高职高专公共基础课规划教材

高等数学导学

GAODENG SHUXUE DAOXUE

胡跃强 安雪梅 ◎ 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专公共基础课规划教材

高等数学导学

主　编　胡跃强　安雪梅

副主编　陶金瑞　韩启汉

参　编　（按姓氏笔画排序）

王庆报　杨　瑞　周世兴

胡文娟　程锋利

主　审　花　强

机械工业出版社

本书是与陶金瑞老师主编的《高等数学》(上、下)配套的学习指导教材，为便于使用，按照原教材章次对应编写。本书内容框架为：知识剖析、例题解析和自我测验题。

本书集教、学、做为一体，系统罗列了每一章节的知识网络，有助于学生掌握教材中的主要概念、定理和方法；同时指明每章的“基本要求”和“考试要点”，便于学生有目的地学习。

本书既适合作为高职高专院校的教学辅导书，又可作为参加“专接本”考试学生的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学导学/胡跃强，安雪梅主编．—北京：机械工业出版社，2012.8

高职高专公共基础课规划教材

ISBN 978-7-111-39141-8

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①胡…②安…　Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 169416 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)

策划编辑：李大国　责任编辑：刘子峰　责任校对：于新华

封面设计：赵颖喆　责任印制：张　楠

唐山丰电印务有限公司印刷

2012年8月第1版第1次印刷

169mm×239mm·13.5印张·261千字

0001—3000册

标准书号：ISBN 978-7-111-39141-8

定价:20.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010) 88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010) 68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010) 88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010) 88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

教育部《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》中指出："职业教育把提高质量作为重点". 刘延东在2011年全国教育工作会议上的讲话中指出："提高教育质量要有新突破. 要在教师、教材、教法三大重点上下工夫. ……加大教学投入，推进课程改革和教材建设，使教学水平有比较大的提升." 我们以此为指导，在深入研究多种同类教材和广泛吸取同行意见的基础上，结合当前高职教育的特点，组织一批具有丰富教学经验的一线教师，编写了这本《高等数学导学》.

本书是与陶金瑞老师主编的《高等数学》(上、下)(2010年6~8月由机械工业出版社出版)配套的学习指导教材，为便于使用，按照原教材章次对应编写. 本书内容框架为：学习指导、例题解析和自我测验题. 本书集教、学、做为一体，系统罗列了每一章节的知识网络，有助于学生对教材中的主要概念、定理和方法全面、系统的了解；同时列出了每章的"基本要求"和"考试要点"，便于学生有目的地学习.

"学习指导"可以帮助学生理解重要的数学概念和数学思想，掌握基本的计算方法；"例题解析"是对所学知识的运用，所选例题大部分涉及重要的知识点和学生容易出错的题目，有利于学生加深对重要的数学概念和思想的理解，以及对重要数学方法的掌握和正确运用，从而提高学生的知识运用能力；每章有两套"自我测验题"，分为基础层次和提高层次，以满足学生的不同需求.

本书的编写意在提高学生的自学能力，帮助学生更好地理解教材，它既是教学同步的学习指导书，又是学生不见面的辅导教师，对提高教学质量起到辅助作用，也弥补了教师辅导时间有限的不足.

本书由胡跃强、安雪梅任主编，陶金瑞、韩启汉任副主编. 参加编写的老师有：胡跃强(第九章、第十章)、安雪梅(第一章、第十一章)、陶金瑞(第八章)、韩启汉(第十二章)、周世兴(第五章)、胡文娟(第三章)、程锋利(第四章)、杨瑞(第二章)、王庆报(第六章). 河北大学数学与计算机学院花强教授审阅了全部内容，并提出了宝贵意见；河北机电职业技术学院教务处的领导对本书的编写工作给予了大力支持，在此一并致以诚挚的谢意!

由于编者水平所限，书中难免出现不当之处，恳请同仁和读者不吝赐教!

编　者

目　　录

前言

（教材上册部分）

第一章　函数的极限与连续 ······ 1
一、知识剖析 ······ 1
二、例题解析 ······ 10
三、自我测验题 ······ 20
（一）基础层次 ······ 20
（二）提高层次 ······ 21
参考答案 ······ 23
第二章　导数与微分 ······ 25
一、知识剖析 ······ 25
二、例题解析 ······ 30
三、自我测验题 ······ 36
（一）基础层次 ······ 36
（二）提高层次 ······ 37
参考答案 ······ 39
第三章　导数的应用 ······ 41
一、知识剖析 ······ 41
二、例题解析 ······ 47
三、自我测验题 ······ 53
（一）基础层次 ······ 53
（二）提高层次 ······ 54
参考答案 ······ 55
第四章　不定积分 ······ 56
一、知识剖析 ······ 56
二、例题解析 ······ 59
三、自我测验题 ······ 69
（一）基础层次 ······ 69
（二）提高层次 ······ 70

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

参考答案 …… 71
第五章　定积分及其应用 …… 73
一、知识剖析 …… 73
二、例题解析 …… 78
三、自我测验题 …… 89
（一）基础层次 …… 89
（二）提高层次 …… 92
参考答案 …… 94
第六章　常微分方程 …… 96
一、知识剖析 …… 96
二、例题解析 …… 100
三、自我测验题 …… 106
（一）基础层次 …… 106
（二）提高层次 …… 107
参考答案 …… 109

（教材下册部分）

第八章　多元函数微积分 …… 111
一、知识剖析 …… 111
二、例题解析 …… 124
三、自我测验题 …… 138
（一）基础层次 …… 138
（二）提高层次 …… 139
参考答案 …… 140
第九章　无穷级数 …… 142
一、知识剖析 …… 142
二、例题解析 …… 153
三、自我测验题 …… 158
（一）基础层次 …… 158
（二）提高层次 …… 160
参考答案 …… 162
第十章　拉普拉斯变换 …… 164
一、知识剖析 …… 164
二、例题解析 …… 168
三、自我测验题 …… 170

（一）基础层次 …… 170
（二）提高层次 …… 171
参考答案 …… 172
第十一章　线性代数 …… 174
一、知识剖析 …… 174
二、例题解析 …… 179
三、自我测验题 …… 189
（一）基础层次 …… 189
（二）提高层次 …… 191
参考答案 …… 193
第十二章　概率与数理统计 …… 195
一、知识剖析 …… 195
二、例题解析 …… 200
三、自我测验题 …… 205
（一）基础层次 …… 205
（二）提高层次 …… 206
参考答案 …… 207
参考文献 …… 209

（教材上册部分）

第一章　函数的极限与连续

一、知识剖析

（一）知识网络

- 函数的极限与连续
  - 函数
    - 函数的概念
      - 函数的定义域、对应关系、值域
      - 函数的表示法
        - 表格法
        - 图像法
        - 公式法（解析式法）
    - 函数的性质
      - 奇偶性
      - 单调性
      - 有界性
      - 周期性
    - 反函数
    - 初等函数
      - 基本初等函数：5 种函数，注意其图像与性质
      - 复合函数
      - 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和复合得到的函数
  - 极限
    - 极限的描述性概念
      - 数列的极限
      - 当 $x \to \infty$ 时，函数的极限（单向极限与双向极限）
      - 当 $x \to x_0$ 时，函数的极限（左、右极限与双向极限）
    - 无穷递缩等比数列的和：$S = \dfrac{\text{首项}}{1-\text{公比}} = \dfrac{a_1}{1-q}$
    - 无穷小与无穷大
      - 无穷小与无穷大的概念
      - 无穷小的比较
      - 用等价无穷小求函数极限
      - 无穷小与无穷大的关系
      - 无穷小与函数极限的关系
    - 极限的计算方法（见概念理解与方法掌握）
  - 连续
    - 函数增量的概念
    - 函数在点 x_0 连续的概念
      - 用增量法定义
      - 用函数极限与函数值的关系定义
    - 初等函数在它的定义区间内连续
    - 间断点的定义及分类
      - 第一类间断点
      - 第二类间断点
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 最值定理
      - 介值定理
      - 零点存在定理

（二）知识重点与学习要求

1）理解函数的概念，掌握函数定义域的求法；掌握基本初等函数的图像和性质；理解复合函数的概念，掌握其分解方法；了解分段函数.

2）理解极限的描述性概念，数列极限、$x\to\infty$ 时函数的极限、单向极限、$x\to x_0$ 时函数的极限、左右极限.

3）掌握求极限的方法（代入法、“$\frac{0}{0}$”型消去零因子法和分子（分母）有理化法、“$\frac{\infty}{\infty}$”的分子、分母同除以自变量最高次幂的方法），掌握用两个重要极限求极限的方法.

4）理解无穷小和无穷大的概念；掌握无穷小的比较方法；掌握无穷小的性质，能用无穷小的性质求函数极限；了解用等价无穷小代换求极限的方法.

5）理解函数在某点连续的定义；会判断分段函数在分界点处的连续性；了解间断点及间断点分类；了解闭区间上连续函数的性质.

（三）概念理解与方法掌握

1. 函数

（1）函数的概念　函数是表示每个输入值对应唯一输出值的一种对应关系. 函数 f 中对应输入值 x 的输出值的标准符号为 $y=f(x)$ 或 $f(x)$. 包含某个函数所有的输入值的集合称为这个函数的定义域；包含所有的输出值的集合称为值域. 实际问题中一个变量的变化引起另一个变量变化的规律，是高等数学研究的主要对象，如圆的半径与面积的关系、圆柱高与体积的关系、电流与电功率的关系、成本与利润的关系等.

1）函数的两大要素：定义域与对应关系. 判断两个函数是否为同一函数，就是看它们的定义域和对应关系是否都相同. 如 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$，它们的定义域分别为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 和 $(0,+\infty)$，由于定义域不同，所以它们不是同一函数；函数 $f(x)=|x|$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$，$h(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$，由于它们的定义域与对应法则都相同，所以它们是同一函数.

2）函数的记号 $y=f(x)$ 的含义：x 是自变量，f 是对应法则，y 是 x 对应的函数值. 例如，在式 $y=f(x)=x^2+3x-5$ 中输入相应的 x 值，即可得到唯一的函数值 y 与它对应. 对应法则与自变量、因变量用什么字母表示无关，上式也可表示为 $z=f(r)=r^2+3r-5$.

3）函数定义域：函数的定义域是使函数有意义的自变量的取值范围．求函数的定义域应注意以下几点：偶次方根，要求被开方数大于等于零；分式要求分母不等于零；对数的真数大于零；反正弦、反余弦函数的自变量范围为 $-1\leqslant x\leqslant 1$；$y=x^0$ 要求 $x\neq0$．求出的定义域用集合或区间的形式表示．若是实际问题，函数的定义域除考虑解析式的意义外，还需考虑问题本身的实际意义．

（2）函数的性质　一般来讲，函数具有以下性质．

1）单调性：函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $x\in(a,b)$（也可为其他任意区间），若对于定义域内任意两点 x_1，$x_2(x_1>x_2)$，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递增；若对于定义域内任意两点 x_1，$x_2(x_1>x_2)$，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递减．单调递增函数的图像特点是：从左向右逐渐上升；单调递减函数的图像特点是：从左向右逐渐降低．

2）奇偶性：对于定义域关于原点对称的函数 $y=f(x)$，若有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数在该定义域上为奇函数；若有 $f(-x)=f(x)$，则称函数在该定义域上为偶函数．奇函数的图像特点是：关于原点对称；偶函数的图像特点是：关于 y 轴对称．

注意：奇函数加、减奇函数还是奇函数；偶函数加、减偶函数还是偶函数；奇函数乘奇函数是偶函数，偶函数乘偶函数是偶函数，奇函数乘偶函数是奇函数．

3）周期性：对于函数 $y=f(x)$ 定义域内任意一点 x，若存在一常数 T，有 $f(x+T)=f(x)$（即自变量增加 T，函数值就会重复出现），则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数．若 T 为它的一个周期，则 $nT(n\in\mathbf{Z})$ 都是函数的周期，通常我们说的周期指函数的最小正周期．周期函数的图像的特点：每个周期内图像相同．三角函数为常用的周期函数．

4）有界性：对于函数 $y=f(x)$ 定义域内任意一点 x，存在一常数 $N>0$，使得 $|f(x)|\leqslant N$（即不管自变量取什么值，函数值总在某个区间波动），即 $-N\leqslant y\leqslant N$，$-N$ 为函数的下界，N 为函数的上界．有界性是指函数值有界，而不是自变量有界．例如，函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$，不管 x 取什么数，函数值总在 $[-1,1]$ 内波动．常用的有界函数还有：$y=\cos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等．

（3）反函数　若函数 $y=f(x)$ 是一一对应的，用 y 表示 x，得到的以 y 为自变量的函数叫做原函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$．习惯上，以 x 表示自变量，y 表示函数，又记作 $y=f^{-1}(x)$．反函数的定义域是原函数的值域，反函数的值域是原函数的定义域．

注意：不是所有的函数都有反函数，严格单调的函数一定有反函数；一一对应的函数一定有反函数．原函数与反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称．本章主要

介绍的反函数为反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数.

正弦函数在它的定义域内是否有反函数呢？没有，因为正弦函数在它的定义域内不是“一一对应”的. 但它在区间 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是单调递增(一一对应)的，我们就在这个区间定义正弦函数 $y=\sin x$ 的反函数，记作 $x=\arcsin y$，显然它的定义域为 $y=\sin x$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的值域 $y\in[-1,1]$；习惯上，我们记 $y=\sin x$ 的反函数为 $y=\arcsin x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 需记住四个反三角函数的定义域和值域以及它们的图像，并知道它们都是有界函数：

$$|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\arccos x\leqslant\pi,\ -\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2},\ 0<\operatorname{arccot}x<\pi.$$

（4）基本初等函数　基本初等函数有以下几种.

1）幂函数：$y=x^{a}$(a 为常数). 例如，$y=x^{3}$，$y=x^{-2}$，$y=x^{\frac{3}{4}}$等. 一定要掌握负指数幂化成正指数幂和分式指数幂化成根式的方法，$x^{-m}=\frac{1}{x^{m}}$，$x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^{m}}$ (n，$m\in\mathbf{Z}$).

2）指数函数：$y=a^{x}$(a 为常数,$a>0$ 且 $a\neq1$). 例如，$y=2^{x}$，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 等.

注意：幂函数的指数是常数，指数函数的底是常数.

3）对数函数：$y=\log_{a}x$(a 为常数,$a>0$ 且 $a\neq1$). 一定要掌握指数式与对数式的互化. $a^{b}=c$ 为指数式，化为对数式为$\log_{a}c=b$，两式的底一样，都为 a. 引入对数式的目的是为了表示指数式中的指数，即表示 $a^{b}=c$ 中的 b.

4）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$. 其中 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$，$\csc x=\frac{1}{\sin x}$.

5）反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot}x$.

（5）复合函数　复合函数的概念主要在于对一个比较复杂的函数适当引入中间变量，把它分解为若干个基本初等函数或基本初等函数的和、差、积、商的形式，使对复杂函数的讨论转化为对基本初等函数的讨论.

复合函数的分解步骤是：由函数的最外层起逐层往里分解，分解完成后，前面几个函数是基本初等函数，最后一个函数为基本初等函数或基本初等函数与常数的和、差、积、商的形式. 例如 $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$从外向里可以分解为 $y=\sqrt{u}$，$u=\frac{1-x}{1+x}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

注意：复合函数的合成是有一定条件的，必须保证后一个函数值域的全部或部分在前一个函数的定义域内. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=1+2^x$ 就不能合成一个复合函数，因为后一个函数的值域为$(1,+\infty)$，前一个函数的定义域为$[-1,1]$，两者没有交集，所以不能复合.

(6) 初等函数　由基本初等函数和常数经过有限次复合或有限次和、差、积、商构成并且能用一个解析式表示的函数称为初等函数. 初等函数是微积分研究的主要对象.

(7) 分段函数　若对于自变量 x 的不同的取值范围有不同的对应法则，则这样的函数称为分段函数. 它是一个函数，而不是几个函数. 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集，值域也是各段函数值域的并集.

例如，函数 $y=\begin{cases}x^2-1 & x\leqslant 1\\ 2x & 1<x\leqslant 5\end{cases}$，此函数的定义域是两段定义域的并集，即$(-\infty,1]\cup(1,5]=(-\infty,5]$，值域为$[-1,+\infty)$.

一般来说，分段函数不是初等函数，但有些函数，如 $y=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$还可表示为 $y=\sqrt{x^2}$，它是初等函数.

2. 极限

极限的描述性概念：极限反映的是在自变量的变化趋势已知的情况下，因变量的变化趋势. 极限思想是微积分的基本思想，高等数学中的一系列重要概念，如函数的连续性、导数以及定积分等都是借助于极限来定义的. 极限概念在实际中的应用有求平面图形的面积，如圆的面积，就是用圆内接正多边形来逼近的，求旋转体的体积、瞬时变化率等也都用到极限的思想.

本章用描述法来定义极限，极限的概念主要分为：数列极限、$x\to\infty$ 时函数的极限、$x\to x_0$ 时函数的极限.

数列的极限：即 $n\to\infty$ 时(此处∞ 为 $+\infty$，数列的项数不能是负的)，数列的发展趋势.

数列是以其项数为自变量的函数，数列的项数不能出现负数，如$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\left(\frac{1}{2}\right)^n,\cdots\right\}$，项数分别为 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$，因此数列极限可以看成当自变量 $n\to+\infty$ 时，函数 $f(n)$ 的变化趋势.

$x\to\infty$ 时函数的极限：即 $x\to-\infty$ 且 $x\to+\infty$ 时，函数的变化趋势. 即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 的充分必要条件是 } \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

$x\to x_0$ 时函数的极限：即 $x\to x_0^+$ 且 $x\to x_0^-$ 时，函数的变化趋势. 即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 的充分必要条件是 } \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

或
$$f(x_0+0)=f(x_0-0).$$

注意：观察函数极限的关键是熟练掌握基本函数的图像，熟悉当自变量变化时，函数值随着它怎样变化.

3. 极限运算　两个重要极限

（1）函数极限的四则运算法则

设 x 在同一变化过程中 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在(因两个极限自变量 x 的变化趋势一样,为简单起见,省略其变化过程).

法则 1：$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$.

法则 2：$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)$.

法则 3：$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

例如，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{2+2}{\sqrt{2^2-3}}=4$.

注意：运用函数极限的四则运算法则时，必须注意只有各项极限存在(对商,还要求分母极限不为零)才能适用.

例如，求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

错误做法：$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x^2-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty-\infty=0$.

错误原因：两个极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x^2-1}$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$都不存在，$\infty$不是一个确定的数.

正确做法：$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)\xlongequal{\text{通分}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^2-1}\xlongequal{\text{约分}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$.

（2）“$\dfrac{0}{0}$”，“$\dfrac{\infty}{\infty}$”，“$\infty-\infty$”类型的极限求法

“$\dfrac{0}{0}$”型用“消去零因子法(约分)；“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型用分子、分母同时除以自变量的最高次幂(注意找分子、分母中自变量的最高次幂,开方时自变量的次数看做开方后的次数)；“$\infty-\infty$”型一般先通分，变成“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，若带“$\sqrt{\ }$”，则先进行分母有理化，再变成“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型.

（3）无穷递缩等比数列的和　等比数列 $a_1,a_1q,a_1q^2,a_1q^3,\cdots,a_1q^n,\cdots$其中

$|q|<1$，称为无穷递缩等比数列．数列中前 n 项和的极限叫做数列的和，记作 S，$S=\dfrac{a_1}{1-q}$.

（4）变量代换法求函数的极限　把一个变量代换成另一个变量后，经过变换后的式子的极限与原式极限相同.

例如，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解析：设 $\arcsin x=t$，$x=\sin t$，$x\to0$，$\arcsin x\to0$，即 $t\to0$.

式中变量 x 变换成 t，式中任何一处不再出现 x，否则题目不可解.

$$原式=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}\xlongequal{分子、分母同除以 t}\lim_{t\to0}\frac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=1.$$

（5）两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$.

注意：式①可用 $\lim\limits_{\Delta\to0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1$ 来记忆，Δ 表示一个变量．式②可用算式 $(1+无穷小)^{\frac{1}{无穷小}}=\mathrm{e}$ 来记忆．对于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，指数 x 与 $\dfrac{1}{x}$ 互为倒数；对于 $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$，当 $t\to0$ 时，t 为无穷小，指数 $\dfrac{1}{t}$ 与 t 互为倒数.

例如：求 $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}$.

解析：原式 $=\lim\limits_{x\to0}[1+(-3x)]^{\frac{1}{-3x}\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\{[1+(-3x)]^{\frac{1}{-3x}}\}^{-\frac{3}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

4. 无穷小与无穷大

（1）无穷小与无穷大的概念　在自变量的某一变化趋势下，趋于零的因变量，称为在此变化趋势下的无穷小；在自变量的某一变化趋势下，绝对值无限增大的因变量称为无穷大（包括正无穷大或负无穷大）.

（2）极限与无穷小的关系

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)，其中 \lim\alpha(x)=0.$$

（3）无穷小的性质　特别注意：无穷小乘以有界函数仍是无穷小．例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，$|\sin x|\leqslant1$ 是有界函数，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

另外，必须注意性质 1 和性质 2 中的“有限个”是必不可少的条件，否则会出现错误运算．例如，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

错误解法：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0+0+\cdots+0=0$.

正确解法：先化简括号里面的，再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}\xlongequal{\text{分子、分母同除以 }n}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(4) 无穷小的比较　在自变量同一变化趋势下的无穷小 α，β，即 $\lim\alpha=\lim\beta=0$(变化趋势因相同而省略).

若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，即分子趋于零的速度比分母快，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$.

若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$，即分母趋于零的速度比分子快，则称 α 是比 β 低阶的无穷小.

若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=c(c\neq0$ 或 $1)$，即分子趋于零的速度与分母趋于零的速度相差一个倍数 c，则称 α 与 β 是同阶无穷小.

若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，即分子趋于零的速度与分母趋于零的速度相同，则称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

(5) 等价无穷小代换中常用的几个等价无穷小(当 $x\to0$ 时)：

$\sin x\sim x\sim\tan x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$.

用此方法必须注意：在求极限的过程中无穷小量的代换只能应用于乘除，不能应用于加减.

例如，求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

错误解法：当 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

正确解法：当 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

5. 函数的连续性

由于微积分的研究对象是函数，且主要是连续函数，因此对函数连续性的讨论是高等数学的一个重要内容．客观世界的许多现象和事物不仅是运动变化的，而且其运动变化的过程往往是连续不断的，这些连续不断发展变化的事物在量的方面的反映就是连续函数，连续函数就是刻画变量连续变化的数学模型．一个函数在它的定义域上是一个“连续函数”的直观意义就是它的图像是一条连续不断的曲线．例如，自由落体运动、生长过程、温度变化、“流”（电流、水流）等都是连续函数的实际例子．

（1）函数增量的概念　函数增量是指函数在自变量变化后，函数值的变化量，即：函数的增量＝终值－起始值，记作 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$．

（2）函数在某点连续的概念

1）用增量定义：若函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处有定义，当 $\Delta x\to0$（即 $x-x_0\to0$）时，$\Delta y\to0$（即 $f(x)-f(x_0)\to0$），则称函数在 x_0 点连续．

2）用函数极限与函数值的关系定义：若函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 极限存在（即左极限和右极限相等），且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$（函数在 x_0 点的极限等于它在这点的函数值），则称函数在 x_0 点连续．

一般判断函数在某点连续，用 2）中的 3 个条件，缺少其一，函数在这点是不连续的，称这点为函数的间断点．

（3）间断点的分类　若函数在间断点 x_0 处的左、右极限都存在，则此间断点称为第一类间断点；若函数在间断点 x_0 的左、右极限至少有一个不存在，则称此间断点为第二类间断点．

间断点一般出现在函数值不存在的点或分段函数的分界点处．判断间断点的类型就是看间断点处的左、右极限是否存在．

（4）闭区间上连续函数的性质　函数只有在闭区间上连续时，才会有最值定理、介值定理、零点存在定理．

6. 求函数极限方法总结

本章重点是求函数的极限，方法归纳如下．

1）根据极限的四则运算法则和函数在某点连续的性质（代数法）．若函数在某点连续，函数在这点的极限等于它的函数值．一般求函数极限时，可先代入自变量求函数值，若函数值存在，则其极限就等于它的函数值；若极限不存在，再改用其他方法．

2）“$\frac{0}{0}$”，“$\frac{\infty}{\infty}$”，“$\infty-\infty$”型的极限求法．

3）利用无穷小的性质来求极限.

4）两个重要极限.

5）变量代换法求函数的极限.

6）等价无穷小代换法.

*7）极限存在的准则（专接本增加内容）.

① 单调有界数列必有极限.

② 夹逼定理：若当 $x \in \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$时，有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

例如，求$\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解析：因为

$$\frac{1}{n^2+n+n} < \frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2+n} \tag{1}$$

$$\frac{2}{n^2+n+n} < \frac{2}{n^2+n+1} < \frac{2}{n^2+n} \tag{2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{n}{n^2+n+n} < \frac{n}{n^2+n+1} < \frac{n}{n^2+n} \tag{n}$$

由(1)+(2)+…+(n)，得

$$\frac{(1+n)n}{2(n^2+n+n)} < \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} < \frac{(1+n)n}{2(n^2+n)}.$$

又因为$\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{(1+n)n}{2(n^2+n+n)} = \lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{1+n}{2(n+2)} \xlongequal{\text{分子、分母同时除以 } n} \lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+1}{2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \dfrac{1}{2}$，

$$\lim_{n \to \infty}\frac{(1+n)n}{2(n^2+n)} = \frac{1}{2},$$

由夹逼定理得，$\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

二、例题解析

例 1 下列各对函数是否为同一函数.

(1) $y = e^{\ln x}$与 $y = x$；(2) $y = \sin x$ 与 $y = \sqrt{1-\cos^2 x}$；(3) $y = x$ 与 $y = \sqrt[3]{x^3}$.

解 (1) 由于 $y = e^{\ln x}$的定义域为 $x > 0$，而 $y = x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以它们不是同一函数.

(2) 由于 $y = \sqrt{1-\cos^2 x} = |\sin x|$，两函数的对应关系不同，所以它们不是

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com