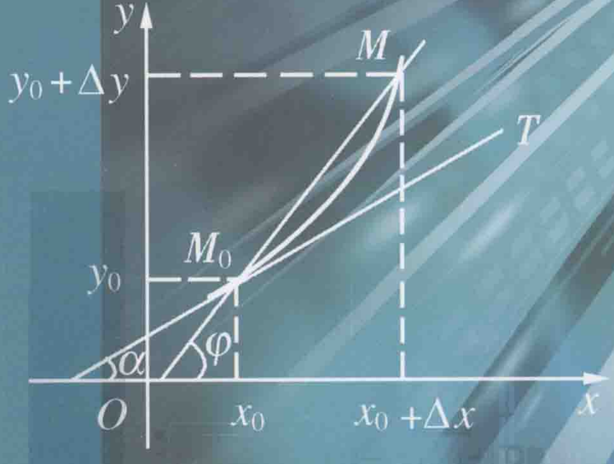
高等学校小学教育专业教材

高等数学

（第二版）

周明儒　主编



南京大学出版社

学校小学教育专业教材

高等数学

（第二版）

主　　编　周明儒
编写成员（以姓氏笔画为序）
王　慈　张晓岚
周明儒　戴朝寿

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 周明儒主编. —2 版. —南京：南京大学出版社，2013. 7

(高等学校小学教育专业教材)

ISBN 978 - 7 - 305 - 11424 - 3

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①周…　Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 089917 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　　邮　编 210093
网　　址　http://www.NjupCo.com
出 版 人　左　健

丛 书 名　高等学校小学教育专业教材
书　　名　高等数学(第二版)
主　　编　周明儒
责任编辑　孙　静　吴　汀　　编辑热线　025 - 83596997

照　　排　南京紫藤制版印务中心
印　　刷　常州市武进第三印刷厂
开　　本　780×960　1/16　印张 22.75　字数 376 千
版　　次　2013 年 7 月第 2 版　2013 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 11424 - 3
定　　价　39.80 元

发行热线　025 - 83594756　83686452
电子邮箱　Press@NjupCo.com
　　　　　Sales@NjupCo.com(市场部)

高等学校小学教育专业教材
编写委员会名单

第二版前言

本书于2000年3月出版第一版，至今已有13年了．期间，五年制师范小学教育专业有了长足的发展，数学教育教学也出现了一些新情况和一些需要解决的问题，南京大学出版社建议我们对本教材作一次修订．为此，我们听取了多年使用该书的一些老师的意见，参看了2009年南京大学出版社出版的五年制高等师范《数学》教材，结合这些年来我们在教学改革实践中的体会，对原教材作了较大的修订．

现在的《高等数学（第二版）》是作为师范小学教育专业学生应有的素质教育教材编写的，供四年级文、理科学生使用．新版本除改正了原书中的一些错误，删去了一些需要物理学知识的应用例题，以及作了文字上的修改外，比较大的改动有：

1．考虑到学生的实际需求，我们将原书的第六章“一些数学分支简介”替换为“线性代数简介”，作为第二版的第五章．

2．为了加强数学与人文的融合，增加了六篇“数学史话”：“欧拉与数e”，“微积分的创立”，“分析学的发展”，“中国传统数学的辉煌与衰退”，“概率论的起源与公理化概率论的建立”，“高斯与正态分布”．删去了原书绪论和§4.6.“数学史话”可在课上介绍，也可让学生课外自己阅读，具体如何处理由任课教师视具体情况而定．

3．积分学中涉及极坐标和参数方程的内容，以及幂级数在收敛区间内的性质，作为选学内容，用小号字排印，并以“*”号标出；删去了无界函数积分的内容．

4．考虑到小学教学实践的需要，将第五章“概率论初步”改为第六章“概率统计初步”，删去§5.7“极限定理简介”，替换为§6.7“总体的估计”．

5．增加了少量难度较大的习题，以“*”号标出，供学有余力的同学选做．

6．书末增加了“习题答案与提示”，供读者参考．

7．鉴于现有多种数学软件可查，删去了附录一“不定积分表”．

8. 为了控制全书篇幅，删去了附录三“外国学者人名索引”.

9. 更换“参考书目”为“主要参考书”.

第二版写作分工仍如同第一版，由王慈负责第一、二章，张晓岚负责第三章的大部分内容和第四章，戴朝寿负责第六章，周明儒负责第三章中§3.10、第五章和“数学史话”.

在本书的修改过程中，我们得到了很多同志的帮助，在此表示衷心的感谢，特别要感谢徐州高等师范学校曾宪安、张兴朝、谭良军、孙虎、杨铮，阜宁高等师范学校张守江，盐城高等师范学校李军，南京幼儿高等师范学校鲍文瀚等老师的大力帮助和提出的宝贵意见. 我们也特别感谢南京大学出版社胡豪、吴华编辑的宝贵帮助和指导.

我们虽有良好的愿望，但囿于学术水平有限和欠缺小教专业数学课程实际教学经验，书中的缺点和错误仍然难免，衷心欢迎使用本书的老师、同学和同行专家们提出意见，不胜感激！

编　者

2013 年 2 月 28 日于

江苏师范大学

目　　录

预 备 知 识

一、实数与数轴

我们知道,实数由有理数与无理数两大类组成.每一个有理数都可以表示为$\frac{p}{q}$,而无理数不能表示为$\frac{p}{q}$(其中 p,q 为整数,$q\neq0$).所以,有理数可以用有限十进小数或无限十进循环小数表示,而无理数为无限十进不循环小数.

设有一条水平直线,在这条直线上取定一点 O,称为原点,指定一个方向为正方向(习惯上指定由原点向右的方向为正方向),再规定一个单位长度,这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为**数轴**.于是,任一实数都对应数轴上唯一的一点;反之,数轴上每一点也都唯一地代表一个实数.这就是说,全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系.在本课程中,我们所研究的数都是实数,故在今后的叙述中,常常对实数与数轴上与它对应的点不加区别,用相同符号表示,如"实数 a"与"点 a"是相同的意思.

二、绝对值

设 a 是一个实数,a 的绝对值记为$|a|$,定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

$|a|$的几何意义:$|a|$在数轴上表示点 a 与原点 O 之间的距离.

绝对值及其运算有下列性质:

(1) $|a|=|-a|\geqslant0$,当且仅当 $a=0$ 时,有$|a|=0$.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

(3) 如果 $h>0$,则有下列集合等式成立:

$$\{a\,|\,|a|<h\}=\{a\,|-h<a<h\},$$
$$\{a\,|\,|a|\leqslant h\}=\{a\,|-h\leqslant a\leqslant h\}.$$

(4) 对于任何实数 a 和 b,成立

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|,$$

即和的绝对值不大于各项绝对值的和.

证 由性质(2),有

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

两式相加,得

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|.$$

再根据性质(3),即有

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

(5) 对于任何实数 a 和 b,成立

$$|a|-|b| \leqslant |a-b|,$$

即差的绝对值不小于各项绝对值的差.

证 由 $|a|=|(a-b)+b|$,利用性质(4),得

$$|a| \leqslant |a-b|+|b|,$$

于是

$$|a|-|b| \leqslant |a-b|.$$

(6) $|ab|=|a||b|$.

(7) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b \neq 0)$.

三、区间与邻域

1. 区间

设 a,b 为实数,且 $a<b$,则数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为以 a,b 为端点的**开区间**,记作 (a,b);数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为以 a,b 为端点的**闭区间**,记作 $[a,b]$;数集 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 和 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 都称为以 a,b 为端点的**半开半闭区间**,分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.

上述三类区间统称为**有限区间**,有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$ 称为区间的长.

同样,还有下面几类**无限区间**:

$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$,

$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$,

$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$,

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$,

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$（全体实数集合）.

2. 邻域

由绝对值的性质(3)得，实数集合

$$\{x \mid |x-a|<\delta,\delta>0\}$$

在数轴上是一个以点 a 为中心、长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，称为**点 a 的 δ 邻域**，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

在微积分中，经常用到实数集合

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta,\delta>0\},$$

这是在点 a 的 δ 邻域内去掉点 a 所成集合，即集合 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，称为**点 a 的空心 δ 邻域**.

点 a 的空心邻域与点 a 的邻域的差别在于点 a 的空心邻域不包含点 a.

第一章 极限与连续

数学极限法的创造是对那些不能够用算术、代数及初等几何的简单方法来求解的问题进行了许多世纪的顽强探索的结果.

拉夫纶捷夫

要想获得真理和知识,唯有两件武器,那就是清晰的直觉和严格的演绎.

笛卡尔

微积分这门学科研究的对象是函数(主要是连续函数),而研究函数的方法是极限法. 就方法论来说,这是高等数学区别于初等数学的显著标志. 本章讲授极限概念与连续函数概念. 在极限部分,为了求抛物线下的面积问题和曲线的切线问题引入数列和函数的极限,介绍极限的定义、性质、运算法则以及两个重要极限. 在连续函数部分,简明地叙述连续的概念、初等函数的连续性以及闭区间上连续函数的基本性质.

§1.1 数列极限

极限概念是微积分中最基本的概念,微积分学中几乎所有的概念,如导数、积分,都是用极限概念来表达的. 极限方法贯穿于微积分的始终,马克思在数学手稿中指出,微积分从一开始就"提供了一种奇特的、不同于普通代数的计算方法". 这一方法经历了漫长的历史,特别是经过 17 世纪众多数学家的努力,才成为现在的表达形式.

一、极限思想

引例(抛物线下的面积) 设给了一个如图 1.1 所示的曲边梯形,其

中只有一个曲边，它是抛物线 $y=x^2$ 的一段. 试计算这个曲边梯形的面积 S.

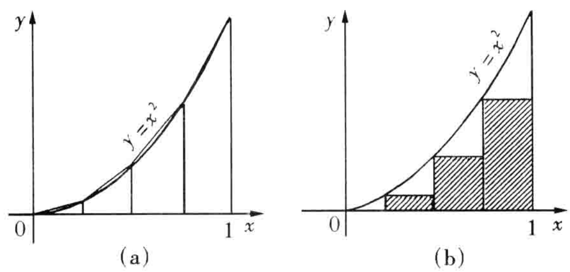


图 1.1

由于图形的一边是曲的，其面积不能用初等数学方法计算，我们设想把 x 轴上从 0 到 1 那一段分成许多小段，再从所有分点引平行于 y 轴的直线，将曲边梯形分成许多很窄的竖条. 虽然每一个竖条的上面那个边还是曲的，但由于竖条很窄，从计算面积的角度来看，我们可以像图1.1(a)近似地把它看作小梯形. 或者，思想更放开一点，像图 1.1(b)中那样把它看作小矩形. 若以第二种方法计算，用分点

$$0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1$$

把线段[0,1]分成 n 个相等的小段，在每个小段上作一矩形，得到 n 个小矩形，它们的底边长都是$\frac{1}{n}$，而高度分别为

$$0,\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

因此，它们的面积分别等于

$$0\cdot\frac{1}{n},\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n},\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n},\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

n 个小矩形面积的总和(如图 1.1(b)中阴影部分)S_n 为

$$\begin{aligned}S_n&=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\&=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\&=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}+a_n,\end{aligned}$$

其中 $a_n=\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}$. 分别取 n 等于 10,100,1000,得

$$a_{10}\approx-0.048,\quad a_{100}\approx-0.005,\quad a_{1000}\approx-0.0005.$$

可见,随着 n 的增大,$|a_n|$ 越来越小,最后趋于 0,而 S_n 就越来越趋近于 $\frac{1}{3}$. 从几何直观看,分割越细,即份数 n 越大,所求面积 S 与 S_n 的差的绝对值就越小;随着 n 趋于∞,S 与 S_n 的差别就消失了,面积 S 就是$\frac{1}{3}$,或者说 S_n 的极限就是$\frac{1}{3}$.

这种全新的数学方法就是极限方法. 我国魏晋时(公元 3 世纪)杰出数学家刘徽的"割圆术"就含有朴素的极限思想. 他首先作圆的内接正六边形,然后平分每个边所对的弧,再作圆的内接正十二边形,由此,继续作圆的内接正二十四边形、内接正四十八边形等等(如图 1.2). 用这些多边形的周长来近似表示圆周长,随着边数的增多,多边形周长越来越接近圆周长. 刘徽说:"割之弥细,所失弥少;割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣."即随着边数的无限增加,多边形周长与圆周长之差越来越小,多边形周长的极限就是圆周长.

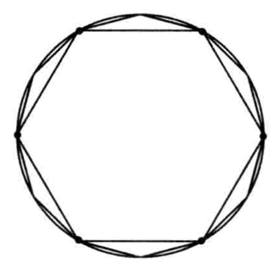


图 1.2

二、数列极限的概念

1. 数列

定义 1 以正整数 n 为自变量的函数 $a_n=f(n)$,当 n 依次取 $1,2,\cdots,n,\cdots$时所得到的一列数

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

称为无穷数列,简称为**数列**. 数列中的每个数称为数列的**项**,a_n 称为数列的**通项**. 数列可简记为$\{a_n\}$.

下面举一些数列的例子.

(1) $a_n=2n$: $2,4,6,\cdots,2n,\cdots$

(2) $a_n=\frac{1}{2^n}$: $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$

(3) $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$: $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots$

(4) $a_n=(-1)^{n+1}$: $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$

(5) $a_n=\frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

(6) $a_n=1+(-1)^n\frac{1}{2^n}$: $\frac{1}{2},\frac{5}{4},\frac{7}{8},\cdots,1+(-1)^n\frac{1}{2^n},\cdots$

由这些例子可以看出，当 n 无限增大时，它们有着各自的变化趋势. 下面，我们通过对几个具体数列的变化趋势从直观到精确的分析，引进数列极限的定义.

2. 数列极限的概念

首先，在上述六个数列中，有的数列，如(2)，(3)，(5)，(6)，“当 n 无穷增大时，a_n 能与某个常数 a 任意接近”. 这时我们就说数列 a_n 为收敛数列，a 称为它的极限，记为 $a_n\to a\ (n\to\infty)$. 例如 $\frac{1}{2^n}\to 0\ (n\to\infty)$，$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，$\frac{n}{n+1}\to 1\ (n\to\infty)$. 有的数列就不具备这种特性，如$\{2n\}$，$\{(-1)^{n+1}\}$均不收敛，这是因为当 $n\to\infty$ 时，数列$\{2n\}$的通项 $2n$ 也无限制地增大，从而不能无限地接近于任何一个确定的数. 至于$\{(-1)^{n+1}\}$，由于它各项的值随着 n 的改变而在 -1 与 1 这两个数值上跳来跳去，也不能无限地接近于某一个确定的数.

收敛数列的特性是“当 $n\to\infty$ 时，a_n 能与某个常数 a 任意接近”. 从几何上说就是“当 $n\to\infty$ 时，a_n 与 a 的距离可任意小”，即“当 $n\to\infty$ 时，$|a_n-a|$ 可任意小”. 说得更明确些，这就是说，“要使 $|a_n-a|$ 任意小，只要 n 充分大”. 比如，对于数列 $a_n=\frac{n}{n+1}$，由于

$$|a_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1},$$

要使 $|a_n-1|<\frac{1}{10}$，只要 $n>9$ 便可；要使 $|a_n-1|<\frac{1}{100}$，只要 $n>99$ 便可. 一般说来，要使 $|a_n-1|$ 小于任意给的无论多么小的正数 ε，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$ 便可. 这样，我们就可以给出一般收敛数列及其极限的概念.

定义 2(ε-N 定义) 设$\{a_n\}$是一个数列，a 是一个有限数. 若对任给的正数 ε(不管如何小)，总存在着一个正整数 N，使得对于 $n>N$ 的一切 a_n，不等式

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称数列$\{a_n\}$**收敛**于 a，a 称为它的**极限**，并记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

或

$$a_n \to a\ (n\to\infty).$$

若数列$\{a_n\}$没有极限,则称它是**发散**的.

数列极限的 ε-N 定义并未提供如何去求已知数列极限的方法,求极限的方法,以后会不断学到.

为了真正掌握定义的实质,必须通过例题细心体会.

例 1 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

证 由于

$$|a_n-a| = \left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \frac{1}{n+1},$$

为使$|a_n-a|$小于事先给定的正数 ε,只需使不等式

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

成立,或

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon},\quad 即\quad n > \frac{1}{\varepsilon}-1.$$

由此,可取正整数 $N\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}-1$. 则当 $n>N$ 时,总有

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| < \varepsilon.$$

依 ε-N 定义,证得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

例 2 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

证 对于任给 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),要使

$$\left|\frac{1}{2^n}-0\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

成立,只要

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon},\quad 即\quad n\lg 2 > -\lg\varepsilon,$$

或 $n>-\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg 2}$成立就可以了. 故可取 $N\geqslant-\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg 2}$,则当 $n>N$ 时,总有

$$\left|\frac{1}{2^n}-0\right| < \varepsilon.$$

结论得证.

一般地,可以证明$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0\ (|q|<1)$.

例 3　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>1)$.

证　令$a^{\frac{1}{n}}-1=\alpha$,则$\alpha>0$. 由二项式定理推得

$$a=(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha=1+n(a^{\frac{1}{n}}-1),$$

或

$$a^{\frac{1}{n}}-1\leqslant\frac{a-1}{n}.$$

现任给$\varepsilon>0$,只需$\frac{a-1}{n}<\varepsilon$,或$n>\frac{a-1}{\varepsilon}$,就有$|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$. 今取正整数$N\geqslant\frac{a-1}{\varepsilon}$,则当$n>N$时,总有

$$|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon,$$

从而结论成立.

数列极限的几何意义:从几何上说,定义中"使得对于$n>N$的一切a_n,不等式$|a_n-a|<\varepsilon$成立"就是凡下标大于N的一切a_n,都落在a的ε邻域内(如图 1.3 所示),而在这个邻域之外,至多有N(有限)个项. 或者说收敛于a的数列$\{a_n\}$,在点a的任何邻域内聚集着$\{a_n\}$中几乎所有点. 数列$\{2n\}$与$\{(-1)^{n+1}\}$不收敛,正是因为它们不可能在某点的任意小邻域内凝聚它们中的几乎所有点.

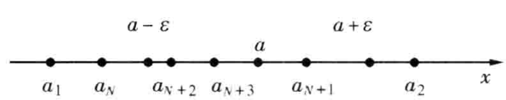


图 1.3

3. 无穷小数列

在收敛数列中,有一类重要数列,称为无穷小数列.

定义 3　若数列$\{a_n\}$收敛,且以 0 为极限,则称$\{a_n\}$为**无穷小数列**或**无穷小**.

前面的数列(2),(3)都是无穷小数列.

由无穷小的定义,容易证明收敛数列与无穷小数列有如下的关系:数列$\{a_n\}$收敛于a的充分必要条件是$\{a_n-a\}$是无穷小数列. 因而,对数列收敛性的研究,可归结为对相应无穷小数列的讨论. 所以,极限论也称为无穷小分析. 如例 3,由于$\{a^{\frac{1}{n}}-1\}$是无穷小数列,所以$\{a^{\frac{1}{n}}\}$必收敛于 1.