大学数学系列教材（第三版）

大学数学 1

湖南大学数学与计量经济学院 组编

主编 黄立宏 刘开宇 朱郁森

高等教育出版社

大学数学系列教材（第三版）

大学数学 1

Daxue Shuxue

湖南大学数学与计量经济学院 组编

主编 黄立宏 刘开宇 朱郁森

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是大学数学系列教材之一，主要介绍微积分的基本概念、基本理论和基本方法及其应用，内容包括集合与函数、极限、函数的连续性、函数的导数和微分、导数与微分的应用举例、函数的积分、定积分的应用举例和常微分方程。各节后配有适量习题，各章后配有综合复习题，书末附有常用积分表。

本书结构严谨、内容丰富、重点突出、难点分散，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号表示标准、规范，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性，便于教学。

本书是为高等学校本科非数学类各专业编写的“高等数学”（或“微积分”）课程的教材，同时适合其他需要获得相应数学知识提高数学素质和能力的人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学. 1 / 黄立宏，刘开宇，朱郁森主编；湖南大学数学与计量经济学院组编. —3 版. — 北京 :高等教育出版社,2014. 8

大学数学系列教材

ISBN 978 -7 -04 -040761 -7

Ⅰ. ①大…　Ⅱ. ①黄…　②刘…　③朱…　④湖…　Ⅲ. ①高等数学 - 高等学校 - 教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 163866 号

策划编辑　杨　波　　责任编辑　杨　波　　封面设计　张申申　　版式设计　于　婕

插图绘制　尹文军　　责任校对　刁丽丽　　责任印制　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787mm × 960mm　1/16		
印　　张	22.25	版　　次	2002 年 8 月第 1 版
字　　数	400 千字		2014 年 8 月第 3 版
购书热线	010 - 58581118	印　　次	2014 年 8 月第 1 次印刷
咨询电话	400 - 810 - 0598	定　　价	32.50 元

物 料 号　40761 - 00

大学数学系列教材
（第三版）

湖南大学数学与计量经济学院组编

第三版前言

《大学数学》(1 ~5)系列教材是为了配合教育部"新世纪高等教育教学改革工程",体现湖南大学课程教学改革的特色和经验,根据非数学类理工科各专业数学系列课程教学的需要,于2001年由我院组织部分教师编写出版的。内容包括传统的"高等数学"、"线性代数"、"概率论"和"数理统计"等,并统一用"大学数学"具名。2006年又成立编写委员会对该系列教材进行修订,陆续出版了第二版。

第二版的编委会由黄立宏担任主任,黄立宏、马柏林主编了《大学数学1》,曹定华、孟益民主编了《大学数学2》,曾金平、彭亚新主编了《大学数学3》,罗汉、杨湘豫主编了《大学数学4》,李丹衡、顾广泽、蒋月评主编了《大学数学5》。该套系列教材的初版和第二版先后被确定为"普通高等教育'十五'国家级规划教材"和"普通高等教育'十一五'国家级规划教材",除作为湖南大学的理工学科各专业通识教育平台数学核心课程的指定教材外,也被国内许多高校选作本科相关专业的数学课程教材,使用十余年来受到了师生们的广泛好评。

大家在使用过程中也向我们提出了许多宝贵的意见和修改的建议,为了适应当前高等学校非数学类专业的数学核心课程教学的新要求,同时打造精品教材,我们决定组织人员对这套教材做进一步修订。此次修订保持原有的体系不变,改写了部分内容,调整了部分章节,订正了已发现的错误,精选和补充了部分例题和习题,并增加了每章之后的综合复习题。由于有一些参加原系列教材第二版编写的教师陆续调离或退休,为此我们调整了编委会和各教材的部分主编。

本书是在原《大学数学1》(第二版)的基础上进一步修订而成,由黄立宏、刘开宇、朱郁森任主编,内容主要包括集合与函数、函数的极限、函数的连续性、函数的导数与微分、导数和微分的应用、函数的积分、积分的应用以及常微分方程等。

尽管如此,教材中不妥之处在所难免。仍然希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见,以便我们进一步改进。

本系列教材第三版的编写和出版继续得到我院各位教师和学校教务处以及高等教育出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢。

湖南大学数学与计量经济学院

2014年3月

第二版前言

湖南大学数学与计量经济学院于2001年组织编写了《大学数学》(1~5)系列教材,由刘楚中任总主编,黄立宏任副总主编,其中,《大学数学》(1)由黄立宏和戴斌祥主编,刘楚中、杨湘豫、李亚琼、邓爱珍、孟益民、朱惠延参加编写;《大学数学》(2)由曾金平和李晓沛主编,彭亚新、邓爱珍、蒋月评参加编写;《大学数学》(3)由刘楚中和曹定华主编,杨冬莲、李建平、刘开宇、彭亚新、历亚、朱郁森参加编写;《大学数学》(4)由杨湘豫和邓爱珍主编,喻胜华、谭德俊、彭国强、晏木荣、刘先霞、胡春华参加编写;《大学数学》(5)由李董辉和曾金平主编,马传秀参加编写。该系列教材被列为"普通高等教育'十五'国家级规划教材",由高等教育出版社于2002年和2003年相继出版。教材出版后已历经湖南大学各非数学专业多届本科生使用,国内许多高校也将其选作一些本科专业的教材,得到师生的好评,同时我们也收集到了许多宝贵意见和修改建议。为了进一步提高教材质量,打造精品教材,学院决定组织人员对该系列教材进行修订,并于2005年底由黄立宏教授牵头将教材的修订申报了"普通高等教育'十一五'国家级规划教材",得到顺利通过。现出版的此套教材就是在原《大学数学》(1~5)系列教材的基础上修订而成的。由于参加原系列教材编写的部分教师相继退休或调离,在此次修订工作中,我们新成立了编写委员会,委员会由黄立宏任主任,罗汉任副主任,修订版各分册的主编为成员。

本分册是在原系列教材之一的《大学数学》(1)的基础上修订而成的,由黄立宏和马柏林任主编,内容包括集合与函数、极限与连续、一元函数微分学理论与应用、一元函数积分学理论与应用、无穷级数、常微分方程和常差分方程等。修订版在原教材的基础上对教材内容的取舍和叙述进行了进一步锤炼,调整了部分内容顺序,增加和改写了部分内容,使之更加清晰、易懂、便于教学,更切合理工科各非数学专业的实际要求,也删改和补充了部分例题和习题,修改了个别错误和不当之处。

本教材中难免会有不妥之处和有待进一步改进的地方,希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材的编写和出版得到湖南大学数学与计量经济学院各位教师、湖南大学教务处、高等教育出版社王强同志的大力支持,在此表示衷心感谢。

湖南大学数学与计量经济学院

2008年1月

目　录

第一章　集合与函数

集合与函数的概念在中学数学里已有介绍,但由于集合是集合论中的基本概念,集合论是现代数学的基础,而函数是高等数学中研究和讨论的主要对象,因此,在本书中,我们从介绍集合与函数的概念开始.

第一节　集合与映射

一、集合及其运算

1. 集合及其表示法

集合是一个很原始的概念. 通常,所谓**集合**(简称集)是指具有某种确定性质的对象的全体. 组成集合的各个对象称为该集合的**元素**.

习惯上,用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 用 $a\in A$ 表示 a 是集 A 中的元素,读作"a 属于 A";用 $a\notin A$(或 $a\,\overline{\in}\,A$)表示 a 不是集 A 中的元素,读作"a 不属于 A". 含有限个元素的集合称为**有限集**;不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$;既不是有限集又不是空集的集合称为**无限集**.

集合的表示方法有两种:一种是列举法,即把它的所有元素一一列出来,写在一个花括号内. 例如,方程 $x^2-1=0$ 的解集可表示为 $S=\{-1,1\}$. 另一种方法是描述法,即指明集合元素所具有的确定性质. 将具有性质 $P(x)$ 的对象 x 所构成的集合表示为 $A=\{x\mid x$ 具有性质 $P(x)\}$. 例如,方程 $x^2-1=0$ 的解集也可表示为 $S=\{x\mid x^2-1=0\}$.

今后,如无特别声明,我们用 $\mathbf{N}$ 表示非负整数(自然数)集、$\mathbf{Z}_+$ 或 $\mathbf{N}_+$ 表示正整数集、$\mathbf{Z}$ 表示整数集、$\mathbf{Q}$ 表示有理数集、$\mathbf{R}$ 表示实数集、$\mathbf{C}$ 表示复数集.

对一非空实数集 A,若存在常数 $M>0$,使对 A 中任何元素 x 均有 $|x|\leqslant M$,则称 A 为**有界集**;若对 A 中任何元素 x,有 $x\leqslant M$,则称 A **有上界**;若对 A 中任何元素 x,有 $x\geqslant -M$,则称 A **有下界**.

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,数集 $\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$ 称为**开区间**,记为 (a,b);数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$ 称为**闭区间**,记为 $[a,b]$;类似地记 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$;$a$ 和 b 分别称为区间的**左端点**和**右端点**.

实数集亦可记为区间$(-\infty,+\infty)$,而$(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in\mathbf{R}\}$;$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a,x\in\mathbf{R}\}$等.

由于实数可以用数轴上的点来表示,所以我们常将实数x也称为点x.在今后的讨论中,我们常常要考虑一个点邻近的变化情况.

设$x_0\in\mathbf{R}$,对$\delta\in(0,+\infty)$,数集$\{x\mid |x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$称为点$x_0$的**$\delta$邻域**,记作$U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\},$$

点x_0称为这邻域的**中心**,δ称为这邻域的**半径**.

若只考虑x_0邻近但不包括点x_0自身,即$\{x|0<|x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$,称之为点$x_0$的**去心$\delta$邻域**,记为$\hat{U}(x_0,\delta)$,即

$$\hat{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}.$$

当不强调邻域的半径时,常将x_0点的邻域与去心邻域分别简记为$U(x_0)$和$\hat{U}(x_0)$.

另外,$\{x\mid x_0-\delta<x\leqslant x_0,x\in\mathbf{R}\}$称为$x_0$的**左邻域**,记为$U(x_0^-,\delta)$;$\{x\mid x_0\leqslant x<x_0+\delta,x\in\mathbf{R}\}$称为$x_0$的**右邻域**,记为$U(x_0^+,\delta)$.不强调邻域的半径时,常将左、右邻域分别简记为$U(x_0^-)$和$U(x_0^+)$.相应的也有去心左、右邻域的概念.

2. 集合的关系及运算

为了表述方便,我们先介绍几个符号.

符号“$\forall$”表示“对于任意的”、“对于所有的”或“对于每一个”;符号“$\exists$”表示“存在”.例如:“对于任意的实数a,都存在实数b,使得$a-b=1$”可以写成“$\forall a\in\mathbf{R},\exists b\in\mathbf{R}$,使得$a-b=1$”.

符号“$\Longrightarrow$”和“$\Longleftrightarrow$”表示蕴涵关系.设S_1和S_2是两个陈述句,它们可以指命题,也可以指条件,$S_1\Longrightarrow S_2$表示“若S_1成立,则S_2也成立”;$S_1\Longleftrightarrow S_2$表示“当且仅当$S_1$成立时$S_2$成立”.例如:“若$a\neq0$,则$a^2>0$”可记为“$a\neq0\Longrightarrow a^2>0$”;“$a^2=0$当且仅当$a=0$”可记为“$a^2=0\Longleftrightarrow a=0$”.

定义1 设A和B是两个集合,若$\forall x\in A$,有$x\in B$,则称A是B的**子集**,记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$,亦称A包含于B,或B包含A.若A是B的非空子集,且$\exists y\in B$但$y\notin A$,则称A是B的**真子集**,也称B真包含A.

规定:$\varnothing$是任何集之子集.

定义2 如果$A\subseteq B$和$B\subseteq A$同时成立,则称两集合A与B**相等**,记为$A=B$.

定义3 在讨论的层次和范围中的一切对象的集合称为**全集**,记为X.在此层次和范围中,每一集合A都满足$\varnothing\subseteq A\subseteq X$.

定义 4（余集）　设 X 为全集，$A\subseteq X$. 记 $A^C=\{x \mid x\in X 且 x\notin A\}$，则称 A^C 为 A 的**余**（或**补**）**集**，记为 A^C. ①

显然：$(A^C)^C=A$.

定义 5　集合间的运算：并"∪"、交"∩"、差"−"分别定义如下：

$$A\cup B=\{x \mid x\in A 或 x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x \mid x\in A 且 x\in B\},$$
$$A-B=\{x \mid x\in A 且 x\notin B\}.$$

由定义 4、定义 5，知

$$A-B=A\cap B^C.$$

两个集合的并集、交集、差集和余集可以用图形直观表示，见图 1－1 中的阴影部分.

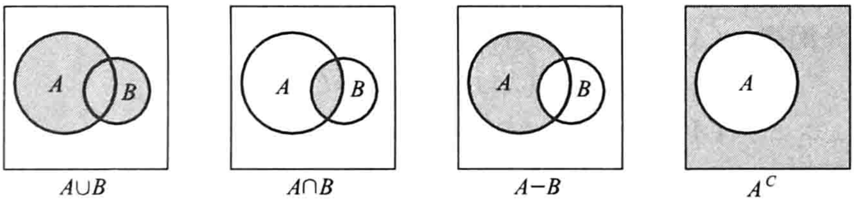

图 1－1

定义 6（直积）　给定非空集 A,B，称 A,B 的元素所构成的有序对的集合 $\{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$ 为 A 与 B 的**直积**，亦称笛卡儿（Descartes）积，记为 $A\times B$.

例如，$M=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，$N=\{y \mid -2\leqslant y\leqslant -1\}$，则 $M\times N$ 和 $N\times M$ 分别为图 1－2 中坐标平面上所示的矩形.

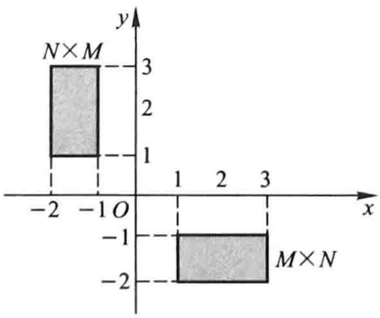

图 1－2

① 中华人民共和国国家标准（GB）"量和单位"中，用$\complement_X A$ 表示 A 的余集.