国家计量技术法规统一宣贯教材

用蒙特卡洛法评定测量不确定度

周桃庚 编著
国家质量监督检验检疫总局计量司 审定

JJF 1059.2—2012

JJF 1059.2—2012

JJF 1059.2—2012

中国质检出版社

国家计量技术法规统一宣贯教材

用蒙特卡洛法评定测量不确定度

周桃庚　编著
国家质量监督检验检疫总局计量司　审定

中国质检出版社
北　京

图书在版编目(CIP)数据

用蒙特卡洛法评定测量不确定度/周桃庚编著. —北京:中国质检出版社,2013.12
(国家计量技术法规统一宣贯教材)
ISBN 978-7-5026-3926-6

Ⅰ.①用… Ⅱ.①周… Ⅲ.①测量—不确定度—研究 Ⅳ.①TB9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 269346 号

中国质检出版社出版发行
北京市朝阳区和平里西街甲 2 号(100013)
北京市西城区三里河北街 16 号(100045)
网址:www. spc. net. cn
总编室:(010)64275323 发行中心:(010)51780235
读者服务部:(010)68523946
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
各地新华书店经销
*
开本 880×1230 1/16 印张 7 字数 176 千字
2013 年 12 月第一版 2013 年 12 月第一次印刷
*
定价:48.00 元

前　言

国际标准化组织2008年正式颁布了ISO/IEC导则98－3系列标准，其中包括附件1《用蒙特卡洛法传播概率分布》。该附件详细规定了：对GUM法不适用的情况下可用蒙特卡洛法传播概率分布评定和表示测量不确定度；在GUM法适用的情况下，也可通过用蒙特卡洛法予以验证。该附件的颁布，标志了测量不确定度评定和表示在国际范围内得到进一步扩展和深化。在ISO/IEC导则98－3附件1的基础上，我国发布了国家计量技术规范JJF 1059.2—2012《用蒙特卡洛法评定测量不确定度》。

为了帮助我国各级计量人员、注册计量师、计量科研人员及其他需要了解测量不确定度的人员理解和掌握JJF 1059.2—2012《用蒙特卡洛法评定测量不确定度》，我们组织编写了这本宣贯教材。本书详细说明了GUM法和蒙特卡洛法在不确定度评定的各个阶段的处理方式，对如何为输入量设定概率密度函数以及分布传播的基本原理做了详细的讲解。为了更好地方便读者在实际工作中使用蒙特卡洛法评定测量不确定度，本书介绍了电子表格软件和Matlab的应用，并在每个举例中附有Matlab程序，这些程序都在MATLAB R2010a版本中通过了验证。

国家质量监督检验检疫总局计量司

2013年10月

目　录

第1章　概　述

本书是以 ISO/IEC GUIDE 98 －3/Suppl. 1:2008《测量不确定度第 3 部分　测量不确定度表示指南(GUM:1995)附件 1:用蒙特卡洛方法传播概率分布》(Uncertainty of measurement—Part 3:Guide to the expression of uncertainty in measurement(GUM:1995)Supplement 1:Propagation of distributions using a Monte Carlo method)为基础对用蒙特卡洛法评定测量不确定度的概念和方法做了较详细的讲解,可作为贯彻 JJF 1059. 2—2012《用蒙特卡洛法评定测量不确定度》的学习资料。

本书旨在帮助我国各级计量人员、注册计量师、计量科研人员及其他需要了解测量不确定度的人员了解和学习蒙特卡洛法评定测量不确定度。

1.1　GUM 法评定测量不确定度的局限性

测量不确定度评定领域中的主要文件是"ISO/IEC GUIDE 98—3:2008《测量不确定度第 3 部分:测量不确定度表示指南(GUM:1995)》"。该标准是在对 1995 版 GUM 修订的基础上以 8 个国际组织的名义于 2008 年联合发布。依据 GUM,我国对 JJF 1059—1999《测量不确定度评定与表示》已进行了修订,并于 2012 年发布了新版 JJF 1059. 1—2012《测量不确定度评定与表示》。该规范的修订为测量不确定度在我国的应用将会起到推动作用。

GUM 中所采用的模型是一个输入输出模型,即输出量是输入量的函数。针对这种模型,GUM 提供了一个实施不确定度评定的程序,该程序被称作 GUM 不确定度框架或 GUM 法。其出发点是有关模型输入量的相关信息用其估计值及其相关标准不确定度表示,通过(一个线性化的)模型"传播"这些估计值及其不确定度以提供输出量的估计值及其标准不确定度。同时该程序还提供了获得输出量的扩展不确定度,从而获得包含区间的一种方法。为了计算包含因子,以获得扩展不确定度,有必要知道输出量的概率密度函数(PDF),在 GUM 不确定度框架内,没有明确说明如何计算,而是基于中心极限定理,假设输出量为高斯分布。该程序也考虑了如果模型的输入量相互关联时相关性的影响。(完整的)不确定度评定程序,应包括:(1)应用不确定度传播律获得输出量的估计值及其不确定度;(2)假设中心极限定理成立,获得扩展不确定度,从而获得包含区间。

对于数学模型为线性时,有效应用不确定度传播律无需任何条件。而且,在下列条件下可确定包含区间:

(1)当一个或多个输入量的标准不确定度存在有限的自由度时,且这些输入量要求相互独立,可运用韦尔奇—萨特思韦特(Welch－Satterthwaite)公式,计算输出量的合成标准不确定度的有效自由度。

(2)输出量的概率密度函数(PDF)可由高斯分布或 t 分布充分地近似表示。

对于数学模型为非线性时,应用不确定度传播律是有条件的。当数学模型的非线性不

显著时，若想运用基于数学模型的一阶泰勒级数近似的不确定度传播律，在输入量 X_i 的最佳估计值 x_i 附近，数学模型关于每个输入量分量 X_i 需连续可微。

当数学模型为明显非线性时，GUM 建议在合成标准不确定度的计算中必须考虑泰勒级数展开中的高阶项，同时给出了包含高阶项的合成标准不确定度的计算公式，但要求在输入量 X_i 的最佳估计值 x_i 附近，数学模型关于每个输入量分量 X_i 存在适当的高阶的导数，同时要求泰勒级数近似中的显著高阶项所涉及的输入量 X_i 相互独立，且其 PDF 为高斯分布，泰勒级数近似中所不包括的高阶项同时可以忽略。满足这些条件的情况下，应用 GUM 不确定度框架产生的结果有效。

总之，有效应用 GUM 不确定度框架，要求：

（1）数学模型的非线性不是很显著。

（2）中心极限定理适用，这意味着输出量的 PDF 由高斯分布或 t 分布表示。

（3）韦尔奇—萨特思韦特公式足够用来计算有效自由度。应用韦尔奇—萨特思韦特公式要求假定输入量相互独立。

在实践中，当这些条件不满足时，有时仍使用 GUM 不确定度框架，从而产生的结果只能视为一个近似值。或者，不知道这些条件是否成立时，照样使用 GUM 不确定度框架。若数学模型的非线性很显著时，由 GUM 不确定度框架提供的输出量的估计值和其标准不确定度可能是不可靠的。若中心极限定理不适用时，可能导致不切实际的扩展不确定度。

当适用条件不能完全满足时，JJF 1059.1 建议“可采用一些近似或假设的方法处理，或考虑采用蒙特卡洛法（简称 MCM）评定测量不确定度，……”。

1.2　蒙特卡洛法

蒙特卡洛（Monte Carlo）法又称统计模拟法、随机抽样技术，是使用随机数（或更常见的伪随机数）来解决问题的一种方法。

当所求问题的解是某个事件的概率，或者是某个随机变量的数学期望，或者是与概率、数学期望有关的量时，通过某种试验的方法，得出该事件发生的频率，或者该随机变量若干个具体观察值的算术平均值，通过它得到问题的解。这就是蒙特卡洛法的基本思想。

为了得到具有一定精确度的近似解，所需试验的次数是很多的，通过人工方法做大量的试验相当困难，甚至是不可能的。因此，蒙特卡洛法的基本思想虽然早已被人们提出，却很少被使用。20 世纪 40 年代以来，由于电子计算机的出现，使得人们可以通过电子计算机来模拟随机试验过程，把巨大数目的随机试验交由计算机完成，使得蒙特卡洛法得以广泛地应用，在现代化的科学技术中发挥应有的作用。

蒙特卡洛法常以一个“概率模型”为基础，按照它所描述的过程，使用由已知分布抽样的方法，得到部分试验结果的观察值，求得问题的近似解。

GUM 附件 1 是建立在“分布传播”这个概念上。该方法直接使用设定给输入量的 PDF，而不是只使用分布的期望和标准偏差。然后通过测量模型，获得被测量，即输出量的 PDF。GUM 附件 1 推荐使用蒙特卡洛法来实现这个目的。

蒙特卡洛法来实现这个目的，就需要产生各种已知概率分布的随机变量，这是实现蒙

特卡洛法的基本手段,这也是蒙特卡洛法被称为随机抽样的原因。最简单、最基本、最重要的随机变量是在[0,1]上矩形分布的随机变量。通常把[0,1]上矩形分布的随机变量的抽样值称为随机数。

产生随机数的问题,就是从这个分布抽样的问题。在计算机上,可以用物理方法产生随机数,但价格昂贵,不能重复,使用不便。另一种方法是用数学递推公式产生,这样产生的序列,与真正的随机数序列不同,所以称为伪随机数,或伪随机数序列。经过多种统计检验表明,它与真正的随机数,或随机数序列具有相近的性质,因此可把它作为真正的随机数来使用。

其他分布随机变量的抽样都是借助于随机数来实现的。由此可见,随机数是实现蒙特卡洛法的基本工具。

1.3 蒙特卡洛法评定测量不确定度的目的

当输入量 $X_1,\cdots,X_N$ 与输出量 Y 之间的模型是线性的,即

$$Y = c_1X_1 + \cdots + c_NX_N$$

式中,$c_1,\cdots,c_N$ 为任何常数,N 无论是大或小,可为任何值,且输入量 X_i 设定为高斯分布,若部分输入量之间或全部输出量之间相关时,为这些相关的输入量设定联合(多元)高斯分布。在这种情况下,评定测量不确定度,GUM 不确定度框架是无与伦比的。

在其他情况下,GUM 不确定度框架一般提供一个近似解:近似的质量与模型,以及其输入量的估计值及其不确定度的大小有关。在许多情况下,这种近似在实际应用中是完全可以接受的。但在某些情况下,却未必如此。

因此,虽然 GUM 作为一个整体,内容非常丰富,但 GUM 不确定度框架确实有一定的局限性和假设条件,因此在计量的一些应用中,GUM 用户并不清楚在其应用中局限性是否可用或假设可预期满足。

GUM 不确定度框架条件不满足或不确定条件是否满足,或当应用 GUM 不确定度框架有困难,如模型复杂时,可以使用蒙特卡洛法评定测量不确定度。

GUM 没有明确提及使用蒙特卡洛法。然而,在 GUM 起草过程中该选择是得到认可的。ISO/TAG4/WG 3 出版的 ISO/IEC/OIML/BIPM 1992 年 6 月的草案(第一版)宣称[1]:

“如果 Y[模型输出量]和其输入量之间的关系是非线性的,或者如果只得到表征 X_i[输入量]的概率的参数(期望,方差,高阶矩)的估计值,以及它们本身由概率分布表征,而且一阶泰勒展开式是一个不可接受的近似式,则 Y 的分布不能用一个卷积表示。在这种情况下,一般应应用数值方法(如蒙特卡洛计算),但在计算上评定更加困难。”

在 GUM 发布的版本中,G1.5 条已修改为:

“如果 Y 和其输入量之间的函数关系是非线性的,一阶泰勒展开式不是一个可以接受的近似式,则 Y 的概率分布不能通过输入量分布的卷积获得。在这种情况下,必需要用其他分析或数值方法。”

这里重新措辞的解释是,“其他分析或数值方法”包括任何其他的适当方法。

蒙特卡洛法也可用来验证 GUM 不确定度框架,从而在任何特定的应用中,确认 GUM

的应用是适合其用途的。该方法表明 GUM 不确定性框架是无效时,该方法本身随后可以用来进行不确定度评定,替代 GUM 不确定性框架,因为它与 GUM 的一般原则是一致的。

1.4 JJF 1059.2—2012 起草的技术基础

JJF 1059.2—2012《用蒙特卡洛法评定测量不确定度》(以下简称 JJF 1059.2—2012)完全参照国际标准 ISO/IEC GUIDE98－3/Suppl. 1:2008《测量不确定度 第 3 部分 测量不确定度表示指南(GUM:1995)附件 1:用蒙特卡洛方法传播概率分布》,在翻译和吃透其内容的基础上编制的。具体是在吃透原国际标准的文本内容的基础上,按照我国计量技术规范体系的结构要求,突出简洁明了和方便操作的考虑,做了大的结构体系上的调整,以及文字内容上的再加工,但在主要的技术内容细节上都保持与原国际标准的文本稿一致。为突出蒙特卡洛法传播概率分布及其评定和表示单一输出量的测量不确定度这一主线,其他知识性内容,如常见的概率分布、分布传播基本原理、GUM 法和 MCM 比较和应用实例的内容作为补充件放至附录部分。

1.5 JJF 1059.2—2012 起草过程

2010 年 3 月,组成起草小组,并在北京召开了第一次会议,就起草原则进行了讨论。2010 年 6 月 21 日,起草小组在江苏昆山召开了第二次会议,针对提交的 JJF 1059.2 稿进行了讨论,提出了修改意见。起草小组一致认为,JJF 1059.2 稿需要保留 ISO/IEC GUIDE 98－3 附件 1 的核心内容,但不能照搬附件 1 的内容体系结构,在内容和文体上都要做较大删减和变动,突出其可操作性,并将 JJF 1059.2 的标题名称调整为“用蒙特卡洛法评定测量不确定度”。

2010 年 6 月至 2011 年 2 月,形成了规范草稿。2011 年 2 月至 5 月广泛征求意见,共收到 16 份反馈意见。2011 年 6 月至 2012 年 3 月,在征求意见的基础上,对规范草稿进行了修改,形成了 JJF 1059.2《用蒙特卡洛法评定测量不确定度》的送审稿。2012 年 11 月,全国法制计量管理计量技术委员会对规范送审稿进行了审定。起草小组在对审查提出的意见进行修改后,于 2012 年 12 月形成 JJF 1059.2—2012 的终稿。

1.6 JJF 1059.2—2012 适用范围

JJF 1059.2—2012 为测量不确定度评定提供了一个通用的数值方法,适用于具有任意多个可由 PDF 表征的输入量和单一输出量的模型。JJF 1059.2—2012 主要涉及有明确定义的,并可用唯一值表征的被测量估计值的不确定度。

评定以下典型情况的测量不确定度问题时,可应用 JJF 1059.2—2012:

(1)各输出量不确定度分量的大小不相近;

(2)输出量的估计值和其标准不确定度的大小相当;
(3)应用不确定度传播律时,计算模型的偏导数困难或不方便;
(4)输出量的 PDF 较大程度地背离正态分布、t 分布;
(5)测量模型明显呈非线性;
(6)输入量的 PDF 明显非对称。

第 2 章　测量不确定度评定

一个测量不确定度评定应包括：

(1)有关模型和所有输入量的相关信息；

(2)输出量的估计,该估计的标准不确定度和输出量的包含区间两者中的一个或两个；

(3)这些结果确定的方式,包括所有的假设。

因此,测量不确定度评定包括三个阶段。

第一阶段,建立公式,这个阶段的组成部分分为两个步骤：

(1)建立输出量与输入量之间的数学模型；

(2)分析测量不确定度的来源。

GUM 法中输入量的信息以输入量的最佳估计值和其相关的标准不确定度表示；

蒙特卡罗法评定测量不确定度中输入量的信息以概率分布的形式表示。

第二阶段,传播。

GUM 法中,应用不确定度传播律传播输入量的最佳估计值和其标准不确定度获得输出量的估计值及其测量不确定度；

蒙特卡罗法评定测量不确定度中,以分布传播的方式,使用建模阶段所提供的信息以确定输出量的 PDF。

第三阶段,总结。

GUM 法中,所需结果包括输出量的估计值,标准不确定度和扩展不确定度。

蒙特卡洛法评定测量不确定度中,使用输出量的 PDF 以获得：

(1)输出量的期望,作为输出量的估计值；

(2)输出量的标准偏差,作为输出量的估计值的标准不确定度；

(3)规定包含概率下的输出量的包含区间。

2.1　建立公式阶段

2.1.1　测量模型

在测量不确定度评定中,建立测量模型也称为测量模型化,目的是要建立满足测量不确定度评定所要求的测量模型。被测量(输出量)的测量模型是指被测量与测量中涉及的所有已知量间的数学关系。

测量模型中应包含所有应该考虑的影响量,而每一个影响量将对被测量估计值贡献一个值得考虑的不确定度分量。因此一个好的测量模型,其中所包含的影响量和此后不确定度评定中所考虑的每一个不确定度分量应该是一一对应的。每一个不确定度分量对应一个输入量,这样建立起来的测量模型,既能用来计算被测量估计值,又能用来全面地评定测

量结果的不确定度。

输入量和输出量之间的基本关系是模型。N 个输入量，记为 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_N)^T$ 和输出量 Y 之间的关系可用如下模型表示

$$Y=f(\boldsymbol{X})=f(X_1,\cdots,X_N) \tag{2.1}$$

该模型可以是一个数学公式，分段计算程序，计算机软件或其他方法。这是 GUM 和 JJF 1059.2—2012 中直接考虑的模型。

测量模型中的输入量可以是：

(1)当前直接测量的量；

(2)由以前测量获得的量；

(3)由手册或其他资料得来的量；

(4)对被测量有明显影响的量。

如果测量模型中某些输入量它们本身又是其他量的函数，则在 MCM 中，测量模型应表示成由基本量所组成，这是因为蒙特卡洛计算的基本出发点就是每个量都用 PDF 来描述。

例：测量模型为：$P=C_0I^2/(t+t_0)$，其中，$I=V_s/R_s$，$t=\alpha\beta^2R_s^2-t_0$。

在 GUM 法中，$I=V_s/R_s$ 中，V_s 和 R_s 为 I 的输入量，利用 V_s 和 R_s 的最佳估计值和其标准不确定度可确定 I 的最佳估计值和其标准不确定度。同样，$t=\alpha\beta^2R_s^2-t_0$ 中，β 和 R_s 为 t 的输入量，利用 β 和 R_s 的最佳估计值和其标准不确定度可确定 t 的最佳估计值和其标准不确定度。I 和 t 作为输出量 P 的输入量，最终可确定 P 的最佳估计值和其标准不确定度。

在蒙特卡洛法中，测量模型应表示成基本量的函数，这里应将 I 和 t 的函数代入到测量模型中，即

$$P=\frac{C_0V_s^2}{\alpha\beta^2R_s^4}$$

其中，输入量变为 V_s、R_s 和 β。它们都是基本量，不是其他量的函数。

建立好测量模型后，有必要用概率密度函数(PDF)来表征测量模型中的输入量。在 GUM 不确定度框架中，只使用这些分布表征的输入量的期望和标准偏差，必要时，还有协方差。对于蒙特卡洛法，则使用这些分布本身。表征输入量的 PDF 与关于这些输入量的可用信息有关。这种可用信息有下面两种类型。

一是若可得到 q 个相互独立的示值，这些值的平均值可看做是某个量 X_i 的结果，这个量的期望和标准偏差未知。对这些值进行统计分析，确定 X_i 的一个估计值 x_i 和其标准不确定度 $u_i=u(x_i)$ 以及相应的自由度 ν_i。这些就是 GUM 不确定度框架中使用的参数。为了应用蒙特卡洛法，利用这些参数构造一个 PDF 来表征 X_i。对重复示值的分析，如何获得一个 PDF 来表征输入量参阅 2.1.2 节。在 GUM 中，这些信息的使用称作“A 类不确定度评定”。

二是如果不能得到重复示值，用该输入量的相关信息为基础构造的 PDF 来表征输入量 X_i。这样的信息可以是先验知识、经验或前一次不确定度评定的结果。在蒙特卡洛法中直接使用该 PDF。为应用 GUM 不确定度框架，利用该 PDF 确定 x_i，u_i 和 ν_i。2.1.3 节中给出了根据这些信息确定的一些常见的 PDF。在 GUM 中这类信息的使用称作“B 类不确定度评定”。

如果其中一些输入量或所有输入量之间不相互独立，则在 GUM 不确定度框架中，计算

相关输入量的估计值的协方差矩阵。而对于蒙特卡洛法,这些相关的输入量用一个联合PDF表征。

2.1.2 基于重复示值的分析

重复示值的统计分析可分成两部分:

(1)给定期望未知的某个量 X_i 的一组独立重复示值,确定 X_i 的一个估计值,该估计值的标准不确定度 u_i,以及相应的自由度 ν_i。

(2)给定期望未知的两个量 X_i 和 X_j 的一组示值,确定这 X_i 和 X_j 的估计值 x_i 和 x_j 的协方差。

2.1.2.1 均值和其标准偏差

若独立重复得到期望未知的某个量 X_i 的 q 个示值($x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,q}$)。分别确定 X_i 的估计值 x_i 和其标准不确定度 u_i。这些示值的算术平均值 $\bar{x}_i$ 作为 X_i 的估计值,$\bar{x}_i$ 的标准偏差 s_i 为 x_i 的标准不确定度。

$$\bar{x}_i = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} x_{i,k} \tag{2.2}$$

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{q(q-1)}\sum_{k=1}^{q}(x_{i,k}-\bar{x}_i)^2}$$

$$s_i = s(\bar{x}_i) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{m}} \tag{2.3}$$

自由度 $\nu_i = q-1$。式中,m 由检定规程、检验规程、试验规范、检测作业指导书等技术标准规定给出。

给定按式(2.2)和式(2.3)获得的估计值 $\bar{x}_i$ 及其标准不确定度 s_i,可按如下方法确定 X_i 的一个PDF:

(1)如果示值的分布未知,则用高斯分布 $N(\bar{x}_i, s_i^2)$ 来表征 X_i(3.3节);

(2)如果示值的分布已知为高斯分布,则用自由度为 $v_i = q-1$ 的 t 分布 $t_{v_i}(\bar{x}_i, s_i^2)$ 表征 X_i(3.10节)。

这是蒙特卡洛法所需的信息。为了实施蒙特卡洛法,5.4.2节和5.4.3节分别给出了从这些分布如何产生伪随机数的方法。

2.1.2.2 两个均值之间的协方差

设$(x_{i,k}, x_{j,k})^T$,$k=1,2,\cdots,q$ 为期望未知的两个量 X_i 和 X_j 的 q 对示值,每对都与剩余其他对相互独立。对于 X_i 的一组示值($x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,q}$),按式(2.2)和式(2.3)获得均值 $\bar{x}_i$ 及其标准不确定度 s_i 分别作为 X_i 的估计值 x_i 和其标准不确定度 u_i,以相同的方式可得到 X_j 的估计值 x_j 和其标准不确定度 u_j。X_i 和 X_j 的协方差取为均值 $\bar{x}_i$ 和 $\bar{x}_j$ 的协方差 $u_{i,j}$:

$$u_{i,j} = u(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \frac{1}{q(q-1)}\sum_{k=1}^{q}(x_{i,k}-\bar{x}_i)(x_{j,k}-\bar{x}_j) \tag{2.4}$$

2.1.2.3 输入量间的协方差矩阵

设$(x_{1,k}, x_{2,k}, \cdots, x_{N,k})^T$ 为 N 个期望未知的量 X_i 的 q 个 N 元示值,$k=1,2,\cdots,q$,$i=1,2,$

$\cdots,N$，每个 N 元都与剩余其他 N 元相互独立。这些 N 元示值组合成一个 $N\times q$ 维的矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$，即

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,q} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N,1} & x_{N,2} & \cdots & x_{N,q} \end{bmatrix}$$

式中，$x_{i,j}$ 为第 i 个输入量的第 j 个示值。

设 $\boldsymbol{\Phi}'$ 为用均值修正 $\boldsymbol{\Phi}$ 而得到，即 $\boldsymbol{\Phi}$ 的第 i 行的所有元素 $x_{i,j}$，$j=1,2,\cdots,q$ 减去该行所有元素的均值 $\bar{x}_i$，即

$$\boldsymbol{\Phi}'=\begin{bmatrix} x_{1,1}-\bar{x}_1 & x_{1,2}-\bar{x}_1 & \cdots & x_{1,q}-\bar{x}_1 \\ x_{2,1}-\bar{x}_2 & x_{2,2}-\bar{x}_2 & \cdots & x_{2,q}-\bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N,1}-\bar{x}_N & x_{N,2}-\bar{x}_N & \cdots & x_{N,q}-\bar{x}_N \end{bmatrix}$$

均值 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_N)^T$ 的协方差 $u_{i,j}$ 的协方差矩阵 U_x 由下式给出

$$U_x=\frac{1}{q(q-1)}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{\Phi}')^T \tag{2.5}$$

即

$$u_{i,j}=\frac{1}{q(q-1)}\sum_{k=1}^{q}(x_{i,k}-\bar{x}_i)(x_{j,k}-\bar{x}_j),i=1,2,\cdots,N,j=1,2,\cdots,N$$

输入量 $\boldsymbol{X}$ 的估计值 $x=\bar{x}$ 及其协方差矩阵 U_x 就是 GUM 不确定度框架所要求的信息。

给定 $\boldsymbol{X}$ 的估计值 $\bar{x}$ 及其协方差矩阵 U_x，可用多元高斯分布 $N(\bar{x},U_x)$ 来表征 $\boldsymbol{X}$。这是 MCM 所要求的信息。5.4.6 节给出了从多元高斯分布如何产生伪随机数的方法。

2.1.3　基于其他可用信息的分析

如果对某输入量的了解是建立在非统计信息的基础上，这个量可用根据该信息的性质设定的一个 PDF 表征。对于蒙特卡洛法，直接使用该 PDF。

设定适当的概率分布（矩形，高斯等）给模型的输入量，是蒙特卡洛法评定不确定度的建模阶段的一个具有挑战性的一步。具体如何为输入量设定 PDF，详见第 3 章。基于可用信息，表 2.1 给出了 GUM 不确定度框架中所使用的估计值 x_i 和其标准不确定度 u_i 以及相应的自由度 ν_i。

表 2.1　一些常见的情况下，现有资料的基础上设定 PDF 给输入量 $\boldsymbol{X}$

分布	x_i	u_i	ν_i
矩形 $R(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$	∞
高斯 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ	∞
曲线梯形 CTrap(a,b,d)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{2d}\right]^2$
反正弦 $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{2}}$	∞