理工社®

[2015 · 张宇考研数学系列丛书]

张宇

考研数学题源探析
经典1000题

（数学三）

CLASSIC

1000
EXERCISES
ON MATHS
□ Mr. Zhang

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

理工社®

张宇

考研数学题源探析经典1000题

（数学三）

CLASSIC

张宇 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

张宇考研数学题源探析经典1000题. 数学三／张宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2014. 4

ISBN 978-7-5640-9131-6

Ⅰ. ①张…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ. ①013－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第081658号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市文阁印刷有限公司
开　　本／787毫米×1092毫米　1/16
印　　张／24
字　　数／570千字
版　　次／2014年5月第1版　2014年5月第1次印刷
定　　价／45. 00元

责任编辑／张慧峰
文案编辑／张慧峰
责任校对／周瑞红
责任印制／边心超

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

巩固所学　见多识广

——与读者谈谈做数学题的学问

本书是一本考研数学习题集.看完教材,学完知识,就要做题.做题有学问吗?请读者认真阅读这个前言,尤其是下面的“五”.

一、题海战术?

曾经有文化媒体的记者问我:你是否同意“题海战术”?我对此问题感到两难.其一,如果我说同意,便会遭到批判——现在都讲素质教育,你怎么还让学生陷于题海之中?只会做题,搞得呆头呆脑;其二,如果我说不同意,那便违背了我的真实想法——不做题,怎么能够把书本上的数学知识内化为自己的本领?面对两难,如何作答?

我与读者讲,当你和别人针锋相对时,不要与其争辩甚至争吵,争来争去,最终谁也说服不了谁.怎么办?提高自己回答问题的“档次”,将他尖锐的问题化解掉——于是,我当时回答:你这个问题本身就有问题,莫说让考研的学生做几个月的数学题,就是让他们做整整一年的数学题,也不能叫题“海”,最多就是个题“河”,其实基本上就是个题“沟”,所以,实事求是地说,我们应该叫“题沟战术”,记者朋友听后大笑.这个回答,既能够低调处理问题,避免争论,也能够道出我的观点:几百道、上千道题目,算不上题海.事实上,我们不用形成题目的汪洋大海,只需**有针对性地、高质量地填满一个题目的小水沟**,就足以应对考研数学了.

这本《张宇考研数学题源探析经典1000题》就是为了实现上面这个切合实际的目标而编写的.

二、考研数学好题的标准

本书命制或者挑选的题目坚持的标准是“好题”.什么是考研数学的好题?我以为要具备以下三点:

(1)**经典性**　所谓经典性是指试题能够恰当、精准地考查考研数学的重要知识点和基本思想方法;

(2)**针对性**　所谓针对性是指试题能够与考研无缝接轨,与考研出题的风格、特点和难度达到高度一致;

(3)**预测性**　所谓预测性是指试题能够对即将到来的考研有预测性.我们承认做题的目的是为了巩固和加强对知识点的认识和理解、学会解题,但同时,如果能够起到预测未来方向的作用,则会锦上添花.

三、考研数学题源探析

根据以上三点，本书精心命制和整合了大约1000道考研数学复习的题目，其主要来源是：

(1)**与考研数学命题密切相关的重要资料**.这里包括考研数学命题前的全国征题、部分考研命题的备考题(所谓考研数学B卷考题)、命题人退下来以后命制的题目、某些全国大学数学教学基地的考试题库等，**这些题一般会是综合了多个知识点的题，有一定的难度和区分度.**

(2)**前苏联、全国、各省市大学生数学竞赛试题的改编题**.对经典的大学数学竞赛题如何进行改编，使其适合考研的风格和特点，这既是对未来考题的预测(因为这些竞赛题中有很多题目是"潜在的考试题")，也是本书的一大特色.**试题改编是颇费一番周折的，本书中一些重要题目后的"注"，看似题外之话、弦外之音，但是字斟句酌、涵义深刻，请读者仔细品味，必会有所收获.当然，基于竞赛基础，这些题一般也会是综合题，难度高、区分度大.**

(3)**作者在一线教学中编写和积累的经典题目**.这里，有些题目考查的是非常重要的基础知识，有些题目考查的是学生易错的、易混淆的知识，还有些题目，本应是在课堂上讲授给学生的，但是无奈于课堂时间有限，很多精彩的好题没有机会在课上详细解释，也将此选编到本书中，供学生课后巩固所学、增长见识之用.同时也给没有上我的课程的读者提供一个有价值的习题资料.**这里的题目除了有一定难度的综合题外，还有些简单题，难度不高，但对学生的区分是明显的.**

四、本书的重大改动说明

本书各位作者曾经分别参与考研数学命题与阅卷、考研数学大纲的编写与修订、高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》的编写、高等教育出版社《考研数学历年真题解析》的编写和审定、部分重点高校(如清华大学、中国人民大学、北京理工大学、浙江大学等)相关教材的编写和审定等，这些工作对于本书的形成具有重要意义.

本书最初的版本中，收录了1987年到1999年的考研真题，这部分内容现在已经放到《张宇考研数学真题大全解》那本书里去了，这样更加合理.于是，读者看到的这本书，事实上是做了**重大改动**的：删去的真题原本占了书中题目的大部分篇幅，**现在补充进来的题目占到全部题目的70%左右，可以说把作者"压箱底的宝贝"基本都拿出来了.**

在北京理工大学出版社的大力支持下，作者将这本书奉献给读者，供考研究生的读者和有志于提高大学数学学习水平的读者们参考.

五、本书使用说明

首先，我非常希望读者懂得做习题集的科学的态度.做习题集有两个目的：一是巩固所学，二是见多识广.所谓巩固所学，读者很容易明白，就是在已经读教材、读例题后，通过演算同例题类似的习题这种重复性劳动，加强对所学知识的认识，加深对所用方法的理解.但是，所谓见多识广，有些读者好像不会正确应对.数学题的形式，浩瀚无垠，千变万化，即使在一定的范围内(当然我们这里就是指的在考研大纲的范围内)，想要做到无所不能，也绝非易事.所以，适当地

演算一些从未见过的难题、新题，不仅可以查漏补缺，更能够增长见识，提高解题能力和数学素养，这是做习题集的重要目的. 听者有心，这本习题集中的题目，希望读者不管一开始会与不会，都要好好努力去做，然后结合答案搞清搞透，最终达到巩固所学、见多识广的目的.

接下来，有一个技术问题需要告诉读者. 作为一本习题集，可以采用**“知识分类、先易后难”的原则**来进行题目安排，大部分习题集也确实是这样安排的. 所谓知识分类，是指把考查同一知识点的题目集中在一起，比如从第 1 题到第 10 题，考查知识点甲，从第 10 题到第 20 题，考查知识点乙，以此类推. 所谓先易后难，是指按照从简单到复杂、从考查单一知识到考查综合能力的顺序来安排题目，比如考查知识点甲的第 1 题到第 10 题，一般是第 1 题最好做，越往后越难，到了第 10 题，难度最大. 听起来，这个原则很科学.

然而，本书不采用上述原则. 为什么？第一，“知识分类”会使得这部分题目对读者有明显的提示——你既然知道这一部分都是考知识点甲的，那便很容易找到问题的突破口，题目的难度会大大降低——试想，考研数学的试卷上会告诉你这个题目是考查知识点甲的吗？第二，“先易后难”好像符合人们思考、训练的习惯，但是，这也恰恰不符合考研数学命题的题目安排顺序——考研数学试卷上有两个变化无常：一是高等数学、线性代数、概率论与数理统计放在一张卷子上考，二是题目难度顺序有时难，有时易，难度可以说是“波浪式”的——所以，习题集如果按照“先易后难”的传统习惯，显然与考研数学命题与应考的实际背道而驰.

综上所述，从考研实战的角度出发，为了使考生能够在平时的训练中就逐渐适应考研数学试卷的风格，作者依据**“知识相对混编、难易变化无常”的原则**来进行题目安排：第一，出几个考知识点甲的题目，突然就换到几个考知识点乙、知识点丙的题目，然后还可能再跳回考知识点甲的题目，不出现明显的提示；第二，也许最开始的题目就很难，中间有简单题，再往后做题又会碰到难题，难度“此起彼伏”. 作者用心良苦，希望考生保持实战演练的状态，这样才能更好地使用好本书，发挥它的最大作用.

对于习题集的使用，我建议读者：把题目的演算过程写到草稿纸上去，把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去，总之，不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了，当你下次再做这个题目时，在没有任何提示的情况下，你能保证自己一定会做吗？“干干净净”的习题集，事实上是对读者提出了高标准、严要求，希望读者把习题全部做完一遍后，第二遍就能够查漏补缺、扫清死角.

感谢从命题组中退下来的老专家们，他们功底深厚、德高望重，给予了作者诸多帮助，为本书增色不少. 感谢家人们，他们中的大多数并不懂书中的内容，可是他们懂得它对我和学生的意义.

张宇

2014 年 5 月 于北京

Contents 目录

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇

微 积 分

第 1 章　函数、极限与连续

一、选择题(在目前的考研中,选择题是 4 分 / 题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

1.1. 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_2(x)=f_1[f_1(x)]$, $f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]$, $k=1,2,\cdots$, 则当 $n>1$ 时, $f_n(x)=$ (　　)

(A) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+x^2}}$　(B) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+nx^2}}$　(C) $\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$　(D) $\dfrac{x}{\sqrt{n+x^2}}$

1.2. 设 $f(x)$ 是偶函数, $\varphi(x)$ 是奇函数,则下列函数(假设都有意义)中,是奇函数的是 (　　)

(A) $f(\varphi(x))$　(B) $f(f(x))$　(C) $\varphi(f(x))$　(D) $\varphi(\varphi(x))$

1.3. 设 $f(x)=\sin(\cos x)$, $\varphi(x)=\cos(\sin x)$, 则在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内 (　　)

(A) $f(x)$ 是增函数, $\varphi(x)$ 是减函数　(B) $f(x)$, $\varphi(x)$ 都是减函数

(C) $f(x)$ 是减函数, $\varphi(x)$ 是增函数　(D) $f(x)$, $\varphi(x)$ 都是增函数

1.4. 设在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)>0$, 且当 k 为大于 0 的常数时有 $f(x+k)=\dfrac{1}{f(x)}$, 则在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)$ 是 (　　)

(A) 奇函数　(B) 偶函数　(C) 周期函数　(D) 单调函数

1.5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0, \\ x^2+x, & x>0 \end{cases}$ 则 $f(-x)$ 等于 (　　)

(A) $f(-x)=\begin{cases} -x^2, & x\leqslant 0, \\ -(x^2+x), & x>0 \end{cases}$　(B) $f(-x)=\begin{cases} -(x^2+x), & x<0, \\ -x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0, \\ x^2-x, & x>0 \end{cases}$　(D) $f(-x)=\begin{cases} x^2-x, & x<0, \\ x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$

1.6. 设 $f(x)=u(x)+v(x)$, $g(x)=u(x)-v(x)$, 并设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$ 都不存在,下列论断正确的是 (　　)

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在　(B) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在　(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

1.7. 两个无穷小比较的结果是 (　　)

(A) 同阶　(B) 高阶　(C) 低阶　(D) 不确定

1.8. 函数 $f(x)=x\sin x$ (　　)

(A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界　(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

(C) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大　(D) $x\to\infty$ 时极限存在

1.9. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的三阶无穷小，则 a,b 分别为 （　　）

(A) $1,0$　　(B) $\dfrac{1}{2},0$　　(C) $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}$　　(D) 以上都不对

1.10. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=A\neq 0$ 的充要条件是 （　　）

(A) $\alpha>1$　　(B) $\alpha\neq 1$　　(C) $\alpha>0$　　(D) 与 α 无关

1.11. 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大，则下述结论正确的是 （　　）

(A) 设当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必是无穷小

(B) 设当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 不是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必不是无穷小

(C) 设在 $x=x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 无界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必是无穷大

(D) 设在 $x=x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 有界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必不是无穷大

1.12. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，则在点 x_0 处必定间断的函数为 （　　）

(A) $f(x)\sin x$　　(B) $f(x)+\sin x$　　(C) $f^2(x)$　　(D) $|f(x)|$

1.13. 设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x),\beta(x)$ 都是无穷小（$\beta(x)\neq 0$），则当 $x\to x_0$ 时，下列表达式中不一定为无穷小的是 （　　）

(A) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}$　　(B) $\alpha^2(x)+\beta^3(x)\cdot\cos\dfrac{1}{x}$

(C) $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta^2(x)]$　　(D) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$

1.14. 设当 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为 （　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

1.15. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则 （　　）

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$　　(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

1.16. 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=ax^3+bx$ 与 $g(x)=\int_0^{\sin x}(e^{x^2}-1)dx$ 等价，则 （　　）

(A) $a=\dfrac{1}{3},b=1$　　(B) $a=3,b=0$　　(C) $a=\dfrac{1}{3},b=0$　　(D) $a=1,b=0$

1.17. 设当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2x)$ 是 x 的 n 阶无穷小，则正整数 n 等于 （　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

1.18. 若 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\lambda-e^{-kx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则 （　　）

(A) $\lambda<0,k<0$　　(B) $\lambda<0,k>0$

(C) $\lambda\geqslant 0,k<0$　　(D) $\lambda\leqslant 0,k>0$

1.19. 设 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则 （　　）

(A) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

1.20. 设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有 ( )

(A)1 个可去间断点，1 个跳跃间断点　　(B)1 个跳跃间断点，1 个无穷间断点

(C)2 个可去间断点　　(D)2 个无穷间断点

1.21. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$，则下列结论中错误的是 ( )

(A)$x=-1,x=0,x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点

(B)$x=-1$ 为无穷间断点

(C)$x=0$ 为可去间断点

(D)$x=1$ 为第一类间断点

1.22. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内间断点的类型只能是 ( )

(A) 第一类间断点　　(B) 第二类间断点

(C) 既有第一类间断点也有第二类间断点　　(D) 结论不确定

二、填空题(在目前的考研中，填空题是 4 分 / 题，请将答案填在题中的横线上.)

1.23. 设 $f(x)$ 是奇函数，且对一切 x 有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$，又 $f(1)=a$，a 为常数，n 为整数，则 $f(n)=$ ________.

1.24. 对充分大的一切 x，给出以下 5 个函数：100^x，$\log_{10}x^{100}$，e^{10x}，$x^{10^{10}}$，$e^{\frac{1}{100}x^2}$，则其中最大的是________.

1.25. $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=$ ________.

1.26. $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=$ ________.

1.27. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________.

1.28. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ ________.

1.29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{(e^{x^2}-1)\ln(1-x)}=$ ________.

1.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=$ ________.

1.31. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$ ________.

1.32. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^{\alpha}}=\beta>0$，则 α,β 的值为________.

1.33. 若当 $x\to0$ 时，有 $\ln\dfrac{1-ax^2}{1+ax^2}\sim\dfrac{1}{10\,000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)$，则 $a=$ ________.

1.34. 当 $x\to0$ 时，若有 $\ln\left(\cos\dfrac{2x}{3}\right)\sim Ax^k$，则 $A=$ ________，$k=$ ________.

1.35. 当 $x\to-1$ 时，无穷小 $\sqrt[3]{x}+1\sim A(x+1)^k$，则 $A=$ ________，$k=$ ________.

1.36. 当 $x\to\pi$ 时，若有 $\sqrt[4]{\sin\dfrac{x}{2}}-1\sim A(x-\pi)^k$，则 $A=$ ________，$k=$ ________.

1.37. 若 $f(x)=\begin{cases}e^x(\sin x+\cos x), & x>0,\\ 2x+a, & x\leqslant0\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，则 $a=$ ________.

1.38. 已知数列 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=$ ________.

三、解答题（在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均10分／题.）

1.39. 设 $f(x)=\begin{cases}1, e^{-1}<x<1,\\ x, 1\leqslant x<e,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$.

1.40. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2e^x-1, & x\leqslant 0,\\ x^2-1, & x>0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

1.41.（Ⅰ）求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}}$ 的表达式，$x\geqslant 0$.

（Ⅱ）讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

1.42. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

1.43. 求下列极限.

1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\tan x}$；

2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)}{\ln(1+x^4)}$；

4）$\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；

5）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$；

6）$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right)^n\left(a\neq\dfrac{1}{2}\right)$；

7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$；

8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\sin^2 x}$；

9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$；

10）$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$；

11）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$；

12）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$；

13）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$；

14）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；

15）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$；

16）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq 0)$；

17）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$；

18）$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}$；

19）$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\tan x}$；

20）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{(\sqrt[3]{1+x^3}-1)\sin x}$；

21）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$；

22）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$；

23）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$；

24）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；

25）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$；

26）$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；

27）$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$；

28）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$；

29）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$.

1.44. 设 $f(x)=x^2+ax+b$,证明:$|f(1)|,|f(3)|,|f(5)|$ 中至少有一个不小于 2.

1.45. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})$.

1.46. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

1.47. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

1.48. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

1.49. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

1.50. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

1.51. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}$.

1.52. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1.53. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}})$.

1.54. 求极限

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,$a_i>0$,且 $a_i\neq1$,$i=1,2,\cdots,n$,$n\geqslant2$.

1.55. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

1.56. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$.

1.57. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A\ (a>0,a\neq1)$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

1.58. 已知 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在,且 $f(x)=\dfrac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}+2x^2e^{x-1}\lim\limits_{x\to1}f(x)$,求 $f(x)$.

1.59. 设 $f(x)$ 是三次多项式,且有 $\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1\ (a\neq0)$,求 $\lim\limits_{x\to3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

1.60. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,求 a,b 的值.

1.61. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=10$,试求 α,β 的值.

1.62. 确定常数 a 和 b 的值,使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$.

1.63. 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$,证明:存在常数 A,B,使得当 $x\to0^+$ 时,恒有 $f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$,并求常数 A,B.

1.64. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

1.65. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(A+Bx+Cx^2)}{x^3}=D\neq0$. 求常数 A,B,C,D.

1.66. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

1.67. 数列$\{x_n\}$通项$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.68. 设$a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在并求其极限值.

1.69. 设$x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.70. 如果数列$\{x_n\}$收敛，$\{y_n\}$发散，那么$\{x_ny_n\}$是否一定发散？如果$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都发散，那么$\{x_ny_n\}$的敛散性又将如何？

1.71. 分段函数一定不是初等函数，若正确，试证之；若不正确，试说明它们之间的关系？

1.72. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

1.73. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right]$.

1.74. 利用夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{k}{n}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\cdots-\dfrac{1}{n+k}\right)=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

1.75. 设$f(x)$在$x=0$处二阶导数连续，且

$$\lim_{x\to0}\left(1+x+x^2+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3,$$

试求$f(0), f'(0), f''(0)$以及极限$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1.76. 计算$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{i+j}}{i+j}$.

1.77. 设$a>0, x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right), n=1,2,\cdots$，试求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.78. 试讨论函数$g(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ e^x+\beta, & x\leqslant0\end{cases}$在点$x=0$处的连续性.

1.79. 求函数$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, x\leqslant0,\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, x>0\end{cases}$的间断点，并判断它们的类型.

1.80. 求函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$的间断点并指出其类型.

1.81. 已知$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$是连续函数，求$a,b$的值.

1.82. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2+e^{nx}}$，求$f(x)$的间断点并判定其类型.

1.83. 设函数$f(x)$连续可导，且$f(0)=0, F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

1.84. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+(x^2-1)\sin ax}{x^n+x^2-1}$，为了使 $f(x)$ 对一切 x 都连续，求常数 a 的最小正值.

1.85. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0\\ \ln(1+x), & -1<x<0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的类型，如是可去间断点，则补充或改变定义使它连续.

1.86. 求 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{1-x}}}$ 的连续区间、间断点并判别其类型.

1.87. 设 $f(x,t)=\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$ $((x-1)(t-1)>0, x\neq t)$，函数 $f(x)$ 由下列表达式确定，

$$f(x)=\lim_{t\to x}f(x,t),$$

求出 $f(x)$ 的连续区间和间断点，并研究 $f(x)$ 在间断点处的左右极限.

1.88. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，是 $[a,b]$ 上一个点列，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{f(x_k)}}$.

1.89. 设函数 $f(x)$ 在 $0<x\leqslant 1$ 时 $f(x)=x^{\sin x}$，其他的 x 满足关系式 $f(x)+k=2f(x+1)$，试求常数 k 使极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

1.90. 设 $f(x)$ 对一切 x_1,x_2 满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，证明：函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

答案与解析

一、选择题

1.1. (C) 【解析】$f_2(x)=f_1[f_1(x)]=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，

设
$$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\ (k\geqslant 1),$$

则

$$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

因此对任意 $n\geqslant 1$，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，故选(C).

1.2. (D) 【解析】令 $g(x)=\varphi(\varphi(x))$，注意 $\varphi(x)$ 是奇函数，有

$$g(-x)=\varphi(\varphi(-x))=\varphi(-\varphi(x))=-\varphi(\varphi(x))=-g(x).$$

【注】复合函数的奇偶性：若 $f(x)$ 是偶函数，$\varphi(x)$ 是奇函数，则在 4 个复合函数 $f(\varphi(x))$，$f(f(x))$，$\varphi(f(x))$，$\varphi(\varphi(x))$ 中，只有 $\varphi(\varphi(x))$ 是奇函数，其余均为偶函数.