考研数学命题人土豪金系列丛书

2015

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精炼

考研数学命题人历年真题精析

（数学二）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编写组 主编

赠

1 本书每章习题答案与详解 + 2 篇北大、清华数学满分秘笈 + 2 套原命题组成员密押试卷 + 5 大考研命题人快速解题方法 + 8 小时命题人数学串讲精华

正版书凭激活码登录 www.buaapress.com.cn，获超多增值服务

卡号：2014006517037
密码：

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学 …… 列丛书

2015

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精炼

考研数学命题人历年真题精析

（数学二）

RFID

全国硕士研究生入学考试辅导用书编写组 主编

赠

1 本书每章习题答案与详解
+ 2 篇北大、清华数学满分秘笈
+ 2 套原命题组成员密押试卷
+ 5 大考研命题人快速解题方法
+ 8 小时命题人数学串讲精华

正版书凭激活码登录 www.buaapress.com.cn，获超多增值服务

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是作者在10多年收集、整理考研数学资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心研究和分析，并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的。

本书收录了1998—2014年考研数学三历年真题，并进行了详细的解析；精辟阐明解题思路，全面剖析考点、重点、疑点和难点。在每章后面还将1987—1997年的相关典型真题作为习题提供，以便考生进一步巩固相关知识。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的原命题组组长、命题研究专家，以及一线教师共同编写而成，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，进一步把握考试的特点及命题的思路，从而从容应考，轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

图书在版编目(CIP)数据

2015考研数学命题人历年真题解析. 数学三 / 全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会主编. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社，2014.4

ISBN 978-7-5124-1459-4

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第004799号

2015考研数学命题人历年真题精析(数学三)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会　编著

责任编辑　刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191)　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024　传真:(010)82328026

读者信箱: bhpress@263.net　邮购电话:(010)82316524

涿州市新华印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本:787×1 092　1/16　印张:27.5　字数:591千字

2014年4月第1版　2014年4月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-1459-4　定价:44.80元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题，请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

编 委 会

前　言

自 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，已有 28 载。这些历年考研试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，也是命题组专家智慧的结晶。而拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的历年数学真题，则是广大准备考研的同学的期盼。

本书严格按照最新的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求和精神编写，对历年考研真题逐题给出了详细解答，并尽量做到一题多解。只要认真分析研究，了解消化和掌握历年试题，便能发现数学试题总是有稳定的、普遍的、反复出现的共性，也可以发现命题的特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢，事半功倍。

本书包括两部分内容：

一部分是 1998—2014 年的完整真题。旨在让考生对历年考研真题有一个完整的印象，从总体上了解考研数学命题的基本形式和命题规律。

编者从历年真题和辅导班内部资料中，精选出重点考查且不易解决的题目。这些题目大多是研究生考试中的解答题，分值较高。编者分考点归纳习题，总结各类题型的解题思路和方法，并重点指出考生易错之处。

另一部分是试题精析。我们分章节、考点对题目归类。本部分不仅给出了详解，还在逐题解析历年考研数学试题的基础上，给每题作了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点，还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过例举具体题目，分析考生常犯的错误，使考生引以为戒；各考点前都配有知识点和复习方法的归纳总结。

本书的特点：

1. 内容全面　汇集了 1998 年以来的所有真题，以便考生对历年真题有大致的了解并可研究真题。

2. 题型丰富　本书按考点对历年真题分类，对每种题型都进行了归纳和总结，方便考生复习。

3. 解析详尽　首先给出本题相应考点，再分析解题思路，给出详解，并尽量给出多

种解法以供参考和比较。题目最后还附有评注,点出本题应注意之处。

基础复习阶段,考生可以利用第二部分内容,体会各知识点和题型的命题形式和特点。模拟演练阶段,考生应在考试规定的时间内,完成第一部分的真题,锻炼和提高解题速度及准确率。如此复习,既能加深和巩固知识点,又能提高自己的解题能力。

“宝剑锋从磨砺出,梅花香自苦寒来。”成功源于努力拼搏,源于自信。

我们深信,考生仔细研读本书后,必能上一个新台阶。最后祝愿各位考生都能圆名校之梦!

编者 于清华园

目　　录

第三篇　1998—2013 年考研数学三试题分类解析

2014 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、选择题:1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目的要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设 $\lim a_n = a$,且 $a \neq 0$,则当 n 充分大时有(　　).

(A)$|a_n| > \frac{|a|}{2}$　　(B)$|a_n| < \frac{|a|}{2}$

(C)$a_n > a - \frac{1}{n}$　　(D)$a_n < a + \frac{1}{n}$

(2)下列曲线有渐近线的是(　　).

(A)$y = x + \sin x$　　(B)$y = x^2 + \sin x$

(C)$y = x + \sin \frac{1}{x}$　　(D)$y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(3)设 $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$,当 $x \to 0$ 时,若 $P(x) = \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小,则下列选项中错误的是(　　).

(A)$a = 0$　　(B)$b = 1$　　(C)$c = 0$　　(D)$d = \frac{1}{6}$

(4)设函数 $f(x)$ 具有二阶导数,$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上(　　).

(A)当 $f'(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant g(x)$　　(B)当 $f'(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant g(x)$

(C)当 $f''(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant g(x)$　　(D)当 $f''(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant g(x)$

(5)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = $(　　).

(A)$(ad - bc)^2$　　(B)$-(ad - bc)^2$

(C)$a^2d^2 - b^2c^2$　　(D)$b^2c^2 - a^2d^2$

(6)设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k, l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的(　　).

(A)必要非充分　　(B)充分非必要

(C)充分必要　　(D)既非充分也非必要

(7)设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B) = 0.5$,$P(A - B) = 0.3$,则 $P(B - A) =$(　　).

（A）0.1　（B）0.2　（C）0.3　（D）0.4

（8）若 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为（　　）.

（A）$F(1,1)$　（B）$F(2,1)$　（C）$t(1)$　（D）$t(2)$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设某商品的需求函数为 $Q=40-2P$（P 为商品的价格），则该商品的边际收益为________.

（10）设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为________.

（11）设 $\int_0^a xe^{2x}dx=\dfrac{1}{4}$，则 $a=$ ________.

（12）二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1\left(\dfrac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx=$ ________.

（13）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围________.

（14）设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，X_1，$X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本，若 $E\left(c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)=\theta^2$，则 $c=$ ________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

（16）（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，计算

$\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$.

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有连续导数，且 $z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\cos y\dfrac{\partial z}{\partial x}-\sin y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x$. 若 $f(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调增加,$0\leqslant g(x)\leqslant 1$,证明:

(Ⅰ) $0\leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a, x\in[a,b]$;

(Ⅱ) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(21)(本题满分 11 分)

证明:n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$,在给定 $X=i$ 的条件下,随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(Ⅱ)求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X、Y 的概率分布相同,X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\frac{1}{3}$,$P\{X=1\}=\frac{2}{3}$,且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题答案与解析

一、选择题

1.【答案】 A

【考点提示】 极限的定义

【解析】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $a\neq 0$,

所以$\forall:\varepsilon>0$,$\exists$任意的整数 M,使得$\forall n>M$ 均有$|a_n-a|<\varepsilon$ 成立.

即$|a|-|a_n|\leqslant|a_n-a|<\varepsilon$. 令 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$,则可得$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$,正确答案为 A.

2.【答案】 C

【考点提示】 曲线的斜渐近线

【解析】 曲线的斜渐近线为 $y=ax+b$,其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$. 垂直和水平渐进线分别为 $x=c$ 和 $y=d$,其中 $c=\lim\limits_{y\to\infty}f(x)$,$d=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. 四个选项中,

(A)$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在,c 和 d 也不存在;

(B)和(D)$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$不存在,$c$ 和 d 也不存在;

(C)$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{x}\right)=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$,$c$ 和 d 也不存在.

综上,只有选项 C 有斜渐近线且为 $y=x$.

3.【答案】 D

【考点提示】 无穷小与函数的极限

【解析】 由题设知,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{P(x)-\tan x}{x^3}=0$.

由$\lim\limits_{x\to0}[P(x)-\tan x]=\lim\limits_{x\to0}x^3\cdot\dfrac{P(x)-\tan x}{x^3}=0$,可知 $a=0$;

又 $0=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{P(x)-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{bx+cx^2+\mathrm{d}x^3-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(b-\sec^2x)+2cx+3\mathrm{d}x^2}{3x^2}$,

因为$\lim\limits_{x\to0}\sec^2x=1$,从而 $b=1$.

则 $0=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{P(x)-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}+2cx+3\mathrm{d}x^2}{3x^2}$

$=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{3x^2\cos^2x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2cx+3\mathrm{d}x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2c+3\mathrm{d}x}{3x}.$

从而 $c=0$,且 $0=-\dfrac{1}{3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\mathrm{d}x}{3x}=-\dfrac{1}{3}+\mathrm{d}$,即 $d=-\dfrac{1}{3}$.

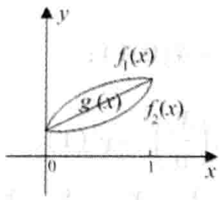
综上知,正确答案为 D.

4.【答案】 D

【考点提示】 导数几何意义的应用

【解析】 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 分别对应函数 $f(x)$ 所表示曲线的斜率和凸凹性;

$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x=[f(1)-f(0)]x+f(0)$,表示 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间内两个端点的连线. 据此考虑作如下图:



根据曲线形状可知,$f_1'(x)\geqslant0,f_2'(x)\geqslant0,f_1''(x)\leqslant0,f_2''(x)\geqslant0,f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$. 由此可判断,当 $f''(x)\geqslant0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$,正确答案为 D.

5.【答案】 B

【考点提示】 行列式求值

【解析】

$$\text{原行列式}=\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}\overset{r_4\Leftrightarrow r_1}{=\!=\!=}-\begin{vmatrix}c&0&0&d\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&a&b&0\end{vmatrix}\overset{c_3\Leftrightarrow c_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}0&0&c&d\\0&0&a&b\\d&c&0&0\\b&a&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2\cdot2}\begin{vmatrix}d&c\\b&a\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}=(ad-bc)(bc-ad)=-(ad-bc)^2,$$

即正确答案为 B.

6.【答案】 A

【考点提示】 向量组的线性相关性

【解析】 由 $(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$ 可知,因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是二维向量组,而 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是三维向量组,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,无法推出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,条件不充分;

而当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关时，因为 $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\neq 0$，所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，条件充分.

综上，正确答案为 A.

7.【答案】 B

【考点提示】 随机事件概率的运算

【解析】 因为随机事件 A 和 B 相互独立，所以有 $P(AB)=P(A)P(B)$.

又 $P(A-B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))$，

代入 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$ 可得 $P(A)=0.6$，

则 $P(B-A)=P(B)-P(A)P(B)=0.5-0.6\cdot 0.5=0.2$，正确答案为 B.

8.【答案】 C

【考点提示】 统计量的分布

【解析】 依题可知，

$X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，则 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$；

$X_3\sim N(0,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X_3}{\sigma}\sim N(0,1)$，$\left(\dfrac{X_3}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$.

又 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\left(\dfrac{X_3}{\sigma}\right)^2$ 相互独立，故 $\dfrac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2}}=\dfrac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2}}=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}\sim t(1)$，正确答案为 C.

二、填空题

9.**【答案】** $R'(p)=40-4p$

【考点提示】 微积分在经济学中的应用

【解析】 由 $Q=40-2p$，得 $p=20-\dfrac{Q}{2}$，

收益函数 $R(Q)=pQ=20Q-\dfrac{Q^2}{2}$，

边际收益 $MR=R'(Q)=20-Q$.

10.**【答案】** $\dfrac{3}{2}-\ln 2$

【考点提示】 积分在几何中的应用

【解析】
$$\begin{aligned}S_D&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\\&=(2x-\ln x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{2}-\ln 2\end{aligned}$$

11.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考点提示】 求定积分

【解析】 $\frac{1}{4}=\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^a x\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^a-\frac{1}{4}\int_0^a 1\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}=\frac{1}{2}a\mathrm{e}^{2a}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2a}+\frac{1}{4}$,

则 $\frac{1}{2}a\mathrm{e}^{2a}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2a}=0$,解得 $a=\frac{1}{2}$.

12.【答案】 $\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$

【考点提示】 交换积分次序求积分

【解析】
$$\text{原式}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}y-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}(1-y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}y\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

13.【答案】 $[-2,2]$

【考点提示】 二次型的矩阵、惯性指数

【解析】 题设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$,设其三个特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|=a^2-4$.

因为题设二次型的负惯性指数为1,所以有且只有一个特征值为负值,不妨设 $\lambda_1<0$,则 $\lambda_2\geqslant0,\lambda_3\geqslant0$,从而有 $|A|=a^2-4\leqslant0$,即 $-2\leqslant a\leqslant2$.

当 $|A|=a^2-4=0$,即 $a=\pm2$ 时,
$$|\lambda E-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-a\\0&\lambda+1&-2\\-a&-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-a^2(\lambda+1)$$
$$=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-4(\lambda+1)=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3),$$
则 $\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$,满足题意. 故综上有,$-2\leqslant a\leqslant2$.

14.【答案】 $\frac{2}{5n}$

【考点提示】 无偏估计量

【解析】 $E(X^2)=\int_\theta^{2\theta}\frac{2X}{3\theta^2}\cdot x^2\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3\theta^2}\int_\theta^{2\theta}x^3\mathrm{d}\theta=\frac{x^4}{6\theta^2}\Big|_\theta^{2\theta}=\frac{5}{2}\theta^2$,

则 $E(c\sum\limits_{i=1}^n X_i^2)=cE(\sum\limits_{i=1}^n X_i^2)=c\cdot n\cdot\frac{5}{2}\theta^2=\theta^2$,$c=\frac{2}{5n}$.

三、解答题

15.【考点提示】 求函数的极限

【解析】

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

16.【考点提示】 二重积分

【解析】 平面区域 D 关于 $y=x$ 对称，则根据对称性可得，

$$I=\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy,$$

从而 $2I=\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy+\iint_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$

$$=\iint_D\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\rho\sin(\pi\rho)d\rho=\frac{1}{2\pi}\int_1^2\pi\rho\sin(\pi\rho)d(\pi\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}t\sin tdt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}t\sin tdt=-\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}td\cos t=-\frac{1}{2\pi}t\cos t\Big|_\pi^{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\cos tdt=-\frac{3}{2},$$

故 $2I=-\frac{3}{2}$，即 $\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=I=-\frac{3}{4}$.

17.**【考点提示】** 解微分方程

【解析】 令 $u=e^x\cos y$，则

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot e^x\cos y,\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y$

由于 $\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x$

故有 $f'(u)e^x\cos^2y+f'(u)e^x\sin^2y=[4f(u)+u]e^x$

即 $f'(u)-4f(u)=u$

由线性微分方程通解公式可得

$f(u)=e^{\int4du}[c+\int ue^{-\int4du}]$

$$=e^{4u}\left[c-\frac{1}{4}(ue^{-4u}+\frac{1}{4}e^{-4u})\right]$$

$$=ce^{4u}-\frac{1}{4}u-\frac{1}{16}$$

$\because f(0)=0$,得 $c=\dfrac{1}{16}$

所以 $f(u)=\dfrac{1}{16}(e^{4u}-4u-1)$.

18.【考点提示】 幂级数的收敛域及和函数

【解析】 令 $a_n=(n+1)(n+3)$,

则由 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\dfrac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}\right|=1$ 得 $R=1$,

当 $x=\pm1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)(n+3)\to\infty\neq0$,故收敛域为$(-1,1)$.

令 $S_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$,则

$$
\begin{aligned}
S_n&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)+(n+1)]x^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''+\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'\\
&=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{3-x}{(1-x)^3},\quad x\in(-1,1).
\end{aligned}
$$

19.【考点提示】 函数的单调性与不等式的证明

【证明】

(Ⅰ)因为$0\leqslant g(x)\leqslant1,x\in[a,b]$,所以有

$$\int_a^x 0\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t,\text{即 }0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a,x\in[a,b].$$

(Ⅱ)根据题设不等式的构造,可令 $\varphi(x)=\int_a^x f(u)g(u)\mathrm{d}u-\int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}f(u)\mathrm{d}u$,

则 $\varphi(a)=0$,且 $\varphi'(x)=f(x)g(x)-f[a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t]g(x)$.

由(Ⅰ)知,$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a$ 且 $f(x)$ 单调增加,故有

$$f[a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t]\leqslant f(a+x-a)=f(x),$$

则 $\varphi'(x)\geqslant f(x)g(x)-f(x)g(x)=0,\quad x\in[a,b]$.

又 $\varphi(a)=0$,从而可知 $\varphi(b)\geqslant\varphi(a)=0$,即$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$,得证.

20.【考点提示】 矩阵方程组的解

【解析】

(Ⅰ)先对矩阵作初等变换,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$