铁道工程專業試用教材

微积分

下册

长沙鐵道學院

一九七六年五月

目　录

第五章　不定积分

第六章　定积分

第七章　定积分的应用

第八章 无穷级数

第九章 微分方程

附　录

第五章 不定积分

前面导数与微分及导数的应用两章（除§3.17外）总称一元函数的微分学。从本章开始至第七章要讲一元函数的积分学。在微分学中有导数与微分两个基本概念，相应地在积分学中也有两个基本概念，即不定积分和定积分。

在微分学中，通过考察速度、斜率等问题概括出变化率即导数的概念；为了简化小段路程和微小面积等的计算，一般地说为了简化微小增量的计算，取近似值而产生微分概念。在积分学中所研究的是相反的问题：已知速度求运动的规律（路程与时间的函数关系），已知斜率求曲线方程，一般地已知函数的变化率求该函数本身，由此产生原函数与不定积分的概念；由小段路程或微小面积的近似值，通过无穷积累的过程，求得各小段路程或微小面积所合成的总路程或总面积的准确值，诸如此类的问题都导致求形式相同的和的极限，从而概括出定积分概念。

本章专论不定积分，内容包括不定积分的概念、性质和计算方法。

§5.1 原函数与不定积分的概念

我们知道，已知作直线运动的质点的运动规律 $s=s(t)$，用微分法即可求得运动速度 $v(t)=\dfrac{ds}{dt}$。但在力学里也常遇到相反的问题：即已知运动速度 $v(t)$，要求运动规律 $s=s(t)$。从数学上来看，即已知函数 $v(t)$，要求出这样一个函数 $s=s(t)$，

其导数等于$v(t)$：$\frac{ds}{dt}=v(t)$。这个问题在自然科学与工程技术的领域中大量遇到，具有普遍意义，因此值得把它的一般形式提出来，引进一些必要的术语，并且寻求解决这个问题的一些方法。

定义一　若在某区间，函数$F(x)$的导数是函数$f(x)$，或$F(x)$的微分是$f(x)dx$，即

$$F'(x)=f(x) \quad \text{或} \quad dF(x)=f(x)dx,$$

则称$F(x)$是$f(x)$在这个区间的原函数。

例如，因为当$x>0$时

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x+1)=\frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x-4)=\frac{1}{x},$$

所以$\ln x$，$\ln x+1$，$\ln x-4$都是$\frac{1}{x}$在区间（0，$+\infty$）的原函数。

本例表明，$\frac{1}{x}$的原函数不止一个，$\ln x$与任一常数之和都是它的原函数。一般说来，有下面的定理。

定理　若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(x)+C$也是$f(x)$的原函数，其中C为任意常数；而且$f(x)$的每一个原函数都可表为$F(x)+C$的形式。

证明　若$F(x)$是$f(x)$的原函数，即若$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$，

则因常数C的导数等于零也有

$$\frac{d}{dx}[F(x)+C]=\frac{d}{dx}F(x)+\frac{d}{dx}C$$

$$=f(x)+0=f(x),$$

即 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数。

现在设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任何一个原函数。则有

$\frac{d}{dx}\Phi(x)=f(x)$。又因 $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$，所以

$$\frac{d}{dx}[\Phi(x)-F(x)]=\frac{d}{dx}\Phi(x)-\frac{d}{dx}F(x)$$

$$=f(x)-f(x)=0。$$

按第四章§4.1中推论，其导数恒等于零的函数是一个常数，故$\Phi(x)-F(x)$是一个常数，记此常数为C，则

$$\Phi(x)-F(x)=C,$$

或 $$\Phi(x)=F(x)+C。$$ 证毕。

定理指出，若函数$f(x)$有一个原函数$F(x)$，则它就有无穷多个原函数，并且全部原函数都包含在$F(x)+C$中，即$F(x)+C$是$f(x)$的原函数的一般形式。

定义二 **若函数$F(x)$是函数$f(x)$的一个原函数，即若$F'(x)=f(x)$，则原函数的一般形式$F(x)+C$叫做函数$f(x)$的不定积分，**记作$\int f(x)dx$，即

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

其中$f(x)$叫做**被积函数**，$f(x)dx$叫做**被积表达式**，x叫做**积分变量**，C为任意常数，叫做**积分常数**。

例 1　求证 $\int 3x^2dx = x^3 + C$。

证　因为 $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$，所以

$$\int 3x^2dx = x^3 + C。$$

求原函数或不定积分的方法叫做**积分法**，它是微分法的逆运算，“求某函数的不定积分”又叫“积分这个函数”。在演题时，要想知道积分结果是否正确，可用微分法验证之，如例 1 所示。

不定积分的几何意义　$f(x)$的任何一个原函数 $F(x)$ 的图形叫做函数 $f(x)$的**积分曲线**，它的方程是 $y=F(x)$。把积分曲线 $y=F(x)$沿 y 轴的方向向上或向下平移一个单位距离，我们又得到另一条积分曲线 $y=F(x)+1$ 或 $y=F(x)-1$，因为 $F(x)+1$ 或 $F(x)-1$ 也是 $f(x)$ 的原函数。显见，任何一条积分曲线可由积分曲线 $y=F(x)$沿 y 轴的方向向上或向下平移若干个单位距离而得到，而它的方程可由方程 $y=F(x)+C$ 中使 C取得适当的数值而得到（如取$C=-1$，即得 $y=F(x)-1$）。因此，方程 $y=F(x)+C$ 表示全部积分曲线，也就是说，**不定积分$\int f(x)dx$的图形是函数$f(x)$的全部积分曲线所组成的曲线族，这就是不定积分的几何意义**。因不论常数C 取什么值，都有$\frac{d}{dx}[F(x)+C]=f(x)$，这表示各积分曲线在横标 x 相同的点处的切线具有相同的斜率，所以如果在每一条积分曲线上横标相同的点处作切线，则这些切线是互相平行的（图5.1）。

在求原函数的具体问题中，往往要从全部原函数中确定一个具有已知性质的原函数。这时应该利用这原函数所特别具有的性质来确定积分常数 C，从而确定所要求的原函数。

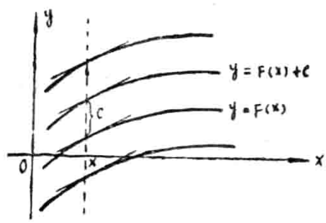

图 5.1

例 2 已知曲线在任意点的切线斜率为 $2x$，且通过点（2，5），求曲线的方程。

解 根据第一个条件，

$$\frac{dy}{dx}=2x。$$

因
$$\frac{d}{dx}(x^2+C)=2x,$$

我们得到全部积分曲线

$$y=x^2+C。\tag{1}$$

据第二条件，所求曲线是曲线族（1）中通过点（2，5）的那条曲线，点（2，5）应满足所求曲线的方程，以 $x=2$，$y=5$ 代入(1)得

$$5=2^2+C,$$

由此得
$$C=1。$$

故所求曲线的方程为

$$y=x^2+1。$$

例 3 已知在直线上运动的质点在任意时刻 t 的速度为 $v=2t$。若又知当 $t=0$ 时，距离 $s=3$，求此质点的运动规律。

解 因$\frac{ds}{dt}=v=2t$，所以

$$s=\int 2tdt=t^2+C。$$

当 $t=0$ 时 $s=3$，故$C=3$ 而得所求运动规律为

$$s=t^2+3。$$

§5.2 不定积分的性质

一 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$ 或 $d\int f(x)dx=f(x)dx$;

$$\int f'(x)dx=f(x)+C \text{ 或 } \int df(x)=f(x)+C。$$

这就是说：先积分后微分，则两者的作用互相抵消；而若先微分后积分，则抵消后要添加一个常数项。

证 设$F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，即

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)。$$

于是

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}[F(x)+C]=\frac{d}{dx}F(x)+\frac{d}{dx}C$$

$$=f(x)+0=f(x)。$$

由微分的定义及上式得

$$d\int f(x)dx=\left(\frac{d}{dx}\int f(x)dx\right)dx$$

$$=f(x)dx。$$

由定义二即知

$$\int f'(x)dx=f(x)+C,$$

因为右边函数的导数正是左边的被积函数。

由$df(x)=f'(x)dx$及上式得

$$\int df(x)=\int f'(x)dx=f(x)+C。$$ 证毕。

性质一中各式，较常用的是$\int df(x)=f(x)+C$，如$\int d\sin x=\sin x+C$，$\int d\cos x=\cos x+C$ 等等。

二　有限个函数的代数和的积分等于各函数的积分的代数和。

例如，$\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$。

证　按微分法则 $d(u\pm v)=du\pm dv$ 及本节性质一，有

$$d\left(\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\right)=d\int f_1(x)dx\pm d\int f_2(x)dx$$

$$=f_1(x)dx\pm f_2(x)dx=[f_1(x)\pm f_2(x)]dx。$$

$$\therefore\quad \int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx$$

$$=\int d\left(\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\right)$$

$$=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\quad（性质一）。$$

右边没有象在性质一中那样添加常数C，因为我们认为它已包含在不定积分中。

三　不为零的常数因子可提到积分符号外：

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx\quad（a是不等于零的常数）。$$

证　按微分法则及性质一，有

$$d\left(a\int f(x)dx\right)=ad\left(\int f(x)dx\right)=af(x)dx。$$

$$\therefore \qquad \int a f(x) dx = \int d\left(a \int f(x) dx \right) = a \int f(x) dx。$$

§5.3 基 本 积 分 表

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$ 。

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$。

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$。

4. $\int e^u du = e^u + C$。

5. $\int \sin u du = -\cos u + C$。

6. $\int \cos u du = \sin u + C$。

7. $\int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u + C$。

8. $\int \csc^2 u du = -\operatorname{ctg} u + C$。

9. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$。

10. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$。

11. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$。

12. $\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$。

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C$。

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})+C$。

$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}|+C$。

15。 $\int \operatorname{sh} u du=\operatorname{ch} u+C$。

16. $\int \operatorname{ch} u du=\operatorname{sh} u+C$。

上列公式大部分可联系过去讲过的导数或微分公式记住，但有的公式比较难记，就不必勉强去记了，用时再查阅。

上列公式都可通过求右端的微分而得证。

公式1的证明：

由 $d\frac{u^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}du^{n+1}=\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)u^n du$

$=u^n du$ （§3.15）

即得 $\int u^n du=\int d\frac{u^{n+1}}{n+1}=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ （§5.2性质一）。

公式2的证明：

当$u>0$时，$d\ln u=\frac{du}{u}$。

$\therefore \quad \int\frac{du}{u}=\int d\ln u=\ln u+C$

$=\ln|u|+C$（当$u>0$时，$u=|u|$）。

当 $u<0$ 时[此时 $-u>0$，故考虑 $\ln(-u)$]，

$$d\ln(-u)=\frac{d(-u)}{-u}=\frac{-du}{-u}=\frac{du}{u}。$$

$$\therefore \qquad \int\frac{du}{u}=\int d\ln(-u)=\ln(-u)+C$$

$$=\ln|u|+C \qquad （当 u<0 时，|u|=-u）。$$

读者注意，公式 1 当 $n=-1$ 时无意义，因此时

$$\int u^{-1}du=\frac{u^{-1+1}}{-1+1}+C=\frac{u^0}{0}+C=\frac{1}{0}+C。$$

故公式 2 $\left(\int\frac{du}{u}=\int u^{-1}du\right)$ 恰可弥补公式 1 的缺陷。

其余各公式的证明相仿，就不赘述了。

例 1 $\int\left(x\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+5\right)dx$

$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx-\int 2x^{-\frac{1}{3}}dx+\int 5dx \qquad （§5.2，性质二）$$

$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx-2\int x^{-\frac{1}{3}}dx+5\int dx \qquad （§5.2，性质三）$$

$$=\left(\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C_1\right)-2\left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C_2\right)+5(x+C_3)$$

（公式 1）

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-3x^{\frac{2}{3}}+5x+C。$$

注意，这里 $C=C_1-2C_2+5C_3$，三个任意常数已经合写为一个任意常数了，以后遇到这种情况就不再说明。$\int dx=x+C$ 可看作是公式 1 当 $n=0$ 时的结果，也可看作是前节性质一中

$\int df(x) = f(x) + C$ 当 $f(x) = x$ 时的结果。

例 2 $\int \frac{(x+1)(x-2)^2}{\sqrt{x}} dx$

$$= \int \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}) dx$$

$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}} + C。 \qquad \text{（公式 1 ）}$$

注意 本例解法关键在于"积、商、乘方化和差。"

例 3 $\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(\frac{9}{2} - x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - x^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3} x + C。 \qquad \text{（公式13）}$$

例 4 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} dx$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C。 \qquad \text{（公式14）}$$

例 5 $\int b^x e^x dx = \int (be)^x dx = \frac{(be)^x}{\ln(be)} + C \qquad$ （公式 3 ）

$$= \frac{b^x e^x}{\ln b + 1} + C。$$

§5.4 换元积分法（第一换元法）

只用积分（不定积分常简称积分）的性质和基本积分表，我们所能解决的积分问题是很有限的，如$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}}$就是一个

明显的例子。即算对于可用积分的性质和基本积分表解决的积分，有时又会遇到不切实际的情况。如对于简单的积分$\int(2x+1)^2dx$还可利用公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

处理：

$$\int(2x+1)^2dx=\int(4x^2+4x+1)dx$$

$$=4\int x^2dx+4\int xdx+\int dx=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C。$$

但对于$\int(2x+1)^{100}dx$，如果仍仿上把被积函数展开，就一共有101项，这样麻烦的计算，显然是不切实际的。这就促使我们进一步研究积分法。遵照毛主席关于**“通过实践而发现真理”**的教导，我们就从形式还不算特别复杂的积分$\int(2x+1)^{100}dx$着手，尝试从中找出一般性的运算规律。

把积分$\int(2x+1)^{100}dx$与基本积分表中的积分$\int u^n du$对照，使我们想到作代换$u=2x+1$可能有助于解决问题，试一试看。

设$u=2x+1$，则$du=d(2x+1)=(2x+1)'dx=2dx$，

$$\frac{1}{2}du=dx。$$

于是

$$\int(2x+1)^{100}dx=\int u^{100}\cdot\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int u^{100}du$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101}u^{101}+C=\frac{1}{202}(2x+1)^{101}+C。$$

我们通过代换$u=2x+1$把$\int(2x+1)^{100}dx$变成$\frac{1}{2}\int u^{100}du$，