普通高等职业教育数学精品教材

应用数学

◉ 主编 姜淑莲 朱双荣

◉ 主审 朱春浩

Yingyong Shuxue

華中科技大學出版社

http://www.hustp.com

普通高等职业教育数学精品教材

应用数学

主　编　姜淑莲　朱双荣
副主编　韩新社
主　审　朱春浩

华中科技大学出版社
中国・武汉

内 容 提 要

本书是根据高职高专教育高等数学课程教学基本要求编写而成的.本书注重培养学生应用数学概念、数学思想及方法来消化、吸收工程概念及工程原理的能力,强化学生应用所学的数学知识求解数学问题的能力,特别是增加数学实验的内容,可极大地提高学生利用计算机求解数学模型的能力.本书主要内容包括级数、微分方程及其应用、复变函数初步与积分变换、矩阵与行列式、线性规划初步、概率与数理统计、数学实验.

本书可作为高职高专工科教材,也可作为工程技术人员的高等数学知识更新的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/姜淑莲　朱双荣　主编.—武汉:华中科技大学出版社,2010.9
ISBN 978-7-5609-6563-5

Ⅰ.应…　Ⅱ.①姜…　②朱…　Ⅲ.应用数学　Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 177173 号

应用数学　　　　姜淑莲　朱双荣　主编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:王汉江
封面设计:刘　卉
责任校对:李　琴
责任监印:周治超
出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437
录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂
开　本:710mm×1000mm　1/16
印　张:19.5
字　数:380 千字
版　次:2010 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
定　价:34.00 元

前　言

随着高等教育的蓬勃发展，高校教学改革正在不断地深入进行. 本教材是为了适应高等职业教育快速发展的要求和高等职业教育培养高技能人才的需要，适应高等职业教育大众化发展趋势的现状，以我们从事多年高职教学实践和经验及在认真总结全国高职高专院校理工类各专业高等数学课程教学改革经验的基础上编写而成的.

本书在编写过程中我们努力遵循了以下原则.

1. 本书注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，加强对学生的数学应用意识、兴趣及能力培养. 培养学生用数学的原理和方法消化、吸收工程概念、工程原理的能力，以及消化、吸收专业知识的能力. 本书加强数学建模教学内容，将工程问题转化为数学问题的思想贯穿各章，注重与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不追求过分复杂的计算和变换.

2. 缓解课时少与教学内容多的矛盾，适当地把握教学内容的深度和广度，遵循基础课理论知识以"必需、够用"为度的教学原则，不过分追求理论上的严密性，尽可能显示数学的直观性与应用性，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性.

3. 为培养学生应用计算机及相应数学软件求解数学问题的能力，结合具体教学内容，不但极大地提高了学生利用计算机求解数学问题的能力，而且提高了学生学数学、用数学的积极性.

4. 充分考虑高职高专学生的特点，在内容编排上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力，以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力培养. 对课程的每一主题都尽量从几何、数值、解析和语言四个方面加以体现，避免只注重解析推导.

5. 在各个章节的开始，用尽可能短的语言点题，以便读者了解本章或本节所研究问题的来龙去脉，起到承上启下的作用，增加可读性. 每章的最后都有数学史话，能使读者更多地了解数学的发展史.

全书内容包括级数、微分方程及其应用、复变函数初步与积分变换、矩阵与行列式、线性规划初步、概率与数理统计、数学实验共 7 章，每节后附有习题，并在书后给出了答案或提示，此外在书后附有 7 个附录，便于读者查阅.

本书第 1、2 章由阮淑萍副教授编写，第 3 章由姜淑莲副教授编写，第 4 章由王文平副教授编写，第 5 章由彭立新副教授编写，第 6 章由朱双荣副教授编写，第 7 章由韩新社副教授编写.

本书由姜淑莲和朱双荣任主编，韩新社任副主编，朱春浩任主审. 全书由朱双荣和姜淑莲负责统稿、定稿.

本书在编写过程中，得到了武汉船舶职业技术学院教务处及其他部门的大力支持，在此向他们谨致谢意.由于作者水平有限，不妥与错误在所难免，敬请专家、同仁和广大读者批评指正，以便我们修订提高.

编　者

2010 年 7 月

目　　录

第 1 章　级　　数

级数是高等数学的重要内容，它是表示函数、研究函数的性质及进行数值计算的一种工具. 在科学领域中有着广泛的应用. 它主要包括数项级数和函数项级数两部分. 本章先介绍数项级数的一些基本内容，然后讨论函数项级数，着重讨论如何将函数展开成幂级数和将周期函数展开为傅里叶级数的问题.

1.1　级数的概念及其性质

1.1.1　级数的概念

定义 1.1　给定一个数列 $\{u_n\}$：$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，则表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1-1}$$

称为**无穷级数**，简称**级数**，简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$，其中，$u_n$ 称为级数的**一般项**或**通项**. u_n 是常数的级数称为**常数项级数**，简称**数项级数**；u_n 是函数的级数称为**函数项级数**.

例如，

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots,$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

都是数项级数. 又如

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \cdots,$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx + \cdots$$

都是函数项级数. 本节只讨论数项级数.

上面数项级数的定义是纯粹的形式上的定义. 它指出级数是无穷多项的累加. 但是，无穷多项相加是怎么加，能否有“和”，定义并没有指出. 事实上，有限个数相加，其和是确定的，无限多个数相加就不一定有意义了. 为此，下面从有限项的和出发再经过极限过程来讨论无限项的情形.

定义 1.2 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项之和 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，称为该**级数的部分和**. 当 n 依次取 1,2,3,⋯ 时，得到一个新的数列 $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, \cdots$，这个数列称为**级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列**.

如果当 $n \to \infty$ 时，此 s_n 的极限存在，即 $\lim_{n \to \infty} s_n = s$，则称 s 为该级数的和，即

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是**收敛**的. 如果当 $n \to \infty$ 时，s_n 的极限不存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是**发散**的，发散的级数没有和.

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，其部分和 s_n 是级数的和 s 的近似值，它们之间的差值 $R_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 称为**级数的余项**，用近似值 s_n 代替和 s 所产生的误差是这个余项的绝对值 $|R_n|$. 这为借助级数作近似计算提供了基本依据.

例 1 判断级数 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$ 是否收敛？若收敛，求其和.

解 由于级数的一般项 $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$，因此部分和为

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

又因 $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$，所以此级数收敛，它的和为 1.

例 2 判断级数 $\ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} + \cdots$ 的敛散性.

解 由于部分和

$$\begin{aligned} s_n &= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} \\ &= \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1), \end{aligned}$$

又因 $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \ln(n+1) = \infty$，因此该级数发散.

例 3 讨论等比级数（又称几何级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

的敛散性，其中 $a \neq 0$，q 是级数的公比.

解 (1) 若 $|q| \neq 1$，则部分和

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

当 $|q| < 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$，所以级数收敛，其和 $s = \dfrac{a}{1-q}$.

当 $|q| > 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ 不存在，因而当 $n \to \infty$ 时，s_n 的极限不存在，这时级数发散.

(2) 若 $|q| = 1$，则分以下两种情况讨论.

当 $q = 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$，因而级数发散.

当 $q = -1$ 时，s_n 交替地取 a 和 0 两个数值，所以当 $n \to \infty$ 时，s_n 的极限不存在，此时级数发散.

综上所述，对于等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$，若 $|q| < 1$，级数收敛；若 $|q| \geqslant 1$，级数发散.

特别地，当 $a = 1$，$q = x$ 且 $|x| < 1$ 时，有

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

这个结果今后会经常用到.

例 4 证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots$ 是发散的.

证 直接考察级数的部分和.

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2},$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

类似地，有 $s_{16} > 1 + \dfrac{4}{2}$，$s_{32} > 1 + \dfrac{5}{2}$，…. 用数学归纳法可得不等式

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

所以部分和数列 $\{s_n\}$ 必发散，故调和级数发散.

1.1.2 级数的性质

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

证 由 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = s_{n-1} + u_n$，得

$$u_n = s_n - s_{n-1}.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，显然 s_n 和 s_{n-1} 有相同的极限 s，故

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

据性质 1 知，若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 不成立，即 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 我们经常用这个结论来证明级数发散.

例如，级数 $1+2+4+\cdots+2^{n-1}+\cdots$，因为 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1} \neq 0$，所以这个级数是发散的.

注意 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件，但不是充分条件.

例如，从例 2 可以看出，尽管 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{n} = 0$，但是该级数是发散的. 又例如，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，尽管 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，此级数也是发散的.

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = Cs$（$C$ 为常数，且 $C \neq 0$）.

即级数的每一项同乘以一个不为零的常数后，它的敛散性不变.

性质 3 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = B$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = A \pm B$.

即两个收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

性质 4 一个级数增加或减少有限项，不改变级数的敛散性，但收敛级数的和一般会改变.

例如，等比级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 是收敛的，其和 $s = \frac{1}{1-1/2} = 2$，去掉它的前两项得到的等比级数 $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ 仍是收敛的，但其和 $s = \frac{1/4}{1-1/2} = \frac{1}{2}$.

例 5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{e^n}$ 是否收敛？若收敛，求其和.

解 由例 3 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e^n}$ 是公比为 $q=\frac{1}{e}$ 的等比级数,它是收敛的,且其和为

$$\frac{2/e}{1-1/e}=\frac{2}{e-1};$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^n}$ 是公比 $q=-\frac{1}{e}$ 的等比级数,它也是收敛的,且其和为

$$\frac{-1/e}{1-(-1/e)}=-\frac{1}{e+1}.$$

所以,由性质 3 可知,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{e^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{e^n}+\frac{(-1)^n}{e^n}\right]$$

收敛,其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{e^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^n}=\frac{2}{e-1}+\frac{-1}{e+1}=\frac{e+3}{e^2-1}.$$

习 题 1.1

1. 写出下列级数的一般项.

(1) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\cdots$;

(2) $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{5}{10}+\frac{7}{17}+\cdots$;

(4) $\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{x}{5}+\frac{x\sqrt{x}}{7}-\frac{x^2}{9}+\cdots$;

(5) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{2\ln 3}+\frac{1}{3\ln 4}+\cdots$;

(6) $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$.

2. 根据定义判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

1.2 数项级数的审敛法

用级数收敛和发散的定义及级数的性质可以判断级数是否收敛,但求部分和及其极限并非易事,因此需要建立级数敛散性的判别法,本节将介绍几种常用的数项级数的审敛法.

1.2.1 正项级数的审敛法

定义 1.3 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,若 $u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**正项级数**.