"趣味符号宝典"科普丛书

趣味数学符号宝典

冈部恒治
川村康文
〔日〕长谷川爱美 著
本丸 谅
松本 悠

伊梦瑶 译

数学也迷人!!

科学出版社

"趣味符号宝典"科普丛书

趣味
数学符号宝典

冈部恒治
川村康文
〔日〕长谷川爱美　著
本丸　谅
松本　悠

伊梦瑶　译

科学出版社
北　京

图字：01-2013-6170 号

内 容 简 介

从小学到初中、高中再到大学，只要学习数学就离不开数学符号。简单的数学符号有加号“+”、减号“−”、乘号“×”、除号“÷”等，复杂点的有大于号“>”、小于号“<”等，再复杂的有微分、积分、正弦、余弦符号等。那么，大家是不是想把这些符号归集为一本书，想用的时候翻书一查就能找到呢？这本《趣味数学符号宝典》就是你想要的。

本书介绍了从小学到大学的各种数学符号，包括这些符号的历史渊源、演变过程，更重要的是这些符号的意义和用法，为广大在校学生及致力于数学领域的工作人员提供方便。

图书在版编目（CIP）数据

趣味数学符号宝典 / 冈部恒治等著；伊梦瑶译．—北京：科学出版社，2014.7

（“趣味符号宝典”科普丛书）

ISBN 978-7-03-040536-4

Ⅰ．趣… Ⅱ．①冈…②伊… Ⅲ．数学-符号-普及读物 Ⅳ．01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 089954 号

责任编辑：徐 莹 杨 凯 / 责任制作：胥娟娟 魏 谨

责任印制：赵德静 / 封面设计：铭轩堂

北京东方科龙图文有限公司 制作

http：//www.okbook.com.cn

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http：//www.Longmenbooks.com

北京画中画印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 7 月第 一 版 开本：A5（890×1240）

2014 年 7 月第一次印刷 印张：5 3/4

字数：150 000

定 价：32.00

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

一提起数学上所使用的符号，很多人都会认为那只是一些无关紧要的小问题。然而事实上这些符号有着超乎我们想象的重要性。

数字也是符号的一种，只不过因为它太常见了所以并未被收录到本书中。其中0最为特殊。现在大家都知道0是在1前面的数字。本书的一位笔者家中有个4岁的孩子，他经常说："第1喜欢水豚"，当他被问及"第几喜欢妈妈"的时候，他会回答："第0位"。

然而欧洲很长一段时间里，0（包括负数）都没有被列入数字中。他们认为"什么都没有怎么能算是数字呢"。可是如果没有0，就不会有十进制的计算方法了。

表示0的符号最初出现在印度，之后由阿拉伯传入了欧洲，因此被称为阿拉伯数字。斐波那契曾说过"十进制算法用阿拉伯数字表示非常方便"，于是欧洲的商业计算方式从此发生了变化。

下面让我们来说说另一个例子吧。在英国，第一个考虑微积分学实际应用的是牛顿。然而在牛顿与莱布尼茨关于微积分基本定理的争论中，英国学者固执地使用牛顿在流率法中所用的 $\dot{x}$ 而不使用莱布尼茨派的 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$。如果只是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 的话其实还好，但是如果要用流率法来表示 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 的话，就要写作 $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ 。因此英国的微积分向着合成系数微积分的方向发展了。其实从教育的观点来看，明显是莱布尼茨的表达方式比较好。

对于这件事，被誉为计算机先驱的数学家查尔斯•巴贝奇曾说过，由于牛顿所使用的符号有问题，"Dot-age* 记法将英国数学的发展推迟了100年"。

---

* Dot-age 很容易让人联想到 dotage（溺爱），这是个相当有冲击性的说法。

的确，18世纪英国数学家的研究成果比不上欧洲大陆其他国家数学家的成果也是事实。

这些例子已经充分说明了符号对于数学发展的巨大影响力了吧。

所以说，通过“数学符号”来思考数学，也是一件意外有趣并且令人充满期待的事。这也是我们写此书的初衷。

最后，笔者要对所有帮助我们出版这本书的人表示感谢。没有他们的帮助，这本书是无法面世的。特别要感谢的是欧姆社的各位编辑，面对经常拖稿的笔者们（尤其是我），他们非但没有指责，反而经常鼓励，直到本书问世。另外，还要感谢满足了所有笔者喜好的插画师ミヤジママイ。

冈部恒治

目 录

第1章 代 数

math_symbol 01～25

第 1 章

代　　数

自然数是像1，2，3，4，5，…这样连续的数，也是人们用来表示次序的数。也可以说是正整数，一般不包括0。

这些数是我们一生当中最早接触到的。大多数孩子都有这样的记忆：每当我们想要早早地从浴缸里出来的时候，父母都会说："要数到100才可以出来哦。"

从小就开始接触的自然数

自然数的符号**N**是由英文Natural number的首字母而来的。有些人也会用黑体字的ℕ来表示。从前在人们用打字机写文章的时代，这样的黑体字是通过重叠打印来表示的。

关于自然数的名称，如果说是"因为是一生中最早接触的数，所以很自然地就叫做自然数了"的话实在有些勉强。有一种说法认为人们把正整数称为**自然数**是因为受到了德国数学家克罗内克的影响。克罗内克认为"上帝创造了自然数，其余的则是人创造的"。从此将正整数称为自然数的叫法就流传开来了。

据传，为自然数命名的克罗内克对康托尔的数学理论产生了强烈的不满。他不认同康托尔的无限集合论，并拒绝发表康托尔提交的所有论文。想来也是，康托尔的无限集合论认为包含着自然数的整数、有理数甚至是整数系数多项式的解的集合（当然这个集合中也包括 $\sqrt{n}$ 和黄金比例 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ 这样的数）都同等重要。这对于认为自然数是“神的恩惠”的克罗内克来说是不可能认同的。

康托尔在遭受这样沉重的打击之后一直病魔缠身，最终在精神病院结束了郁郁寡欢的一生。但是，全体自然数的确是无限集合，这与康托尔的理论是相符的。无限集合论对于之后的自然数研究来说是不可欠缺的前提，反过来说自然数也是无限集合论最初的实例。

从那之后在数学界就流传着“数学上的概念应该也是可以当成公理来用的”这种公理主义学派的说法。从这个角度来看，最初用公理化的方法建立的数学概念就是皮亚诺的自然数公理了。

康托尔死后，将公理主义学派进一步发展的形式主义学派带头人希尔伯特说过“没有人能将我们从康托尔建立的乐园中放逐出去”。1891年，朱塞佩•皮亚诺证明了自然数能够被定义为公理。

使用实例

皮亚诺的公理在数学归纳法中也占有很重要的位置，其基本思路是：

存在一个关于$n\in\mathbb{N}$的命题$P(n)$，取$a\in\mathbb{N}$使$P(a)$成立。当对于所有$k\geqslant a$，$P(k)$均成立时，$P(k+1)$也成立。那么对于所有$n\geqslant a$，$P(n)$成立（大多数情况下a=1或a=0）。

符号↓

Z

整数是指全体自然数 ∪{0}∪{ –（**全体自然数**）}（参考P136），
也就是说，像{…，–3，–2，–1，0，1，2，3，…}**这样的集合。**

环的起点

整数的符号Z是德语中表示数字的单词Zahlen的首字母。因为英语中表示数字的Integer的首字母I在很多别的地方被使用了，所以就使用了字母Z表示整数。

虽然$\mathbb{Z}$是Z的黑体字，但是也被称为黑板字体，打字机时代也是通过重复打印来表示的。在大学的课堂里，教授们很喜欢用这个字体。这样可以把代表整数的Z和代表复素数的z及数字2区分开。

Z是无限集合中可以做加法运算的**群**。

也就是说，两个整数相加得到的也将是整数（在加法下封闭）。除此之外，还要满足下面的3个条件

i） $(a+b)+c=a+(b+c)$（结合定律）

ii）任何整数加上0之后值不变（单位元0存在）

iii）任意整数a加上$-a$之后值为0（逆元$-a$存在）

此外满足

iv）$a+b=b+a$（交换定律）

的时候称为可换群。强调整数作为群的特性时大多用$\mathbb{Z}$表示。另外，整数在乘法运算下也是封闭的，满足下面3个条件

v）$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$（结合定律）

vi）对于任意整数z，$z\times 1=z$（单位元1存在）

vii）满足下面2个等式（共同称为**分配定律**）

• $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

• $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

符合以上所有性质的集合被称为**环**，也可以说环是将整数的性质一般化的产物。当强调作用于群的、属于环的整数集合时，多用$\mathbb{Z}$表示。

使用实例

映射为圆（中间为实心）的图像可以将其中所有的点集中缩小到一点，而映射为圆周的图像则无法集中缩小到一点。

所以圆的同构群只有单位元，而圆周的同构群是整数集$\mathbb{Z}$。由此看来从一个圆映射到另一个圆的连续函数是有不动点的。

整数之外的环的例子有$n\times n$行列全体矩阵的集合、全体多项式的集合等。

环的分配定律的性质也可以证明“负负得正”。

有理数是指$\{m/n\ ;\ m \in Z,\ n \in N\}$

也就是说，有理数是以“整数/自然数”的形式出现的所有数的集合。另外，实数中不属于有理数的被称为无理数。

最初的体

Q是英语中表示商的单词Quotient的首字母。虽然在英文中表示有理数的单词是Rational Number，但由于R在其他地方（表示实数）被使用了，所有这里用了Q。

如果要用其他方式来表示有理数的话，可以用整数、有限小说、循环小数等形式。比如说1/3 = 0.3333或者5.2。

无理数的例子有$\sqrt{2}$，π，e（自然对数的底）等。

无理数与无理数的组合并不一定是无理数。比如说$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$就是一个有名的例子。如果把虚数也考虑在内的话，就成为了“博士热爱的算式”。

$$e^{i\pi} = -1$$

这个公式的爱好者很多。

笔者找到了京都大学2006年入学考试中有关于有理数的问题，如下

"$\tan 1°$是有理数吗？"

两个有理数相加得到的还是有理数（在加法下封闭），并且在加法条件下，有理数集合可以被看做是单位元为0的群。

因为在乘法下有理数集合仍然是封闭的，所以有理数集合也可以被看做具有环结构。在乘法条件下把加法的单位元0去掉，有理数集合可以成为以1为单位元的群。

拥有这样性质的集合被称作**体**。

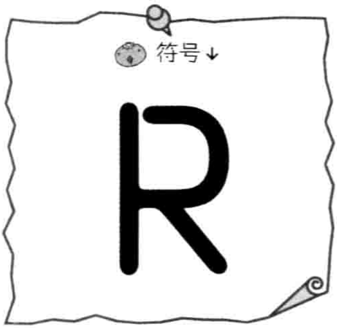
使用实例

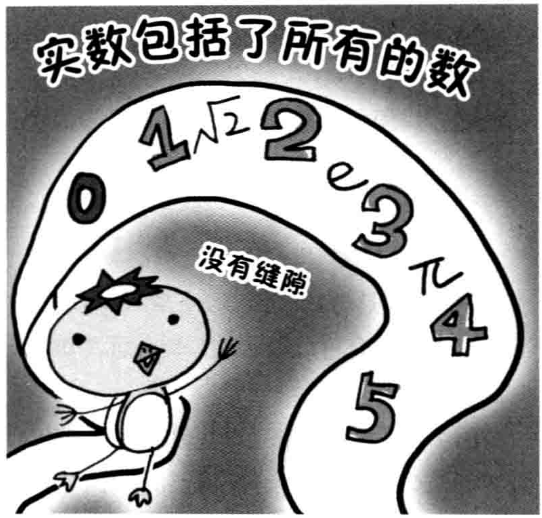
京都大学的试题考察的是有理数集合作为体在四则运算下均封闭的性质。从$\tan(\alpha+\beta)$来看的话

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$，这是关于$\tan\alpha$和$\tan\beta$的四则运算。

假设$\tan 1°$为有理数，当$\alpha=\beta=1°$时，$\tan 2°$也是有理数。如此类推，对于所有n，$\tan n°$都是有理数。但是$\tan 60°$的值$\sqrt{3}$是一个无理数。因此产生矛盾，假设无法成立。

如果将有理数的性质一般化并以此作为**体**的定义，那么实数与复素数的集合都是**体**。





实数是指将有理数的缝隙填满的数。

连续无缝隙的数

实数用英文Real number的首字母来表示。要说为什么用Real这个单词，起因于后面将要介绍的虚数（Imaginary number，参考P26）

数字是按照自然数N→整数Z→有理数Q的顺序发展的，并在有理数的阶段确立了四则运算的理论。

但是，随着毕达哥拉斯学派发现毕达哥拉斯定理，$\sqrt{2}$和黄金比例这样的数出现后，人们发现有理数并不能涵盖所有的数。于是数集再次被扩大，形成了实数集。

从N到Q，其中的数都是可构成的，但R中的数则不行。对于这个现象，康托尔猜测是因为“整数系数方程的解的浓度小于实数的浓度。”

那么，实数应该如何定义呢？