21世纪应用型本科院校规划教材

主 审 范钦珊
主 编 周宏伟 鲁 阳 瞿小涛

工程力学实验指导教程 第二版

GONGCHENGLIXUESHIYANZHIDAOJIAOCHENG

南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

工程力学实验指导教程 第二版

主 审 范钦珊
主 编 周宏伟 鲁 阳 瞿小涛

南京大学出版社

内容简介

本实验教材是根据教育部关于开展高等学校实验教学示范中心建设的精神和要求，结合多年实验教学的经验编写而成。本书包含了教学大纲规定的基本实验，内容包括绪论、实验误差分析和数据处理、实验设备及仪器、力学性能基本实验、电测应力分析、光弹性实验介绍、理论力学实验等。

本书可作为普通高等院校力学及相关专业本科生和研究生的实验教材，也可供从事力学研究和应用的工程技术人员学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学实验指导教程 / 周宏伟，鲁阳，瞿小涛主编. —2 版. — 南京：南京大学出版社，2014.1
21 世纪应用型本科院校规划教材
ISBN 978-7-305-09608-2

Ⅰ.①工… Ⅱ.①周… ②鲁… ③瞿… Ⅲ.①工程力学—实验—高等学校—教材 Ⅳ.①TB12-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 017935 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　邮　　编　210093
网　　址　http://www.NjupCo.com
出 版 人　左　健

丛 书 名　21 世纪应用型本科院校规划教材
书　　名　工程力学实验指导教程(第二版)
主　　审　范钦珊
主　　编　周宏伟　鲁　阳　瞿小涛
责任编辑　胥橙庭　单　宁　　编辑热线　025-83596923

照　　排　南京南琳图文制作有限公司
印　　刷　中闻集团南京印务有限公司
开　　本　787×1092　1/16　印张 11.75　字数 286 千
版　　次　2014 年 1 月第 2 版　　2014 年 1 月第 1 次印刷
ISBN　978-7-305-09608-2
定　　价　26.00 元

发行热线　025-83594756
电子邮箱　Press@NjupCo.com
　　　　　Sales@NjupCo.com(市场部)

前　　言

为了适应工程力学实验教学改革的需要，培养面向21世纪的复合型、应用型人才，根据工程力学教学大纲规定的实验内容，我们编写了这本《工程力学实验指导教程》。

本书以南京工业大学《工程力学》实验指导讲义（第二版）为蓝本，针对目前的设备、仪器条件，并结合多年的实验教学实践编写的。在实验仪器和设备、实验原理、方法和步骤等方面作了比较详细的叙述。

本书由周宏伟担任主编和统稿。具体编写分工如下：第四章由鲁阳编写；第二章2.1和2.2、第三章3.1和3.2由瞿小涛编写；其余章节由周宏伟编写。姬秀文参加了本书部分工作。

本书在编写过程中得到了范钦珊教授的大力支持和悉心指导，并提出了宝贵的意见。在本书的编写过程中学习和借鉴了许多兄弟院校的经验，其中有浙江大学、南京航空航天大学、天津大学、上海交通大学等，并得到了他们的指教和帮助，谨此一并致谢。同时对南京大学出版社编辑的支持和耐心细致的工作表示感谢。

限于水平和时间有限，教材中难免有疏漏和欠妥之处，敬请广大师生和读者批评指正，以便今后进一步修改和完善。

编者

目　　录

第 1 章

绪　论

§1.1　工程力学实验的任务及内容

1.1.1　工程力学和工程力学实验

实验是人类认识客观世界的重要方法之一，人类科学史上很多重大的发明和发现都是与成功的科学实验紧密相连的，例如，材料力学中应力-应变的线性关系就是胡克于 1668 年到 1678 年间做了一系列的弹簧实验之后建立起来的. 进入 20 世纪以来，科学实验更成为科学技术发展的主要手段之一. 因此，实验知识、实验技能是科技人才全面知识结构的重要组成部分. 通过实验课程的学习，可使学习者在学习实验知识、技能的同时，更重要的是培养严谨、求实的科学习惯和顽强的意志品质，因而实验课程是重要的教学环节，是科技人才培养工程中不可缺少的重要组成部分.

工程力学是高等院校工科专业的重要技术基础课，它涵盖了理论力学和材料力学两门课程的内容. 理论力学研究物体机械运动的一般规律，所谓机械运动，指物体在空间的位置随时间变化的规律；材料力学研究材料的变形，即研究作用在物体上的力与物体变形之间的关系. 将这些应用于工程，可以解决工程结构和构件的运动学和动力学问题，以及强度、刚度和稳定性问题.

工程力学实验对于工程力学（理论力学、材料力学）的学习更具有重要的意义，这是因为工程力学的很多知识都是建立在实验成果之上的，学科的进一步发展也离不开实验对新规律的不断探索. 通过对工程力学实验课的学习，一方面可以加深对理论知识和教学内容的深入理解，学习运用科学实验探索科学规律，同时了解工程力学知识被发现、创造的艰辛历程，这对于学习者全面身心健康成长具有重要的意义. 因而，工程力学实验课程和工程力学实验室是学习者获取全面力学知识、培养科学素质和创新能力的重要课堂之一.

1.1.2　工程力学实验的任务

该课程的任务是学习和研究用实验方法解决工程力学问题的理论和技能，具体地说：

（1）学习工程力学实验设备、仪器的使用和用实验解决工程力学问题的方法；

（2）与工程力学理论教学互为支持，相互验证，加强对工程力学知识的理解；

(3) 培养学习者在教师的指导下进行实验研究的初步能力.

通过工程力学实验课程的学习,在构筑学习者全面的工程力学知识结构的同时,还要注意逐步培养学习者良好的学习习惯和顽强的意志品质.

1.1.3 工程力学实验课程的内容

工程力学涵盖理论力学与材料力学两门课程的内容,因而工程力学实验也涵盖两门课程的实验内容,主要有:

(1) 与理论教学内容互为验证的实验

理论力学与材料力学中的理论和计算公式均是在一定的简化基础上推演得到的,工程实际与上述简化模型必然会存在若干差异,上述理论和计算公式的正确性和适用范围需经实验检验;对于理论计算无法解决的工程力学工程问题,可考虑用实验方法解决,实验方法的可靠性也需验证.此时可选择有理论计算结果的简单问题,若承认理论的正确性,理论计算的结果可作为实验方法正确性的验证.理论和实验的互为检验促进了理论知识和实验知识、实验方法的不断发展.

通过实验还可以演示一些力学现象,如振动问题中的共振、消振和隔振现象等,从而可将抽象的理论具体化.

(2) 运动量的测量与材料力学性能的测试实验

理论力学研究物体机械运动的规律,在理论教学中讲述了描述运动的各种物理量(如振动的振幅、速度和加速度)的变化规律等,通过对这些量的测量,学会测量仪器的使用方法.同时也对这些量随时间的变化规律及相互关系有具体的认识.

材料力学的内容和任务之一是研究材料的力学性能,如材料的强度指标、弹性常数等,这些力学性能均是通过试验进行测定的.材料的力学性能是构件设计的基本依据,因而测试力学性能的试验必须遵照国家的有关试验规范进行.通过这些实验,既可以初步了解有关试验规范的内容,初步掌握测试方法,同时也可以巩固所学的材料力学性能知识.

(3) 应力分析实验

工程中很多实际构件的受力及应力分布规律的问题,是无法用理论公式进行计算的,而是用实验应力分析的方法设法解决.对某些重要的工程问题,尽管可以得到其理论解答或数值计算结果,但考虑其重要性,对这些解答和结果尚需实验结果的验证.因而,学习用实验应力分析方法解决工程问题,是工程力学实验的重要内容.在工程力学实验中,设计了一些教学实验,讲解实验应力分析的理论和实验方法,如电测实验、光弹性实验等.

1.1.4 实验注意事项

实验教学与理论教学相比,其显著的特点是实践性很强,要接触较多的测试仪器、设备.为了使实验能够顺利进行,使学习者能通过实验掌握实验原理和方法,初步学会实验仪器的使用方法,对实验结果的整理、实验数据的处理和实验报告的书写等多方面得到初步的训练,实验时应注意如下事项:

(1) 做好实验前的准备工作

① 认真做好实验前的预习工作,阅读实验指导书或实验教材,复习有关的理论知识,明

确实验的目的、原理和实验步骤等.

② 对实验中使用的仪器、设备和实验装置等,要初步了解其工作原理、使用方法和操作注意事项,认真找出仪器、设备使用中的问题,以便上课时重点听教师讲解或向教师请教.

③ 对于需由小组完成的实验,课前应编好实验小组,小组成员须分工明确,相互配合,协调操作,共同完成实验.

④ 认真、清楚地了解实验所需记录的数据项目及数据处理的原理和方法,设计好数据记录表格.

(2) 严格遵守实验室的规章制度,上好实验课

① 按课程安排,准时进入实验室. 对于开放实验,应该预约时间进入实验室. 第一次上实验课时应认真学习实验室的规章制度,并认真遵守执行.

② 进入实验室后,要注意保持室内的整洁、安静,未经允许,不得随意动用室内的仪器设备. 实验中发生仪器、设备故障时,应及时报告,不得擅自处理,更不准隐匿不报.

③ 认真接受教师对实验预习情况的抽查、提问;仔细聆听教师对实验课程内容的讲解.

④ 操作仪器、设备之前,应注意检查仪器、设备是否处于完好状态. 实验过程中,严格按仪器、设备的操作规程进行操作,认真观察实验现象,记录好实验数据,要随时分析判断实验数据的正确性,保障实验过程的顺利进行.

⑤ 实验结束前,应将全部数据交实验课教师审阅,经教师同意后结束实验.

⑥ 实验结束后,应将所用仪器、设备擦拭干净,恢复至初始正常状态.

(3) 认真书写实验报告

实验报告是反映实验工作及实验结果的书面综合资料,通过实验报告的书写,能培养学习者综合反映科学工作成果的文字能力,是全面训练的重要组成部分,必须认真完成. 写实验报告须做到字迹工整,图表清晰,结论简明. 一份完整的实验报告,应由以下内容组成:

① 实验名称,实验日期,环境温度,实验小组成员名单.

② 实验目的和要求,实验原理和装置,通常要画出装置简图.

③ 实验仪器和设备的名称、型号及精度.

④ 实验数据记录,实验数据处理(注意采用适当的处理方法和保留正确的有效数字).

⑤ 实验结果和结论. 通常可用表格或曲线表示实验结果,实验结论应简单、明确,符合科学习惯,要与实验的目的、要求相呼应.

⑥ 实验结果的分析与讨论.

§1.2 实验基础知识

1.2.1 测量与实验误差分析

测量就是用实验的方法,将被测物理量与所选用作为标准的同类量进行比较,从而确定它的大小. 测量是人类认识事物本质不可缺少的手段. 通过测量和实验,能使人们对事物获得定量的概念和发现事物的规律性. 由于实验方法和实验设备的不完善,周围环

境的影响，以及人的观察力、测量程序等限制，实验观测值和真值之间总是存在一定的差异. 为了评定实验数据的精确性或误差，认清误差的来源及其影响，需要对实验的误差进行分析和讨论.

1. 测量和误差的基本概念

(1) 真值与平均值

真值是待测物理量客观存在的确定值，也称理论值或定义值. 通常，真值是无法测得的，可以根据需要把被测物理量的理论值或定义值作为真值. 若在实验中，测量的次数无限多时，根据误差的分布定律，正负误差的出现几率相等. 再经过细致地消除系统误差，将测量值加以平均，可以获得非常接近于真值的数值. 但是，实际上实验测量的次数总是有限的. 用有限测量值求得的平均值只能是近似真值，常用的平均值有下列几种：

① 算术平均值. 算术平均值是最常见的一种平均值.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为各次测量值，n 代表测量次数，则算术平均值为

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{1-1}$$

② 几何平均值. 几何平均值是将一组 n 个测量值连乘并开 n 次方求得的平均值，即

$$\bar{x}_n=\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}. \tag{1-2}$$

③ 均方根平均值.

$$\bar{x}_{均}=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}. \tag{1-3}$$

④ 对数平均值. 如果测量值的分布曲线具有对数特性，在这种情况下表征平均值常用对数平均值.

设两个量 x_1, x_2，其对数平均值为

$$\bar{x}_{对}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\frac{x_1-x_2}{\ln \frac{x_1}{x_2}}. \tag{1-4}$$

应指出，变量的对数平均值总小于算术平均值. 当 $x_1/x_2 \leqslant 2$ 时，可以用算术平均值代替对数平均值.

当 $x_1/x_2=2$，$\bar{x}_{对}=1.443$，$\bar{x}=1.50$，$(\bar{x}_{对}-\bar{x})/\bar{x}_{对}=4.2\%$，即 $x_1/x_2 \leqslant 2$ 引起的误差不超过 4.2%.

以上介绍各平均值的目的是要从一组测定值中找出最接近真值的那个值. 在实验中，数据的分布较多属于正态分布，所以通常采用算术平均值.

(2) 绝对误差

测量值 X 和真值 A_0 之差为绝对误差，通常称为误差，记为

$$D=X-A_0. \tag{1-5}$$

由于真值 A_0 一般无法求得，因而式(1-5)只有理论意义. 常用高一级标准仪器的示值

作为实际值 A 以代替真值 A_0. 由于高一级标准仪器存在较小的误差，因而 A 不等于 A_0，但总比 X 更接近于 A_0. X 与 A 之差称为仪器的示值绝对误差，记为

$$d=X-A. \tag{1-6}$$

与 d 相反的数称为修正值，记为

$$C=-d=A-X. \tag{1-7}$$

通过检定，可以由高一级标准仪器给出被检仪器的修正值 C. 利用修正值便可以求出该仪器的实际值 A，即

$$A=X+C. \tag{1-8}$$

(3) 相对误差

衡量某一测量值的准确程度，一般用相对误差来表示. 示值绝对误差 d 与被测量的实际值 A 的百分比值称为实际相对误差，记为

$$\delta_A=\frac{d}{A}\times 100\%. \tag{1-9}$$

以仪器的示值 X 代替实际值 A 的相对误差称为示值相对误差，记为

$$\delta_X=\frac{d}{X}\times 100\%. \tag{1-10}$$

一般来说，除了某些理论分析外，用示值相对误差较为适宜.

(4) 引用误差

为了计算和划分仪表精确度等级，提出引用误差概念，其定义为仪表示值的绝对误差与量程范围之比，即

$$\delta_n=\frac{\text{示值绝对误差}}{\text{量程范围}}\times 100\%=\frac{d}{X_n}\times 100\%. \tag{1-11}$$

式中 X_n 为标尺上限值～标尺下限值.

2. 误差的分类

根据误差的性质和产生的原因，误差可分为三大类：(1) 系统误差，(2) 随机误差，(3) 过失误差.

(1) 系统误差

系统误差是指测量过程中由一些确定性因素所引起的，在重复性条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值与被测真值间的误差. 系统误差的来源主要有：

① 工具误差，它是测量工具和仪器本身不完善而产生的. 例如，试验机未检定，游标卡尺对零度不好等.

② 装置误差，这是由于测量设备和仪器的电路安装、布置和调整等不恰当而引起的误差.

③ 人身误差，由于测量人员的感觉器官和运动器官的不完善而产生的. 例如，某个人读数时，视差总偏向一边而造成的误差.

④ 外界误差，亦称环境误差，是由外界环境如温度、压力、湿度和电磁场等影响而产生的误差.

⑤ 方法误差，又称理论误差，它是由于测量方法本身所依据的理论不完善所带来的误差. 例如，测量高梁的正应力，用单向应力公式 $\sigma=E\cdot\varepsilon$ 计算就会产生误差，这是因为忽略了剪应力影响而造成的理论误差.

系统误差是有规律的，因此是可以查找并且有可能采取措施加以消除或降低的. 例如，试样安装时，偏心对纵向变形测量所带来的误差，可以用对称安装两个引伸计，取其读数平均值的方法加以消除；又如，增量法可以消除初始读数或调零不准造成的误差. 因此，若能确定系统性误差的大小和方向，则可以用修正的办法找出真值，即

$$\text{真值}=\text{测量值}-\text{修正值}.$$

(2) 随机误差

随机误差也称偶然误差，是指测量过程中由随机性因素所引起的误差. 在相同条件下，多次测量同一对象，即使系统误差已经被控制在极其微小的程度以至于可以将其忽略，所测得的各组数据仍然不会是完全一致的，而是呈不规则的变化，通常表现为数据的最后一位或两位数字有差别，这就是随机误差.

与系统误差相比，随机误差的特点是数值有时大、有时小，符号有时正、有时负，没有确定的变化方向或趋势，因此从表面上看似乎是毫无规律的. 随机误差是不明原因(尚未认识的原因)引起的，所以是无法控制的，或者说是不可避免的. 但实践表明，通过改进测量仪器、完善测量方法以及提高操作技能，可以在一定程度上减少随机误差.

实际上，随机误差并非完全没有规律性，只不过其规律是统计性的. 如果用同一测量系统在相同条件下对同一对象的测量次数达到充分大，可以发现测量结果的随机误差一般是服从正态分布的. 随着测量次数的增加，随机误差的算术平均值会逐渐趋近于零. 因此，假如没有系统误差存在，随着测量次数的增加，所得测量数据的算术平均值将趋近于真值.

(3) 过失误差

过失误差是由于测量人员的技术性失误或非技术性原因造成的误差. 这类误差一般是无规则的，但由于是来自人为的错误，因此可以通过认真细致的测量操作来加以避免. 我们讨论的误差，一般不包括这类误差，但必须强调，应该慎重地判明确属过失误差，才能将之剔除.

3. 测量的精密度、准确度和精确度

反映测量结果与真实值接近程度的量，称为精度(亦称精确度). 它与误差大小相对应，测量的精度越高，其测量误差越小. “精度”应包括精密度和准确度两层含义.

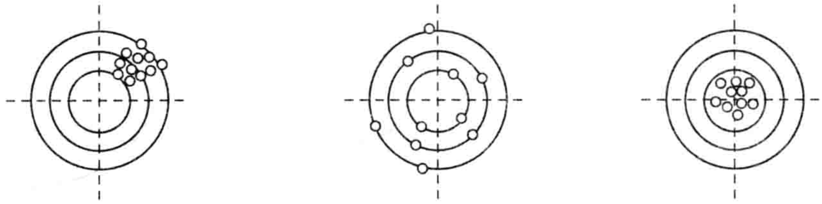
(1) 精密度：测量中所测的数值重现性的程度，称为精密度. 它反映偶然误差的影响程度，精密度高表示偶然误差小.

(2) 准确度：测量值与真值的偏移程度，称为准确度. 它反映系统误差的影响精度，准确度高表示系统误差小.

(3) 精确度(精度)：它反映测量中所有系统误差和偶然误差综合的影响程度.

在一组测量中，精密度高的准确度不一定高，准确度高的精密度也不一定高，但精确度高，则精密度和准确度都高. 为了说明精密度与准确度的区别，可用下述打靶子例子来说明. 图 1.1(a)表示精密度高，即随机误差小，而准确度低，即系统误差大；图 1.1(b)表示准确度高，即系统误差小，而精密度低，即随机误差大；图 1.1(c)表示精确度高，即精密度和准确度

都高.



(a) 精密度高　　(b) 准确度高　　(c) 精确度高

图 1.1 精度示意图

测量仪表的精确等级是用最大引用误差(又称允许误差)来标明的. 它等于仪表示值中的最大绝对误差与仪表的量程范围之比的百分数,即

$$\delta_{n\max}=\frac{\text{最大示值绝对误差}}{\text{量程范围}}\times 100\%=\frac{d_{\max}}{X_n}\times 100\%. \tag{1-12}$$

式中:$\delta_{n\max}$为仪表的最大测量引用误差;$d_{\max}$为仪表示值的最大绝对误差;X_n 为标尺上限值~标尺下限值.

通常情况下是用标准仪表校验较低级的仪表. 所以,最大示值绝对误差就是被校表与标准表之间的最大绝对误差.

测量仪表的精度等级是国家统一规定的,把允许误差中的百分号去掉,剩下的数字就称为仪表的精度等级. 仪表的精度等级常以圆圈内的数字标明在仪表的面板上. 例如,某台压力计的允许误差为 1.5%,这台压力计电工仪表的精度等级就是 1.5,通常简称 1.5 级仪表.

仪表的精度等级为 a,它表明仪表在正常工作条件下,其最大引用误差的绝对值 $\delta_{n\max}$不能超过的界限,即

$$\delta_{n\max}=\frac{d_{\max}}{X_n}\times 100\%\leqslant a\%. \tag{1-13}$$

由式(1-13)可知,在应用仪表进行测量时所能产生的最大绝对误差(简称误差限)为

$$d_{\max}\leqslant a\%\cdot X_n. \tag{1-14}$$

而用仪表测量的最大值相对误差为

$$\delta_{\max}=\frac{d_{\max}}{X_n}\leqslant a\%\cdot\frac{X_n}{X}. \tag{1-15}$$

由式(1-15)可以看出,用仪表测量某一被测量所能产生的最大示值相对误差不会超过仪表允许误差 $a\%$乘以仪表测量上限 X_n 与测量值 X 的比. 在实际测量中为可靠起见,可用式(1-16)对仪表的测量误差进行估计,即

$$\delta_{n\max}=a\%\cdot\frac{X_n}{X}. \tag{1-16}$$

[例 1-1] 用量限为 5 A、精度为 0.5 级的电流表,分别测量两个电流,$I_1=5$ A,$I_2=2.5$ A. 试求测量 I_1 和 I_2 的相对误差为多少?

$$\delta_{m_1}=a\%\times\frac{I_n}{I_1}=0.5\%\times\frac{5}{5}=0.5\%;$$

$$\delta_{m_2}=a\%\times\frac{I_n}{I_2}=0.5\%\times\frac{5}{2.5}=1.0\%.$$

由此可见，当仪表的精度等级选定时，所选仪表的测量上限越接近被测量的值，则测量的误差的绝对值越小.

［例 1-2］ 欲测量约 90 V 的电压，实验室现有 0.5 级 0～300 V 和 1.0 级 0～100 V 的电压表. 问：选用哪一种电压表进行测量为好？

用 0.5 级 0～300 V 的电压表测量 90 V 的相对误差为

$$\delta_{m0.5}=a_1\%\times\frac{U_n}{U}=0.5\%\times\frac{300}{90}\approx1.7\%.$$

用 1.0 级 0～100 V 的电压表测量 90 V 的相对误差为

$$\delta_{m1.0}=a_2\%\times\frac{U_n}{U}=1.0\%\times\frac{100}{90}\approx1.1\%.$$

所以，选用 1.0 级 0～100 V 的电压表为好.

上例说明，如果选择得当，用量程范围适当的 1.0 级仪表进行测量，能得到比用量程范围大的 0.5 级仪表更准确的结果. 因此，在选用仪表时，应根据被测量值的大小，在满足被测量数值范围的前提下，尽可能选择量程小的仪表，并使测量值大于所选仪表满刻度的三分之二，即 $X>2X_n/3$. 这样就可以达到满足测量误差要求，又可以选择精度等级较低的测量仪表，从而降低仪表的成本.

4. 直接测定量的误差表示法

(1) 随机误差的分布规律

随机误差的出现虽然没有确定的规律，但经统计研究表明，它通常都是呈正态分布的(图 1.2)，并具有以下特征：

① 有界性. 极大的正误差或负误差出现的概率都非常小，即误差绝对值不会超过一定的界限.

② 单峰性. 绝对值小的误差出现的机会比绝对值大的误差出现机会多，即误差的概率与误差的大小有关.

③ 对称性. 绝对值相等的正误差和负误差出现的次数大致相等，即误差的概率相同.

④ 抵偿性. 即同条件下，多次测量误差的算术平均值，随着测量次数的增加而趋于零.

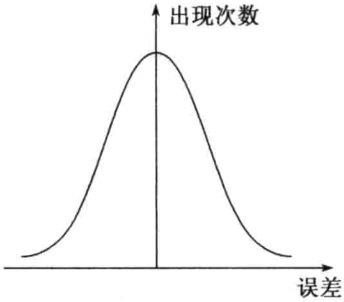


图 1.2 正态分布

描述上述几个特征的数学表达式由高斯提出

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}. \tag{1-17}$$

式中：e=2.78 是自然对数的底；μ 为平均值；σ 为标准误差.

式(1-17)称为高斯误差分布定律，亦称误差方程. 随机变量 x 具有上述特征的分布称为正态分布.

(2) 误差的表示方法

误差的表示方法通常有以下 4 种：

① 范围误差. 范围误差是指一组测量中的最高值与最低值之差，用来表示误差变化的范围.

例如，我们进行了某钢材的抗拉试验，用 10 根试样，得到 10 个强度极限 σ_b 的值(单位：MPa)：745，750，751，759，763，766，770，781，784，785，则其最高值为 785 MPa，最低值为 745 MPa，所以范围误差＝785－745＝40(MPa).

范围误差的优点是简便直观，缺点是它只取决于一组测量值的两个极端值，而与测量次数无关，与中间的数据大小无关，违背了偶然误差与测量次数有关这一事实.

② 算术平均误差. 算术平均误差是各个测量点的误差的平均值，是表示误差的较好方法，其表达式为

$$\delta_{平}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|d_i|.\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-18}$$

式中：$\delta_{平}$ 为算术平均误差；x_i 为第 i 个观测值；$\bar{x}$ 为 n 个观测值的算术平均值；$d_i=x_i-\bar{x}$ 为第 i 次测量的偏差.

因为偏差有正有负，所以式(1－18)取其绝对值平均. 以上面 10 个抗拉强度为例，其算术平均误差计算，得

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\times(745+750+\cdots+785)=765.4.$$

所以 $\delta_{平}=\frac{1}{10}\times(20.4+15.4+14.4+6.4+2.4+0.6+4.6+15.6+18.6+19.6)$ $=11.8(\text{MPa})$.

算术平均误差的缺点是无法表示出各次观测之间彼此符合的程度. 若有两组测量，尽管他们计算的算术平均误差相等，但他们的偏差 $d_i=x_i-\bar{x}$ 可以不一样，即一组的偏差 d_i 比较接近，而另一组的偏差 d_i 则可能比较分散.

③ 标准误差. 标准误差也称均方根误差，其表达式为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n}}. \tag{1-19}$$

式(1－19)使用于无限测量的场合. 实际测量工作中，测量次数是有限的，则改用式(1－20)

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-1}}. \tag{1-20}$$

标准误差 σ 不是一个具体的误差，是各测量值 x_i 的函数，而且对一组测量中的 x_i 的大小比较敏感. σ 的大小只说明在一定条件下等精度测量集合所属的每一个观测值对其算术平均值的分散程度和偏差程度：如果 σ 的值愈小，则说明每一次测量值对其算术平均值分散度就小，测量的精度就高；反之，精度就低. 它是表示精度的一个较好的指标，在误差理论的研究中已被广泛运用.

可以证明，当误差成正态分布时，误差落在 $\pm\sigma$ 上的概率为 0.682 6；$\pm2\sigma$ 上的概率为 0.954 4；$\pm3\sigma$ 上的概率为 0.997 3. 因此，当测量次数 n 为有限次时，若取极限误差为 3σ，其

置信概率为 0.99，即其可靠性为 99%．可见，误差超过$\pm 3\sigma$所出现的几率只有 0.3%．因此，如果多次重复测量中个别数据的误差绝对值大于 3σ，则这个极端值可以舍弃．

上面提到某钢材的 10 个抗拉强度 σ_b 的观察值，按标准误差，得

$$\sigma=14.5\ \text{MPa}.$$

5. 间接测量中误差的传递

在测量中有些物理量是可以直接测量的，如：长度、质量和时间等；有些物理量是不能直接测量的，如：屈服极限、强度极限、延伸率和断面收缩率等．对于这些不能直接测量的物理量，我们必须通过一些直接测量的数值，按一定的公式去计算得到．由于各直接测定的数值都含有误差，因此，由计算得到的间接量中也必然含有误差，这就是所谓误差的传递．

设有函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中：y 为间接测量值；x_i 为直接测量值．若以 Δx_1，$\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n$ 分别表示测量 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 时的误差，则由泰勒级数展开，得函数的最大绝对误差为

$$\Delta y=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n. \tag{1-21}$$

其相对误差为

$$\delta=\frac{\Delta y}{y}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{y}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\Delta x_2}{y}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\Delta x_n}{y}. \tag{1-22}$$

式中$\frac{\partial f}{\partial x_i}$称为误差传递系数．某些函数的误差传递公式如表 1.1 所示．

表 1.1 某些函数的误差传递公式

函数式	误差传递公式	
	最大绝对误差 Δy	最大相对误差 δ_r
$y=x_1+x_2+x_3$	$\pm(\lvert\Delta x_1\rvert+\lvert\Delta x_2\rvert+\lvert\Delta x_3\rvert)$	$\Delta y/y$
$y=x_1+x_2$	$\pm(\lvert\Delta x_1\rvert+\lvert\Delta x_2\rvert)$	$\Delta y/y$
$y=x_1x_2$	$\pm(\lvert x_1\Delta x_2\rvert+\lvert x_2\Delta x_1\rvert)$	$\pm\left(\left\lvert\frac{\Delta x_1}{x_1}+\frac{\Delta x_2}{x_2}\right\rvert\right)$
$y=x_1x_2x_3$	$\pm(\lvert x_1x_2\Delta x_3\rvert+\lvert x_1x_3\Delta x_2\rvert+\lvert x_2x_3\Delta x_1\rvert)$	$\pm\left(\left\lvert\frac{\Delta x_1}{x_1}+\frac{\Delta x_2}{x_2}+\frac{\Delta x_3}{x_3}\right\rvert\right)$
$y=x^n$	$\pm(nx^{n-1}\Delta x)$	$\pm\left(n\left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert\right)$
$y=\sqrt[n]{x}$	$\pm\left(\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\Delta x\right)$	$\pm\left(\frac{1}{n}\left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert\right)$