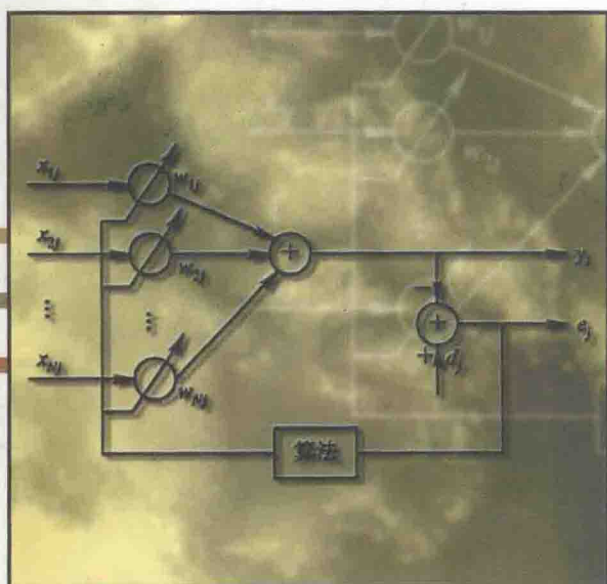




研究生
学习指导丛书

Postgraduate


《数字信号处理 ——时域离散随机信号处理》 学习指导



■ 阔永红 编著

- 内容提要
- 典型例题
- 习题解答
- 补充习题

西安电子科技大学出版社 <http://www.xduph.com>

 研究生学习指导丛书

《数字信号处理——时域离散随机 信号处理》学习指导

阔永红 编著

西安电子科技大学出版社

2004

内 容 简 介

本书是与研究生教材《数字信号处理——时域离散随机信号处理》配套的辅导用书。

该书在原教材的基础上,对各章内容进行了简单的总结,并指明了各章的内容要求。为了配合书中的理论知识,作者精选了部分例题,并给出了书后习题的解答,最后,又给出了一些补充习题供同学练习。

参考《硕士学位全国统一考试大纲及指南》和其他院校《数字信号处理Ⅱ》的大纲,以及考虑到教材第五章《时频分析》和第六章《小波分析的基本原理和应用》都有专门的课程进行深入讨论,本书仅对教材的前四章内容进行了讨论,没有涉及后两章内容。

本书可供理工科研究生、高年级本科生阅读,也可作为从事相关专业的工程人员参考。

研究生学习指导丛书

《数字信号处理——时域离散随机信号处理》学习指导

阎永红 编著

策 划 夏大平

责任编辑 夏大平

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

http://www.xduph.com E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西光大印务有限责任公司

版 次 2004年11月第1版 2004年11月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 8.5

字 数 198千字

印 数 1~4000册

定 价 10.00元

ISBN 7-5606-0922-8/TN·0160

XDUP 1193B01-1

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

数字信号处理中的离散时间信号处理发展迅速，其应用已遍及各个专业和领域，成为信号处理的主要方法。根据待处理的信号是否具有确定性，数字信号处理可以分为确定性信号的数字化处理和随机信号的数字化处理，其中本科阶段主要讨论确定性信号的数字化处理，随机信号的数字化处理特别是平稳随机信号的数字化处理，是工科硕士研究生的基础课。

平稳随机信号处理是以维纳滤波为基础的。《数字信号处理——时域离散随机信号处理》教材共分六章。其中前四章是以平稳随机信号作为研究对象的，第一章时域离散随机信号的分析是全书的基础；第二章、第三章主要讨论了最佳滤波，包括维纳滤波、卡尔曼滤波、维纳预测和自适应滤波，这些滤波都是在均方误差最小的误差准则下实现的滤波，第三章还讨论了最小二乘自适应滤波，并讨论了最小二乘自适应格型滤波器和最小二乘自适应横向滤波器；第四章讨论了功率谱估计，包括了经典谱估计和现代谱估计，现代谱估计的重点是 AR 模型谱估计。第五章时频分析和第六章小波变换的基本原理和应用属非平稳信号分析的内容。近几年来，非平稳随机信号的分析与处理发展很快，内容也日益丰富，第五章、第六章的内容都有专门的课程进行深入的讨论。

教材已于 2002 年秋季出版，并在实际教学中使用了两年，教学中我们仅讨论了教材的前四章内容，并且对最小二乘滤波不作要求。教材已被选作《同等学力人员申请硕士学位综合水平全国统一考试》的参考书目。参考《同等学力人员申请硕士学位综合水平全国统一考试》的大纲要求以及其他院校硕士研究生数字信号处理的教学大纲，平稳随机信号的处理作为硕士研究生数字信号处理的基本内容，而非平稳信号的分析通常不作要求，因此本书作为这部教材的学习指导书，仅涵盖了教材的前四章内容。

本书主要针对教学过程中学生存在的问题而编写，与教材内容配套，由四章组成。每一章包括四部分，分别是内容要点、典型例题、习题解答和补充习题。在每一章的内容小结中，对各章内容进行总结，提出教学要求，并解答难以理解的问题；典型例题主要是结合教材的内容，并适当加深，精选了若干例题；第三部分给出了教材各章习题的解答；最后补充了若干习题供同学们练习。

本书的编辑夏大平老师为书稿付出了辛苦的劳动，并且对书稿的编排提出了许多宝贵意见，特在此表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中不可避免地存在不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

本书得到了西安电子科技大学研究生教材建设基金的资助。

编著者

2004 年 9 月

目 录

第 1 章 时域离散随机信号的分析	1
1.1 内容要点	1
1.1.1 随机信号的统计描述	1
1.1.2 随机信号通过一个线性时不变系统	4
1.1.3 随机信号的估计理论	5
1.1.4 时间序列信号模型	7
1.2 典型例题	10
1.3 习题解答	17
1.4 补充习题	25
第 2 章 维纳滤波和卡尔曼滤波	27
2.1 内容要点	27
2.1.1 维纳滤波的时域解	27
2.1.2 维纳滤波的复频域解	29
2.1.3 维纳预测	31
2.1.4 卡尔曼滤波	34
2.2 典型例题	39
2.3 习题解答	46
2.4 补充习题	54
第 3 章 自适应数字滤波器	56
3.1 内容要点	56
3.1.1 自适应横向滤波器	56
3.1.2 自适应格型滤波器	62
3.1.3 自适应滤波的应用	64
3.1.4 最小二乘滤波	68
3.2 典型例题	79
3.3 习题解答	87
3.4 补充习题	101
第 4 章 功率谱估计	103
4.1 内容要点	103
4.1.1 经典谱估计	103
4.1.2 现代谱估计	109

4.2 典型例题	118
4.3 习题解答	121
4.4 补充习题	128
参考文献	130

第1章 时域离散随机信号的分析

1.1 内容要点

本章是对随机信号认识的总结和加深,包括四项基本内容:随机信号的统计描述、随机信号通过一个线性时不变系统、随机信号的估计理论和时间序列信号模型。

1.1.1 随机信号的统计描述

随机信号在任何一个时间点上的取值都是不能事先精确确定的随机变量。随机信号最根本的特征是信号随时间和状态的变化而变化,当时间确定时,随机信号变化为一个随机变量;当状态确定(某次试验)时,随机信号变化为一个时间函数;当时间和状态都确定时,随机信号为一个确定量;当时间和状态都发生变化时,称为随机信号或随机过程。

一个随机信号既可以用分布函数、概率密度函数来描述,也可以用数字特征量以及在本章引出的时间序列信号模型来描述。

分布函数和概率密度函数虽可以对随机信号进行完整的描述,但除了特殊类型的随机信号外,在实际当中很难得到它,而随机信号的数字特征比较容易获取和计算,并能满足实际的需要。随机信号的数字特征可以用矩函数统一描述,包括原点矩函数和中心矩函数。设离散随机信号 $x(n)$, 简记为 x_n , 它的 l 阶原点矩定义为

$$E[x_n^l] = \sum_i x_i^l p(x_i) \quad (1-1)$$

l 阶中心矩定义为

$$E[(x_n - E(x_n))^l] = \sum_i (x_i - E(x_i))^l p(x_i) \quad (1-2)$$

常用的原点矩函数有:一阶原点矩 $E[x_n]$, 称为信号的均值函数, 记作 m_x ; 二阶原点矩 $E[x_n^2]$, 又称作该信号的均方值。一阶中心矩函数始终为零, 二阶中心矩函数 $E[(x_n - m_x)^2]$ 称作信号的方差, 记作 σ_x^2 , 见式(1-3)、(1-4)和(1-5)所示。

$$m_{x_n} = E[x_n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i x_i p(x_i) \quad (1-3)$$

$$E[x_n^2] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i x_i^2 p(x_i) \quad (1-4)$$

$$\sigma_{x_n}^2 \stackrel{\text{def}}{=} E[(x_n - E(x_n))^2] = E[x_n^2] - m_{x_n}^2 \quad (1-5)$$

当信号 x_n 为一个电压信号时, 均值函数表示该信号在 1Ω 电阻上的直流分量, 均方值表示该信号在 1Ω 电阻上消耗的平均功率, 方差表示该信号在 1Ω 电阻上消耗的交流功率。

常用的二阶矩函数还有自相关函数 $r_{xx}(n, n+m)$ 和自协方差函数 $C_{xx}(n, n+m)$ ，定义式如下：

$$r_{xx}(n, n+m) \stackrel{\text{def}}{=} E[x_n^* x_{n+m}] \quad (1-6)$$

$$C_{xx}(n, n+m) \stackrel{\text{def}}{=} E[(x_n - m_x)^* (x_{n+m} - m_x)] \quad (1-7)$$

这里我们所讨论的信号都是宽平稳随机信号，即满足信号的均值为常数，自相关函数只与时间间隔有关，均方值为一个有界数。用公式表示，即

$$\begin{aligned} m_x &= \text{常数} \\ r_{xx}(n, n+m) &= r_{xx}(m) \\ E[x_n^2] &< +\infty \end{aligned}$$

因此，对于一个实平稳随机信号，协方差函数与自相关函数之间满足下式：

$$\begin{aligned} \sqrt{C_{xx}(n, n+m)} &= C_{xx}(m) \stackrel{\text{def}}{=} E[(x_n - m_x)^* (x_{n+m} - m_x)] \\ &= r_{xx}(m) - m_x^2 \end{aligned} \quad (1-8)$$

如果随机信号的均值为零，由式(1-8)有

$$r_{xx}(m) = C_{xx}(m)$$

在后面的分析中，我们主要研究信号的自相关函数，而不讨论它的协方差函数，这是由于在处理信号时，一般都先经过一个预处理，使信号的均值为零。信号的预处理过程如图 1-1 所示。

信号 → 预处理 → 均值为零的处理 → 后续处理

图 1-1 数字信号的预处理

当研究对象为实平稳的随机信号时，自相关函数具有以下性质：

(1) 自相关函数是偶函数，即

$$r_{xx}(m) = r_{xx}(-m)$$

(2) 自相关函数在原点的值为信号的均方值，即

$$r_{xx}(0) = E[x_n^2]$$

(3) 自相关函数在原点处取得最大值，即

$$r_{xx}(0) \geq |r_{xx}(m)|$$

(4) 自相关函数在自变量趋于无穷时，得到均值的平方，即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{xx}(m) = m_x^2$$

因此，可以看出在时域内描述一个随机信号最重要的数字特征量为相关函数，有了自相关函数，可以推出信号的均值函数、均方值函数；在频域内最重要的数字特征量为功率谱和复功率谱，这里统一用 $S_{xx}(z)$ 表示复功率谱，用 $P_{xx}(e^{j\omega})$ 表示功率谱， $S_{xx}(z)$ 与 $r_{xx}(m)$ 之间通过维纳—辛钦定理联系。

$$\begin{cases} S_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_{xx}(m) \cdot z^{-m} \\ r_{xx}(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C S_{xx}(z) \cdot z^{m-1} dz \end{cases} \quad (1-9)$$

$P_{xx}(e^{j\omega})$ 与 $r_{xx}(m)$ 通过傅里叶变换联系，

$$\begin{cases} P_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_{xx}(m) \cdot e^{-j\omega m} \\ r_{xx}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega m} d\omega \end{cases} \quad (1-10)$$

实平稳随机信号的功率谱具有以下性质：

(1) 功率谱是 ω 的偶函数，即

$$P_{xx}(e^{j\omega}) = P_{xx}(e^{-j\omega}) \quad (1-11)$$

(2) 功率谱是非负实函数，即

$$P_{xx}(e^{j\omega}) \geq 0 \quad (1-12)$$

相关函数和功率谱是反映一个随机信号常用的特征量。

拿到一组观测数据，就是获得了该随机信号的一条样本曲线。根据这组观测数据可以计算出信号的时间均值 $A\langle x(t) \rangle$ 和时间相关函数 $k_x(t, t+\tau)$ ，计算公式如下：

$$A\langle x(t) \rangle = \overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (1-13)$$

$$k_x(t, t+\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^*(t)x(t+\tau) dt \quad (1-14)$$

这里， $A\langle x(t) \rangle$ 和 $k_x(t, t+\tau)$ 是根据一条样本曲线得到的时间平均。在本书研究的平稳随机信号中，假设信号都具有各态历经性，也称作遍历性。

研究遍历性的意义在于可以用一次样本曲线的时间平均代替该随机信号的统计平均，即随机信号的时间均值 $A\langle x(t) \rangle$ 和时间相关函数 $k_x(t, t+\tau)$ 以概率为 1 收敛于相应的统计平均，因此，宽遍历的随机信号的均值和相关函数都可以用相应的时间平均来代替，即

$$\begin{cases} A\langle x(t) \rangle = \overline{x(t)} = E[x(t)] = m_x \\ k_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = E[x(t)x(t+\tau)] = R_x(\tau) \end{cases} \quad (1-15)$$

常用的随机信号有高斯信号、白噪声和谐波过程。对于一个高斯信号，知道了它的均值函数和自相关函数矩阵，就可以写出该信号的概率密度函数，从而求出相应的统计特征量。

白噪声信号是随机性最强的信号，在任意两个不同时刻，信号都是不相关的，它的自相关函数可以表示为

$$r_{x_n x_m} = \sigma_{x_n}^2 \delta_{nm} = \begin{cases} \sigma_{x_n}^2 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (1-16)$$

对于一个平稳白噪声信号，它的自相关函数为

$$r_{xx}(m) = \sigma^2 \delta(m) \quad (1-17)$$

这里， σ^2 为该信号的方差。一个零均值的平稳白噪声，它的功率谱在所有频率上都为常数，即

$$P_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma^2 \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (1-18)$$

这里所谓白噪声，是借助了光学上白光的概念，意思是指它包含了一切频率成分而且强度相等。

1.1.2 随机信号通过一个线性时不变系统

图 1-2 表示出了一个线性时不变系统的输入输出关系, 系统的单位取样响应为 $h(n)$ 。下面研究当输入是一个平稳随机信号 $x(n)$ 时的输出信号 $y(n)$ 的数字特征量。

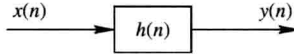


图 1-2 线性系统对随机信号的响应

对于一个线性时不变系统, 当输入平稳时, 输出就平稳, 且输入与输出联合平稳。一个宽平稳的随机信号通过一个线性时不变系统时, 根据线性时不变系统的基本理论, 可以推导得到输出信号的均值、输入与输出的互相关函数、输出的自相关函数以及在复频域的输入与输出的互功率谱、输出信号的功率谱。假设输入信号 $x(n)$ 的均值为 m_x , 自相关函数为 $r_{xx}(m)$, 系统的单位取样响应 $h(n)$ 为实函数, 则:

输出信号的均值 m_y 为

$$m_y = m_x \sum_k h(k) = m_x H(e^{j0}) \quad (1-19)$$

输入与输出的互相关函数 $r_{xy}(m)$ 为

$$\begin{aligned} r_{xy}(m) &= E[x^*(n)y(n+m)] \\ &= E[x^*(n) \sum_k h(k)x(n+m-k)] \\ &= \sum_k h(k)r_{xx}(m-k) \\ &= h(m) * r_{xx}(m) \end{aligned} \quad (1-20)$$

输出的自相关函数 $r_{yy}(m)$ 为

$$\begin{aligned} r_{yy}(m) &= E[y^*(n)y(n+m)] \\ &= r_{xx}(m) * h(m) * h^*(-m) \end{aligned} \quad (1-21)$$

若输入信号的功率谱为 $S_{xx}(z)$, 系统的传输函数为 $H(z)$, 且 $H(z)$ 为实系统, 则输出信号的复功率谱 $S_{yy}(z)$ 为

$$S_{yy}(z) = S_{xx}(z)H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = S_{xx}(z)H(z)H(z^{-1}) \quad (1-22)$$

输入与输出的互复功率谱 $S_{xy}(z)$ 为

$$S_{xy}(z) = H(z)S_{xx}(z) \quad (1-23)$$

在这一节中, 一个重要而有用的定理就是相关卷积定理, 设 $e(n)$ 和 $f(n)$ 是卷积后的输出信号

$$\begin{aligned} e(n) &= a(n) * b(n) \\ f(n) &= c(n) * d(n) \end{aligned}$$

那么

$$r_{ef}(m) = r_{ac}(m) * r_{bd}(m) \quad (1-24)$$

即卷积的相关=相关的卷积。应用相关卷积定理, 可以求解系统输出信号的自相关、输入与输出的互相关等。

在教材第 19 页例 1.4.2 中, 应用相关卷积定理得到

$$r_{y_1 y_2}(m) = r_{x_1 x_2}(m) * r_{h_1 h_2}(m)$$

这里来解释如何理解 $r_{h_1 h_2}(m)$ 。根据相关函数的定义, 我们知道

$$r_{h_1 h_2}(m) = E[h_1^*(n) * h_2(n+m)] \quad (1-25)$$

由于 $h_1(n)$ 、 $h_2(n)$ 为确定性信号, 不用讨论它的相关函数, 这是因为它的函数取值是确定的, 对应的样本曲线只有一条, 因此它的统计平均就等于它自身, 即

$$r_{h_1 h_2}(m) = E[h_1^*(n) * h_2(n+m)] = h_1^*(n) * h_2(n+m)$$

当 $h_1(n)$ 、 $h_2(n)$ 为实信号时, 上式可以写为

$$\begin{aligned} r_{h_1 h_2}(m) &= E[h_1(n) * h_2(n+m)] \\ &= h_1(n) * h_2(n+m) \end{aligned} \quad (1-26)$$

1.1.3 随机信号的估计理论

所有的随机信号处理问题, 都可以归结为信号的估计问题。由于存在观测误差, 即使被估计量是个确定量, 观测数据仍是随机的。数字信号处理中研究不同的信号处理方法, 最终目的就是要从观测数据中抑制噪声, 得到信号的最佳估计。因此讨论估计问题, 不仅包含估计的具体算法, 还包括对估计质量的评价。

估计子最基本的特性体现在偏移性与方差上, 偏移性用偏移量来表示:

$$b = \theta - E[\hat{\theta}_N] \quad (1-27)$$

若 $b=0$, 即 $E[\hat{\theta}_N] = \theta$, 则称 $\hat{\theta}_N$ 为无偏估计; 若 $b \neq 0$, 即 $E[\hat{\theta}_N] \neq \theta$, 则称 $\hat{\theta}_N$ 为有偏估计。无偏估计表示估计量仅在它的真值附近摆动。当样本数目 $N \rightarrow \infty$ 时, 偏移量趋近于 0, 这样的估计称为渐进无偏估计, 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}_N] = \theta \quad (1-28)$$

当估计的偏移量为零时, 评价估计的质量用估计量的方差表征。估计量的方差反映了每一次估计所得结果相对于期望值的平均偏离程度。

$$\text{var} \hat{\theta} = E\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2\} \quad (1-29)$$

好的估计当然是希望 $N \rightarrow \infty$, $\sigma_{\hat{\theta}_N}^2 \rightarrow 0$ 。

评价估计的有效性指标为均方误差, 如果一个估计称作有效估计, 则表示用某一算法得到的估计值与真值之间的均方误差小于用任何其他估计方法的均方误差 $M^2(\theta)$, 定义如下:

$$\begin{aligned} M^2(\theta) &\stackrel{\text{def}}{=} E[(\theta - \hat{\theta})^2] \\ &= E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)]^2 \\ &= E\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + 2E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})] \cdot \{E[\hat{\theta}] - \theta\} + \{E[E(\hat{\theta}) - \theta]\}^2\} \\ &= \text{var}[\hat{\theta}] + b^2(\theta) \end{aligned} \quad (1-30)$$

因此, 估计量的均方误差等于偏移量的平方与方差之和。根据估计误差的统计规律和被估计量与观测数据的统计性质不同, 常用的最优估计有最小二乘估计、线性最小方差估计、最小方差估计、最大后验估计以及最大似然估计等。在教材中, 主要讨论了线性最小

方差估计和最小二乘估计。

1. 一般的最小二乘估计 (Least Square)

设 $\mathbf{X} = \mathbf{A}\theta + \boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{X} 为观测向量, \mathbf{A} 为系数矩阵, \mathbf{X} 、 \mathbf{A} 为已知, 最小二乘估计就是研究如何利用 \mathbf{X} 、 \mathbf{A} 来确定 θ , 并且使误差的平方和为最小, 即

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{A}}\theta)^T (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{A}}\theta) \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{A}}\theta - \hat{\theta}^T \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{X} + \hat{\theta}^T \hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}} \theta \rightarrow \min \end{aligned} \quad (1-31)$$

对 $Q(\theta)$ 关于 θ 求偏导, 得到

$$\hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}} \hat{\theta} = \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{X} \quad (1-32)$$

如果 $\hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}}$ 非奇异, 得到的最小二乘估计为

$$\hat{\mathbf{Q}}_{LS} = (\hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{X} \quad (1-33)$$

否则, $\hat{\mathbf{Q}}$ 不是惟一可辨识的。最小二乘估计还有加权最小二乘估计、广义最小二乘、总体最小二乘等。

2. 线性最小方差估计

设 \mathbf{X} 为被估计值, z 是 \mathbf{X} 的观测数据。如果 $\hat{\mathbf{X}}_L(z) = \mathbf{A}z + \mathbf{b}$, 并且满足

$$E[(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}^T)]_{\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}_L(z)} \rightarrow \min \quad (1-34)$$

称 $\hat{\mathbf{X}}_L(z)$ 为 \mathbf{X} 在 z 上的线性最小方差估计, 对应的误差准则称为均方误差最小, 简称 MMSE (Minimum Mean Square Error)。

3. 递推估计

在前面所讨论的最小二乘估计和最小线性方差估计中, 都是拿到所有的观测数据后进行分析的, 而递推估计是根据前一个时刻的估计值和当前的观测数据来估计当前时刻值的。下面用信号均值的估计来说明递推估计的思想。因为

$$\bar{x}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \quad (1-35)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} x_i = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i + \frac{1}{k+1} x_{k+1} \\ &= \frac{k}{k+1} \bar{x}_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1} \end{aligned} \quad (1-36)$$

所以

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \frac{1}{k+1} (x_{k+1} - \bar{x}_k) \quad (1-37)$$

根据式(1-37), 可以画出递推估计的实现系统, 如图 1-3 所示。递推估计是教材第二章所要讨论的卡尔曼滤波采用的方法。

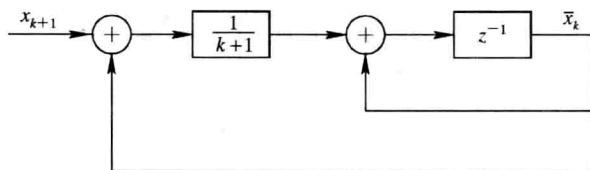


图 1-3 递推估计的实现系统

在教材第 11 页均值估计的方差与均方误差的分析中, 计算均值估计的均方值时用到了下式:

$$E[\hat{m}_x^2] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} E[x_i x_j] \quad (1-38)$$

计算 $E[x_i x_j]$ 时, 需要区分 $i=j$ 和 $i \neq j$ 两种情况, 在 i 和 j 从 0 变化到 $N-1$ 的过程中, $i=j$ 总共有 N 次, $i \neq j$ 总共有 $N(N-1)$ 次。如果数据内部不存在关联性且 $i \neq j$ 时,

$$E[x_i x_j] = E[x_i] E[x_j] \quad (1-39)$$

式(1-38)可以写为

$$\begin{aligned} E[\hat{m}_x^2] &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} E[x_i x_j] \\ &= \frac{1}{N^2} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} E[x_i^2] + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} E[x_i] E[x_j] \right\} \end{aligned} \quad (1-40)$$

分析结果表明, 当数据内部不存在关联性时, 均值的估计是无偏估计, 并且随样本数目 $N \rightarrow \infty$ 时, 估计量的方差趋于零, 因此均值的估计是一致估计。

自相关函数的估计有两种方法: 无偏自相关函数估计和有偏自相关函数估计, 其中, 无偏自相关函数估计的偏移量为零, 具体的表达式如下:

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N - |m| - 1} x^*(n) x(n+m) \quad (1-41)$$

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N - |m| - 1} x^*(n) x(n+m) \quad (1-42)$$

假设信号 $x(n)$ 是实的、均值为零的高斯信号, 教材推导结果表明只有当数据长度 $N \gg m$, 且 $N \rightarrow \infty$ 时, 无偏自相关函数估计量的方差才趋于零; 当 m 趋近于 N 时, 方差将很大。有偏自相关函数估计的偏移量为 $B = \frac{|m|}{N} \cdot r_{xx}(m)$, 是渐近无偏估计; 估计量的方差小于无偏自相关函数估计的方差, 并且当 $N \rightarrow \infty$ 时, 方差趋近于零。因此, 实际中多用有偏自相关函数的估计。

1.1.4 时间序列信号模型

通常用自相关函数、功率谱密度来研究平稳随机信号。近年来, 数学工作者从时间序列分析角度, 提出了一种研究平稳离散随机信号的方法, 称为时间序列信号模型法。时间序列信号模型理论是本章一个新的内容, 它的核心就是当随机信号的功率谱为有理函数时, 一定可以用白噪声通过一个线性时不变系统激励来获得。图 1-4 示出了时间序列信号模型的框图, 其中 $x(n)$ 是功率谱为有理函数的平稳随机信号。

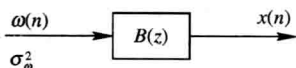


图 1-4 时间序列信号模型

根据线性时不变系统的基本理论,可以得到

$$S_{xx}(z) = \sigma_{\omega}^2 \cdot B(z) \cdot B(z^{-1}) \quad (1-43)$$

$B(z)$ 称作 $x(n)$ 的形成滤波器,也就是我们所说的信号 $x(n)$ 的时间序列信号模型。

时间序列信号模型的实质是把信号看作是白噪声通过一个线性系统的输出,从而把信号与系统联系起来。当输入是平稳白噪声序列时,如果线性系统是稳定的,则输出肯定是平稳的时间序列;如果线性系统是不稳定的,则输出是非平稳的时间序列。

时间序列信号模型把线性系统的稳定性与时间序列的平稳性这两个完全不同的概念联系了起来,这样就可以用线性系统的稳定性来表征时间序列的平稳性,因此,平稳白噪声通过线性系统,其输出是否为平稳取决于线性系统是否稳定。

描述系统的方法如图 1-5 所示。

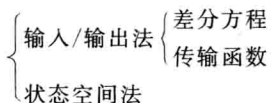


图 1-5 描述系统的方法

在输入/输出法中,用差分方程描述系统的一般形式为

$$\begin{aligned} x(n) &= \omega(n) + \sum_{l=1}^q b_l \cdot \omega(n-l) - \sum_{k=1}^p a_k \cdot x(n-k) \\ &= \sum_{l=0}^q b_l \cdot \omega(n-l) - \sum_{k=1}^p a_k \cdot x(n-k) \end{aligned} \quad (1-44)$$

对应的系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^q b_l \cdot z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot z^{-k}} = \frac{\sum_{l=0}^q b_l \cdot z^{-l}}{\sum_{k=0}^p a_k \cdot z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad a_0 = 1 \quad (1-45)$$

式(1-45)中,该信号属于 ARMA(p, q)模型。如果 $q=0$,对应的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} \quad (1-46)$$

则信号属于 AR(p)模型;如果在式(1-45)中, $p=0$,信号所对应的系统函数为

$$H(z) = \sum_{l=0}^q b_l \cdot z^{-l} = B(z) \quad (1-47)$$

则信号属于 MA(q)模型。

√表示信号的三种时间序列模型是等效的,可以相互转化,但这并不意味着不同模型表示同一时间序列具有相同的效率。一般来讲,当信号的功率谱具有尖峰(无明显深谷),用 AR 模型表示;若功率谱具有深谷(无明显尖峰),用 MA 模型表示。实际应用中,有限阶的 AR 模型用得相当多。

我们知道,如果信号的复功率谱 $S_{xx}(z)$ 是有理函数, z_i 、 z_i^{-1} 是其极点,一定存在

因式:

$$(z - z_i)(z^{-1} - z_i) = 1 - z_i(z + z^{-1}) + z_i^2 \quad (1-48)$$

研究信号的功率谱 $P_{xx}(e^{j\omega})$, 即单位圆上的复功率谱, 引入一个新的变量 φ , 令

$$\varphi = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \cos\omega \quad (1-49)$$

说明信号的功率谱 $P_{xx}(e^{j\omega})$ 是 $\cos\omega$ 的函数。

已知信号的功率谱, 求解它所对应的时间序列信号模型, 结果不惟一。在谱分解定理中, 选择一个零极点都在单位圆内的模型与之对应。谱分解的方法如下:

设 $S_{xx}(z)$ 为有理谱,

- (1) 用 φ 代替 $\cos\omega \rightarrow v(\varphi)$;
- (2) 求 $v(\varphi)$ 分子、分母根 φ_i ;
- (3) 对每个根构造方程

$$\frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \varphi_i$$

求出各方程的根 z_i 、 z_i^{-1} , 且 z_i 为单位圆内的根:

- (4) 用单位圆内的零极点来构成 $H(z)$:

$$H(z) = C \cdot \prod_{i,j} \frac{z - z_i}{z - z_j}$$

- (5) 根据 $S_{xx}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1})$ 来确定参数 C 。

自相关函数、功率谱、时间序列信号模型都是描述平稳随机信号的, 知道它们当中一个, 就可以求出另外两个来。下面分三种情况予以介绍:

(1) 已知信号的自相关函数 $r_{xx}(m)$: 作 Z 变换, 得到信号的复功率谱 $S_{xx}(z)$; 对复功率谱 $S_{xx}(z)$ 进行谱分解, 获得信号的时间序列信号模型 $B(z)$;

(2) 已知信号的复功率谱 $S_{xx}(z)$: 作 Z 反变换, 得到信号的自相关函数 $r_{xx}(m)$; 对复功率谱 $S_{xx}(z)$ 进行谱分解, 获得信号的时间序列信号模型 $B(z)$;

(3) 已知信号的时间序列信号模型 $B(z)$: 根据线性时不变系统的基本理论, 求出信号的复功率谱 $S_{xx}(z)$; 对 $S_{xx}(z)$ 作 Z 反变换, 得到信号的自相关函数 $r_{xx}(m)$ 。

下面来具体分析, 假设已知信号模型, 有两种方法求解自相关函数。如果信号模型很简单, 可以利用自相关函数的定义以及模型表达式直接求自相关函数, 参见教材第 25 页例 1.5.2; 第二种方法更为常用, 见图 1-6。

$$\text{差分方程 } H(z) \rightarrow S_{xx}(z) \rightarrow r_{xx}(m)$$

图 1-6 根据时间序列信号模型求自相关函数

已知自相关函数, 确定信号的模型参数时, 与所选择的模型有关。实际中, 最常用的是 AR 模型, 假设待求的 AR 模型为

$$x(n) + \sum_{i=1}^p a_i x(n-i) = \omega(n) \quad (1-50)$$

根据自相关函数的定义

$$r_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)]$$

$$\begin{aligned}
 &= E\left[x(n) \cdot \left\{ \omega(n+m) - \sum_{i=1}^p a_i x(n+m-i) \right\}\right] \\
 &= - \sum_{i=1}^p a_i r_{xx}(m-i) + E[x(n)\omega(n+m)] \\
 &= \begin{cases} - \sum_{i=1}^p a_i \cdot r_{xx}(-i) + \sigma_w^2 & m=0 \\ - \sum_{i=1}^p a_i \cdot r_{xx}(m-i) & m>0 \end{cases} \quad (1-51)
 \end{aligned}$$

式(1-51)称为 Yule - Walker 方程, 该方程在后面的分析中还要用到。如果自相关函数 $r_{xx}(m)$ 已知, 或者根据观测数据估计出信号的自相关函数 $r_{xx}(m)$, 取 $m=0, 1, \dots, p$, 那么由方程组(1-51)列出 $p+1$ 个方程, 可以求得 a_1, a_2, \dots, a_p 及 σ_w^2 , 共计 $p+1$ 个未知数。

1.2 典型例题

例 1.2.1 已知一个随机信号的观测数据为 $x(n)$, 该信号统计独立, 均值和方差分别为 m_i 和 σ_i^2 , 信号的均值 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, 求 \bar{x} 的方差。

解 设观测数据 $x(n)$ 的均值为 m_i , 即

$$E[x(n)] = m_i$$

首先计算 $x(n)$ 的均值 \bar{x} :

$$E[\bar{x}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \quad (1-52)$$

则 \bar{x} 的方差

$$\begin{aligned}
 \text{var}[\bar{x}] &= E[(\bar{x} - E(\bar{x}))^2] \\
 &= E[(\bar{x})^2] - (E(\bar{x}))^2 \\
 &= E\left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j\right] - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m_j \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n (E[x_i \cdot x_j] - m_i \cdot m_j) \quad (1-53)
 \end{aligned}$$

考虑到观测数据统计独立, 则 $i \neq j$ 时,

$$E[x_i \cdot x_j] = E[x_i] \cdot E[x_j] = m_i \cdot m_j \quad (1-54)$$

将式(1-54)代入式(1-53), 得

$$\text{var}[\bar{x}] = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n (E[x_i^2] - m_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (E[x_i x_j] - m_i m_j) \right] \quad (1-55)$$

第二项等于 0, 推出

$$\text{var}[\bar{x}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (E[x_i^2] - m_i^2) = \frac{1}{n^2} \text{var}[x_i] \quad (1-56)$$

例 1.2.2 一个均值为零、方差为 σ^2 的白噪声, 通过如图 1-7 所示的离散带通滤波器, 求滤波器输出信号的均方值。若白噪声的方差为 0.1, 滤波器是带宽为 1 Hz 的离散低

通滤波器, 该过程为实值, 计算滤波器输出的方差; 若输入信号为高斯过程, 确定滤波器输出的概率密度函数。

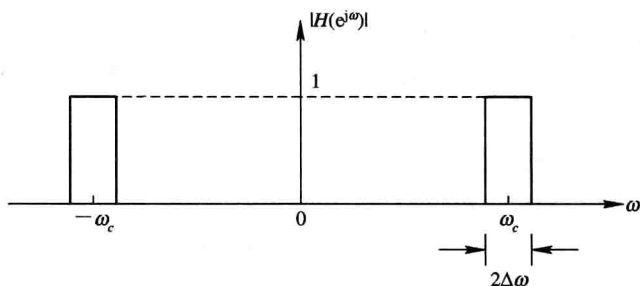


图 1-7 离散滤波器的幅频特性

解 (1) 根据图 1-7 所示, 滤波器的幅频特性为

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & |\omega - \omega_c| < \Delta\omega \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

根据已知条件, 输入信号的功率谱为常数 σ^2 。

由线性时不变系统的基本理论, 输出信号的功率谱为

$$P_{yy}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \sigma^2 & |\omega - \omega_c| < \Delta\omega \\ \theta & \text{其它} \end{cases} \quad (1-57)$$

再由维纳—辛钦定理, 求出输出信号的自相关函数 $r_{yy}(m)$ 在原点的值:

$$\begin{aligned} r_{yy}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{yy}(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\omega_c - \Delta\omega}^{-\omega_c + \Delta\omega} \sigma^2 \cdot d\omega + \int_{\omega_c - \Delta\omega}^{\omega_c + \Delta\omega} \sigma^2 d\omega \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \times 2\Delta\omega \times 2 \\ &= \frac{2\sigma^2 \cdot \Delta\omega}{\pi} \end{aligned} \quad (1-58)$$

由于输入信号的均值为零, 输出信号的均值也为零。

输出信号的方差与自相关函数在原点的值相等。

(2) 若白噪声的方差为 0.1、带宽为 1 Hz, 如图 1-8 所示, 代入式(1-58), 可以得到输出信号的自相关函数在原点的值:

$$\begin{aligned} r_{yy}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-0.5}^{0.5} P_{yy}(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-0.5}^{0.5} P_{yy}(e^{j\omega}) \cdot 2\pi df \\ &= \sigma^2 \\ &= 0.1 \end{aligned} \quad (1-59)$$

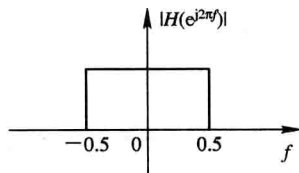


图 1-8 带宽为 1 Hz 的带通滤波器

因此, 此时滤波器输出的方差为 0.1。

(3) 若输入信号为高斯过程, 则通过该线性系统以后, 输出信号仍为高斯过程, 且输