

— 铁道工程专业试用教材 —

微 积 分

下 册

长沙铁道学院

一九七六年五月

录

第五章 不定积分

§ 5.1 原函数与不定积分的概念	1
§ 5.2 不定积分的性质	6
§ 5.3 基本积分表	8
§ 5.4 换元积分法 (第一换元)	11
一 含有 $ax+b$ 的积分	13
二 形如 $\int f(u)u'dx$ 的积分	15
三 恒等变换选例	17
§ 5.5 第二换元法	24
§ 5.6 分部积分法	28
§ 5.7 积分表的用法	33
小 结	40
习 题 五	45

第六章 定 积 分

§ 6.1 定积分概念导引	65
一 曲边梯形的面积	65
二 变力所作的功	69
三 变速直线运动的路程	70
§ 6.2 定积分概念	72

一	定积分的定义	72
二	定积分的几何意义	74
三	定积分的存在定理	76
四	关于定积分概念的补充说明	76
§ 6.3	定积分计算的基本公式	77
§ 6.4	定积分的性质	80
§ 6.5	定积分的换元法则	81
§ 6.6	定积分的分部积分法则	84
§ 6.7	近似积分法	87
一	矩形法	87
二	梯形法	88
三	抛物线法	89
小 结		93
习 题 六		95

第七章 定积分的应用

§ 7.1	平面图形的面积	103
一	直角坐标系中的面积公式	103
二	极坐标系中的面积公式	107
§ 7.2	体积	109
一	平行截面面积为已知的立体的体积	109
二	旋转体的体积	111
§ 7.3	平面曲线的弧长	113
§ 7.4	定积分在物理、力学上的应用	118
一	功	119
二	液体压力	120
三	平面图形的静力矩及重心	121

四 平面图形的转动惯量	125
小结与微积分方法述要	129
习题七	131

第八章 无穷级数

§ 8.1 无穷级数概念 级数收敛的必要条件	142
一 无穷级数的定义	142
二 级数收敛与发散的定义	144
三 级数收敛的必要条件	147
§ 8.2 级数敛散性的判定法	150
一 比值判定法	150
二 莱布尼兹准则	152
§ 8.3 幂级数及其收敛域	153
§ 8.4 幂级数的运算	158
§ 8.5 台劳级数	160
§ 8.6 初等函数的展开式	162
§ 8.7 幂级数的应用	171
§ 8.8 龙拉公式	179
小 结	180
习题八	183

第九章 微分方程

§ 9.1 微分方程的基本概念	191
一 微分方程的实例	191
二 微分方程的基本概念	194
§ 9.2 一阶微分方程	196
一 可分离变量的方程	196

二	一阶线性方程	200
§ 9.3	三种特殊类型的二阶方程	207
一	$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ 型方程的解法	207
二	$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ 型方程的解法	209
三	$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 型方程的解法	211
四	应用举例	214
§ 9.4	二阶常系数线性方程	218
一	齐次方程的解法	218
二	非齐次方程的解法	226
§ 9.5	微分方程的级数解法	240
小 结		245
习 题 九		250

附 录

一	简明积分表	265
二	一些常用的曲线	274
三	希腊字母	278

第五章 不定积分

前面导数与微分及导数的应用两章（除 § 3.17 外）总称一元函数的微分学。从本章开始至第七章要讲一元函数的积分学。在微分学中有导数与微分两个基本概念，相应地在积分学中也有两个基本概念，即不定积分和定积分。

在微分学中，通过考察速度、斜率等问题概括出变化率即导数的概念；为了简化小段路程和微小面积等的计算，一般地说为了简化微小增量的计算，取近似值而产生微分概念。在积分学中所研究的是相反的问题：已知速度求运动的规律（路程与时间的函数关系），已知斜率求曲线方程，一般地已知函数的变化率求该函数本身，由此产生原函数与不定积分的概念；由小段路程或微小面积的近似值，通过无穷积累的过程，求得各小段路程或微小面积所合成的总路程或总面积的准确值，诸如此类的问题都导致求形式相同的和的极限，从而概括出定积分概念。

本章专论不定积分，内容包括不定积分的概念、性质和计算方法。

§ 5.1 原函数与不定积分的概念

我们知道，已知作直线运动的质点的运动规律 $s = s(t)$ ，用微分法即可求得运动速度 $v(t) = \frac{ds}{dt}$ 。但在力学里也常遇到相反的问题：即已知运动速度 $v(t)$ ，要求运动规律 $s = s(t)$ 。从数学上来看，即已知函数 $v(t)$ ，要求出这样一个函数 $s = s(t)$ ，

其导数等于 $v(t)$: $\frac{ds}{dt} = v(t)$ 。这个问题在自然科学与工程技术的领域中大量遇到, 具有普遍意义, 因此值得把它的一般形式提出来, 引进一些必要的术语, 并且寻求解决这个问题的一些方法。

定义一 若在某区间, 函数 $F(x)$ 的导数是函数 $f(x)$, 或 $F(x)$ 的微分是 $f(x)dx$, 即

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx,$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在这个区间的原函数。

例如, 因为当 $x > 0$ 时

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx} (\ln x + 1) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx} (\ln x - 4) = \frac{1}{x},$$

所以 $\ln x$, $\ln x + 1$, $\ln x - 4$ 都是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的原函数。

本例表明, $\frac{1}{x}$ 的原函数不止一个, $\ln x$ 与任一常数之和都是它的原函数。一般说来, 有下面的定理。

定理 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数, 其中 C 为任意常数; 而且 $f(x)$ 的每一个原函数都可表为 $F(x) + C$ 的形式。

证明 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 即若 $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$,

则因常数 C 的导数等于零也有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[F(x) + C] &= \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}C \\ &= f(x) + 0 = f(x),\end{aligned}$$

即 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数。

现在设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任何一个原函数。则有

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = f(x)。又因 \frac{d}{dx}F(x) = f(x)，所以$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\Phi(x) - F(x)] &= \frac{d}{dx}\Phi(x) - \frac{d}{dx}F(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0.\end{aligned}$$

按第四章 § 4.1 中推论，其导数恒等于零的函数是一个常数，故 $\Phi(x) - F(x)$ 是一个常数，记此常数为 C ，则

$$\Phi(x) - F(x) = C,$$

或

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

证毕。

定理指出，若函数 $f(x)$ 有一个原函数 $F(x)$ ，则它就有无穷多个原函数，并且全部原函数都包含在 $F(x) + C$ 中，即 $F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的原函数的一般形式。

定义二 若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，即若 $F'(x) = f(x)$ ，则原函数的一般形式 $F(x) + C$ 叫做函数 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)dx$ ，即

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数， $f(x)dx$ 叫做被积表达式， x 叫做积分变量， C 为任意常数，叫做积分常数。

例1 求证 $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ 。

证 因为 $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$ ，所以

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C。$$

求原函数或不定积分的方法叫做积分法，它是微分法的逆运算，“求某函数的不定积分”又叫“积分这个函数”。在演题时，要想知道积分结果是否正确，可用微分法验证之，如例1所示。

不定积分的几何意义 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$ 的图形叫做函数 $f(x)$ 的积分曲线，它的方程是 $y = F(x)$ 。把积分曲线 $y = F(x)$ 沿 y 轴的方向向上或向下平移一个单位距离，我们又得到另一条积分曲线 $y = F(x) + 1$ 或 $y = F(x) - 1$ ，因为 $F(x) + 1$ 或 $F(x) - 1$ 也是 $f(x)$ 的原函数。显见，任何一条积分曲线可由积分曲线 $y = F(x)$ 沿 y 轴的方向向上或向下平移若干个单位距离而得到，而它的方程可由方程 $y = F(x) + C$ 中使 C 取得适当的数值而得到（如取 $C = -1$ ，即得 $y = F(x) - 1$ ）。因此，方程 $y = F(x) + C$ 表示全部积分曲线，也就是说，不定积分 $\int f(x) dx$ 的图形是函数 $f(x)$ 的全部积分曲线所组成的曲线族，这就是不定积分的几何意义。因不论常数 C 取什么值，都有 $\frac{d}{dx} [F(x) + C] = f(x)$ ，这表示各积分曲线在横标 x 相同的点处的切线具有相同的斜率，所以如果在每一条积分曲线上横标相同的点处作切线，则这些切线是互相平行的（图5.1）。

在求原函数的具体问题中，往往要从全部原函数中确定一个具有已知性质的原函数。这时应该利用这原函数所特别具有的性质来确定积分常数 C ，从而确定所要求的原函数。

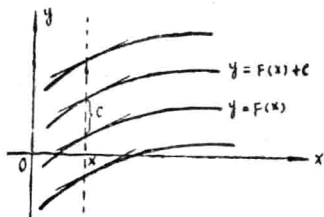


图 5.1

例 2 已知曲线在任意点的切线斜率为 $2x$ ，且通过点 $(2, 5)$ ，求曲线的方程。

解 根据第一个条件，

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

因
$$\frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x,$$

我们得到全部积分曲线

$$y = x^2 + C. \quad (1)$$

据第二条件，所求曲线是曲线族(1)中通过点 $(2, 5)$ 的那条曲线，点 $(2, 5)$ 应满足所求曲线的方程，以 $x = 2$ ， $y = 5$ 代入(1)得

$$5 = 2^2 + C,$$

由此得 $C = 1$ 。

故所求曲线的方程为

$$y = x^2 + 1.$$

例 3 已知在直线上运动的质点在任意时刻 t 的速度为 $v = 2t$ 。若又知当 $t = 0$ 时，距离 $s = 3$ ，求此质点的运动规律。

解 因 $\frac{ds}{dt} = v = 2t$, 所以

$$s = \int 2t dt = t^2 + C.$$

当 $t=0$ 时 $s=3$, 故 $C=3$ 而得所求运动规律为

$$s = t^2 + 3.$$

§ 5.2 不定积分的性质

$$- \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad \text{或} \quad d \int f(x) dx = f(x) dx;$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C \quad \text{或} \quad \int df(x) = f(x) + C.$$

这就是说: 先积分后微分, 则两者的作用互相抵消; 而若先微分后积分, 则抵消后要添加一个常数项。

证 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 即

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x).$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int f(x) dx &= \frac{d}{dx} [F(x) + C] = \frac{d}{dx} F(x) + \frac{d}{dx} C \\ &= f(x) + 0 = f(x). \end{aligned}$$

由微分的定义及上式得

$$\begin{aligned} d \int f(x) dx &= \left(\frac{d}{dx} \int f(x) dx \right) dx \\ &= f(x) dx. \end{aligned}$$

由定义二即知

$$\int f'(x) dx = f(x) + C,$$

因为右边函数的导数正是左边的被积函数。

由 $df(x) = f'(x)dx$ 及上式得

$$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C. \quad \text{证毕。}$$

性质一中各式，较常用的是 $\int df(x) = f(x) + C$ ，如 $\int d \sin x = \sin x + C$ ， $\int d \cos x = \cos x + C$ 等等。

二 有限个函数的代数和的积分等于各函数的积分的代数和。

$$\text{例如, } \int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

证 按微分法则 $d(u \pm v) = du \pm dv$ 及本节性质一，有

$$\begin{aligned} d\left(\int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx\right) &= d\int f_1(x) dx \pm d\int f_2(x) dx \\ &= f_1(x) dx \pm f_2(x) dx = [f_1(x) \pm f_2(x)] dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx &= \int d\left(\int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx\right) \\ &= \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \quad (\text{性质一}). \end{aligned}$$

右边没有象在性质一中那样添加常数 C ，因为我们认为它已包含在不定积分中。

三 不为零的常数因子可提到积分符号外：

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad (a \text{ 是不等于零的常数}).$$

证 按微分法则及性质一，有

$$d\left(a \int f(x) dx\right) = a d\left(\int f(x) dx\right) = a f(x) dx.$$

$$\therefore \int a f(x) dx = \int d\left(a \int f(x) dx \right) = a \int f(x) dx.$$

§ 5.3 基本积分表

$$1. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

$$4. \int e^u du = e^u + C.$$

$$5. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$7. \int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u + C.$$

$$8. \int \csc^2 u du = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$9. \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$$

$$10. \int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$$

$$11. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$12. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$14. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C.$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C.$$

$$15. \int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$$

$$16. \int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$$

上列公式大部分可联系过去讲过的导数或微分公式记住，但有的公式比较难记，就不必勉强去记了，用时再查阅。

上列公式都可通过求右端的微分而得证。

公式 1 的证明：

$$\begin{aligned} \text{由 } d \frac{u^{n+1}}{n+1} &= \frac{1}{n+1} du^{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)u^n du \\ &= u^n du \quad (\S 3.15) \end{aligned}$$

$$\text{即得 } \int u^n du = \int d \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (\S 5.2 \text{性质一}).$$

公式 2 的证明：

$$\text{当 } u > 0 \text{ 时, } d \ln u = \frac{du}{u}.$$

$$\therefore \int \frac{du}{u} = \int d \ln u = \ln u + C$$

$$= \ln |u| + C \quad (\text{当 } u > 0 \text{ 时, } u = |u|).$$

当 $u < 0$ 时 [此时 $-u > 0$, 故考虑 $\ln(-u)$],

$$d \ln(-u) = \frac{d(-u)}{-u} = \frac{-du}{-u} = \frac{du}{u}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{du}{u} &= \int d \ln(-u) = \ln(-u) + C \\ &= \ln|u| + C \quad (\text{当 } u < 0 \text{ 时, } |u| = -u). \end{aligned}$$

读者注意, 公式 1 当 $n = -1$ 时无意义, 因此时

$$\int u^{-1} du = \frac{u^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{u^0}{0} + C = \frac{1}{0} + C.$$

故公式 2 $\left(\int \frac{du}{u} = \int u^{-1} du \right)$ 恰可弥补公式 1 的缺陷。

其余各公式的证明相仿, 就不赘述了。

$$\begin{aligned} \text{例 1} \quad & \int \left(x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 5 \right) dx \\ &= \int x^{\frac{3}{2}} dx - \int 2x^{-\frac{1}{3}} dx + \int 5 dx \quad (\S 5.2, \text{性质二}) \\ &= \int x^{\frac{3}{2}} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + 5 \int dx \quad (\S 5.2, \text{性质三}) \\ &= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C_1 \right) - 2 \left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C_2 \right) + 5(x + C_3) \\ & \hspace{15em} (\text{公式 1}) \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 5x + C. \end{aligned}$$

注意, 这里 $C = C_1 - 2C_2 + 5C_3$, 三个任意常数已经合写为一个任意常数了, 以后遇到这种情况就不再说明。 $\int dx = x + C$ 可看作是公式 1 当 $n = 0$ 时的结果, 也可看作是前节性质一中

$\int df(x) = f(x) + C$ 当 $f(x) = x$ 时的结果。

$$\begin{aligned}
 \text{例 2} \quad & \int \frac{(x+1)(x-2)^2}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{3}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}) dx \\
 &= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5} x^{\frac{5}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}} + C. \quad (\text{公式 1})
 \end{aligned}$$

注意 本例解法关键在于“积、商、乘方化和差。”

$$\begin{aligned}
 \text{例 3} \quad & \int \frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(\frac{9}{2}-x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2-x^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3} x + C. \quad (\text{公式 13})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{例 4} \quad & \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} dx \\
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C. \quad (\text{公式 14})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{例 5} \quad & \int b^x e^x dx = \int (be)^x dx = \frac{(be)^x}{\ln(be)} + C \quad (\text{公式 3}) \\
 &= \frac{b^x e^x}{\ln b + 1} + C.
 \end{aligned}$$

§ 5.4 换元积分法 (第一换元法)

只用积分 (不定积分常简称积分) 的性质和基本积分表, 我们所能解决的积分问题是很有限制的, 如 $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\lg x}}$ 就是一个

明显的例子。即算对于可用积分的性质和基本积分表解决的积分，有时又会遇到不切实际的情况。如对于简单的积分

$\int (2x+1)^2 dx$ 还可利用公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

处理：

$$\begin{aligned}\int (2x+1)^2 dx &= \int (4x^2 + 4x + 1) dx \\ &= 4 \int x^2 dx + 4 \int x dx + \int dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.\end{aligned}$$

但对于 $\int (2x+1)^{100} dx$ ，如果仍仿上把被积函数展开，就一共有 101 项，这样麻烦的计算，显然是不切实际的。这就促使我们进一步研究积分法。遵照毛主席关于“通过实践而发现真理”的教导，我们就从形式还不算特别复杂的积分 $\int (2x+1)^{100} dx$ 着手，尝试从中找出一般性的运算规律。

把积分 $\int (2x+1)^{100} dx$ 与基本积分表中的积分 $\int u^n du$ 对照，使我们想到作代换 $u = 2x+1$ 可能有助于解决问题，试一试看。

设 $u = 2x+1$ ，则 $du = d(2x+1) = (2x+1)' dx = 2dx$ ，

$$\frac{1}{2} du = dx。$$

于是

$$\begin{aligned}\int (2x+1)^{100} dx &= \int u^{100} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{100} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{101} u^{101} + C = \frac{1}{202} (2x+1)^{101} + C.\end{aligned}$$

我们通过代换 $u = 2x+1$ 把 $\int (2x+1)^{100} dx$ 变成 $\frac{1}{2} \int u^{100} du$ ，