电压控制在 220 V 左右,或把设备利用率提高到接近 100%,就必须弄清楚电压或设备利用率的变化情况,只有这样,才能拟定出适当的措施以达到上述目的.所以研究变量是数学中重要的课题.

变量的性质与类型是多种多样的,可以从各个不同的角度来加以考察,钟摆与铅垂线间的夹角是个连续变化着的变量,它的值是有界限的,譬如说总是介于 $-\frac{\pi}{6}$ 与 $\frac{\pi}{6}$ 之间.但多边形的边数这个变量则只能取 3,4,5,… 这些正整数值,它不是连续变化的,它的值可以无限增大,它不是有界的.由此可见,仅就变量的变化状态和变量所能取得的值的范围来说,就有连续、不连续与有界、无界之分.若就变量的变化趋势来说,也有种种不同,例如,火车从出发站开出后与出发站的距离,一般是个不断增大的变量,某个工厂产品中的次品率也许是个不断减小的变量,而地球与太阳间的距离则是时而变大、时而变小的变量.再如就变量变化的速度来讲,也有快慢之别.系统地研究变量的这些特点,找出它们相互联系的规律,以便利用这些规律去解决生产中的问题,这就是我们学习这门课程的目的.

在今后的讨论中,为了叙述的简便起见,经常采用 $x,y,z,\theta,t$ 等字母来代表变量,$a,b,c$ 等字母来代表常量.当然,这也不是一成不变的.

变量所能取得的值的范围常可用不等式来表示.例如,若以 $\theta$ 代表钟摆与铅垂线间的夹角,则按上面一段所述的情况,$\theta$ 的变化范围可以用不等式

$$-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$$

来表示.

为了看起来更加清楚，我们还常采用下述的几何表示法. 把变量 $x$ 所能取的每一个值都用数轴上的一个点来表示. 于是变量就可用变点即通常所说的动点来表示，而常量就相当于数轴上的一个定点了. 这时，变量的变化范围也可在数轴上以图形表示出来. 例如，若变量 $x$ 的变化范围在 $a,b$ 两数之间，即 $a<x<b$，那么，相应的动点就在数轴上的点 $a$ 与点 $b$ 之间变化，这些点构成一个不包括端点在内的线段，我们称之为开区间，并以记号 $(a,b)$ 来记它. 正像我们常把数 $a$ 叫做点 $a$ 一样，我们也常把不等式

$$a<x<b$$

叫做开区间，如图 0.5(a). 若变量 $x$ 的变化范围在 $a,b$ 两数之间，且能取 $a$ 与 $b$ 二值，即 $a\leqslant x\leqslant b$，相应的动点就在数轴上构成一个包括端点在内的线段，我们称之为闭区间 $[a,b]$.
我们也常把不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

叫做闭区间，如图 0.5(b).

变量 $x$ 的变化范围也可以是半开区间

$$a<x\leqslant b,$$

记作 $(a,b]$ (见图 0.6(a))，或半开区间

$$a\leqslant x<b,$$

记作 $[a,b)$ (见图 0.6(b)).

变量 $x$ 的变化范围也可以是无穷区间

$$x>a,\quad x\geqslant a,\quad x<a \text{ 或 } x\leqslant a,$$

分别记作 $(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a)$ 或 $(-\infty,a]$，如图 0.7.


开区间$(a, b)$
(a)

闭区间$[a, b]$
(b)

**图 0.5**