21世纪高等院校创新教材

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主编◎谢寿才　唐　孝　陈　渊　孙　洁

中国人民大学出版社

21世纪高等院校创新教材

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主　编◎谢寿才　唐　孝　陈　渊　孙　洁
副主编◎邓丽洪　李林珂　罗世敏　尹忠旗

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/谢寿才等主编．—北京：中国人民大学出版社，2014.5
21世纪高等院校创新教材
ISBN 978-7-300-19344-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①谢… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第099698号

21世纪高等院校创新教材
概率论与数理统计
主　编　谢寿才　唐　孝　陈　渊　孙　洁
副主编　邓丽洪　李林珂　罗世敏　尹忠旗
Gailülun yu Shuli Tongji

出版发行　中国人民大学出版社
社　　址　北京中关村大街31号　　　**邮政编码**　100080
电　　话　010－62511242（总编室）　　010－62511770（质管部）
　　　　　　010－82501766（邮购部）　　010－62514148（门市部）
　　　　　　010－62515195（发行公司）　010－62515275（盗版举报）
网　　址　http://www.crup.com.cn
　　　　　　http://www.ttrnet.com（人大教研网）
经　　销　新华书店
印　　刷　北京民族印务有限责任公司
规　　格　185 mm×260 mm　16开本　　**版　　次**　2014年6月第1版
印　　张　12.25 插页1　　　　　　　**印　　次**　2014年6月第1次印刷
字　　数　284 000　　　　　　　　　**定　　价**　25.00元

内容简介

本书是根据编者多年的教学经验，结合高等学校非数学专业大学数学——概率论与数理统计课程的教学大纲及近几年的考研大纲编写而成的。

本书内容共分八章：事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验。

本书结构严谨，逻辑清晰，概念准确。其主要特点在于：注重各个知识点的衔接，内容上具有足够的理论深度，表达上尽可能深入浅出；重视例题、习题的设计和选配；内容编排上尽可能合理 ，尽量减少不必要的叙述。

本书可作为高等学校非数学专业的概率论与数理统计教材，也可作为考研学生的参考书。

前　言

本书是根据高等学校非数学专业大学数学——概率论与数理统计的教学大纲并结合近几年“全国硕士研究生入学统一考试大纲”的要求编写而成的。

本书结构严谨，逻辑清晰，概念准确，注重应用。其主要特点在于：

（1）注重各个知识点的衔接，内容上具有足够的理论深度，表达上尽可能深入浅出。

（2）重视例题、习题的设计和选配。尽可能选择具有代表性的例题，习题尽可能做到少而精。

（3）内容的编排上尽可能合理，尽量减少不必要的叙述。

本教材共分八章，初稿分别由罗世敏（第一章）、李林珂（第二、三章）、陈渊（第四、五章）、唐孝（第六、七、八章）编写，谢寿才、邓丽洪对各章节的初稿作了详细的修改，最后由谢寿才统稿定稿。

全书在编写过程中得到了四川师范大学数学与软件科学学院各位领导及大学数学教研室各位老师的大力支持，中国人民大学出版社对本书的编审、出版给予了热情支持和帮助，在此对他们表示由衷的感谢！

由于编者水平有限，书中错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正，以期完善。

编者

2014 年 3 月

目 录

引　言

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

什么是随机现象？我们用下面两个简单的试验来阐明，这里所说的**试验**是对自然现象进行一次观察或进行一次科学试验.

试验 1：袋中装有 10 个外形完全相同的白球，搅匀后从中任取一球.

试验 2：袋中装有 10 个外形完全相同的球，其中有五白三黑二红，搅匀后从中任取一球.

对于试验 1，根据其条件，我们就能断定取出的必是白球. 像这类在一定条件下必然发生的现象，称为**确定性现象**. 确定性现象非常广泛，例如：

(1) 在一个标准大气压下，水加热到 100℃，必会沸腾；

(2) 边长为 a，b 的矩形，其面积必为 ab；

(3) 人从地面向上抛起的石块经过一段时间必然落到地面.

对于试验 2，根据其条件，在球没有取出之前，不能断定其结果是白球、红球或是黑球，像这类在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为**随机现象**. 随机现象在客观世界中也极为普遍，例如：

(1) 掷一枚均匀硬币，考虑出现哪一面；

(2) 抽查流水生产线的一件产品，确定是正品还是次品；

(3) 观察在某段时间内电话总机接到的呼叫次数，等等.

上述试验的共同特点是：试验的结果具有一种“不确定性”，即任意做一次试验时，我们不能断言其结果是什么，但是大量重复这个实验，试验结果又遵循某些规律. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象这种规律性的一门数学学科，其理论和方法被广泛地应用到自然科学、社会科学、工程技术和经济管理等领域.

概率论与数理统计是既联系紧密又互相区别的. 概率论——从数学模型进行理论推导，从同类现象中找出其规律性. 数理统计——着重于数据处理，在概率论理论的基础上对实践中采集获得的信息与数据进行概率特征的推断.

第一章

事件与概率

§1.1 随机事件和样本空间

1.1.1 随机试验

为了研究和揭示随机现象的统计规律性，我们需要对随机现象进行大量重复观察. 我们把观察的过程称为试验，如果试验满足以下条件，就称这样的试验为**随机试验**，简称为**试验**，记为 E.

(1) 试验在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的所有可能结果是预先知道的，且不止一个；

(3) 在每次试验之前，不能预言会出现哪个结果.

试验的每一个可能结果，称为**基本事件**，用 ω 或 ω_i 表示. 若干基本事件复合而成的结果称为**复杂事件**，常用 A、B、C 等表示. 试验中必然出现的结果称为**必然事件**，用 Ω 表示；必然不会出现的结果称为**不可能事件**，用 $\varnothing$ 表示. 上述事件统称为**随机事件**，简称**事件**.

例 1.1.1 掷一颗均匀骰子，观察出现的点数. ω_k =“出现 k 点”(其中 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$) 都是基本事件；$A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$，$B=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$，$C=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$，$D=\{\omega_1, \omega_3\}$，等等，都是复杂事件；$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ 是必然事件；$\varnothing$={出现的点数大于 6} 是不可能事件.

为了便于用点集的知识描述随机事件，我们把试验中的每个基本事件抽象地看成一个点，称之为**样本点**，仍用 ω 或 ω_i 表示. 全体样本点的集合称为**样本空间**，用 Ω 表示. 于是任一随机事件都可表示为 Ω 的子集，特别地，样本空间 Ω 表示必然事件，其空子集 $\varnothing$ 表示不可能事件. 如例 1.1.1 中的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

例 1.1.2 掷一枚硬币一次，观察其出现正面还是反面. 记 ω_1 =“出现正面”，ω_2 =“出现反面”，则样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$.

例 1.1.3 掷一枚硬币两次，观察其正面出现的次数，记 ω_k =“正面出现 k 次”，$k=0, 1, 2$，则样本空间为 $\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$.

例 1.1.4 记录某电话总机在一分钟内接到的呼叫次数，则样本空间为 $\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$.

1.1.2　事件的关系及运算

在一个随机试验中，一般有很多随机事件，有的随机事件是很复杂的，需要通过对简单事件及其关系的研究来掌握复杂事件的规律. 由于事件是样本空间的子集，所以事件的关系及运算与集合的关系及运算是相对应的.

1. 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$). 如例 1.1.1 中 $A\subset\Omega$. 显然，对任意事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若事件 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$.

2. 事件的并(或和)

如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生，则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的并(或和)，记作 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{A\text{ 发生或 }B\text{ 发生}\}=\{\omega\mid\omega\in A\text{ 或 }\omega\in B\}.$$

事件的并可推广到有限个或无穷可列个事件的并，即

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\text{ 为 }n\text{ 个事件 }A_1,A_2,\cdots,A_n\text{ 的和事件},$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\text{ 为可列个事件 }A_1,A_2,\cdots\text{的和事件}.$$

3. 事件的交(或积)

如果事件 A 与事件 B 同时发生，则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的交(或积)，记作 $A\cap B$ 或 AB. 即

$$A\cap B=\{A\text{ 发生且 }B\text{ 发生}\}=\{\omega\mid\omega\in A\text{ 且 }\omega\in B\}.$$

事件的积也可推广到有限个或无穷可列个事件的积，即

$$A_1A_2\cdots A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i\text{ 为 }n\text{ 个事件 }A_1,A_2,\cdots,A_n\text{ 的积事件},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\text{ 为可列个事件 }A_1,A_2,\cdots\text{的积事件}.$$

4. 事件的差

如果事件 A 发生而且事件 B 不发生，则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{\text{事件 }A\text{ 发生而 }B\text{ 不发生}\}=\{\omega\mid\omega\in A\text{ 但 }\omega\notin B\}.$$

5. 互不相容事件

在一次试验中，如果事件 A 和事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**事件或**互斥**事件. 在例 1.1.1 中，A 与 C 互斥，A 与 D 互斥.

6. 互逆事件(对立事件)

在一次试验中，如果事件 A 和事件 B 有且仅有一个发生，即 $A\cup B=\Omega$，$AB=\varnothing$，则称

事件 A 与事件 B 是**对立事件**或**互逆事件**，记作 $\overline{A}=B$，或 $\overline{B}=A$. 显然，$\overline{\overline{A}}=A$.

7. 完备事件组

设 A_1，A_2，…，A_n，…是有限个或无穷可列个事件，如果满足：

(1) $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，i，$j=1$，2，3，…，

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$，

则称事件 A_1，A_2，…，A_n，…是一个**完备事件组**或 Ω 的一个**分割**.

类似于集合的运算，事件的运算满足下述运算律：

(1) **交换律**：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$. (1.1.1)

(2) **结合律**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$. (1.1.2)

(3) **分配律**：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(AB)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$. (1.1.3)

(4) **De Morgan 律(对偶律)**：

$$\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k\overline{A}_k,\quad \overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k\overline{A}_k. \tag{1.1.4}$$

对于多个随机事件，以上运算法则依然成立.

例 1.1.5 设 A、B、C 为三个事件，用 A、B、C 表示下列各事件：

(1) A 与 B 发生，C 不发生；

(2) A、B、C 中至少有两个发生；

(3) A、B、C 中恰好有两个发生；

(4) A、B、C 中不多于两个事件发生；

(5) A、B、C 都不发生.

解 以 A、B、C 分别表示事件 A、B、C 发生，则 $\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$ 分别表示事件 A、B、C 不发生. 因此，有

(1) A 与 B 发生，C 不发生表示为 $AB\overline{C}$；

(2) A、B、C 中至少有两个发生可表示为：$(AB)\cup(BC)\cup(AC)$ 或 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$；

(3) A、B、C 中恰好有两个发生可表示为：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(4) A、B、C 中不多于两个事件发生可表示为：$\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

(5) A、B、C 都不发生可表示为：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

§1.2 事件的概率

对于一次试验，我们常常希望知道某些事件在这次试验中发生的可能性的大小，这就是事件的概率.

1.2.1 事件的频率

定义 1.2.1 试验在相同的条件下重复进行 n 次，若其中事件 A 出现 n_A 次，则称 n_A 为

事件 A 发生的**频数**，称$\frac{n_A}{n}$为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

由定义，易知频率具有如下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$，$f_n(\varnothing)=0$；

(3) 若事件 A_1，A_2，…，A_k 两两互不相容，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示事件 A 发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 的发生越频繁，这就意味着事件 A 的在一次试验中发生的可能性越大. 因此，直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小，历史上有不少人做过“抛硬币”试验，表 1—1 列出了他们的一些试验记录.

表 1—2—1

试验者	抛掷次数 n	正面向上的次数 n_A	正面向上的频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费歇尔	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1—1 可以看出，随着抛掷次数 n 的增大，频率大致在 0.5 附近摆动，所以频率呈现出稳定性，稳定于 0.5，其稳定值 0.5 也就反映了每掷一次硬币出现正面向上的可能性. 所以事件发生的可能性的大小，就是这个“频率稳定值”.

1.2.2　事件的概率

1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫（1903—1987）综合前人大量的研究成果，提出了概率的公理化结构，使得概率论成为严谨的数学分支，极大地推动了概率论的发展.

定义 1.2.2　设 E 是随机试验，其样本空间为 Ω，对 E 的每一个事件 A，定义一实数 $P(A)$ 和它对应，若函数 $P(\cdot)$ 满足以下条件：

(1) **非负性**：对任一事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$，

(2) **规范性**：对必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$，

(3) **可列可加性**：若 A_1，A_2，…是两两互不相容的事件，即 $A_iA_j=\varnothing$，i，$j=1$，2，…，$i\neq j$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots,$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

概率除具有定义所述的三条基本性质外，还具有如下性质：

(1) 对于不可能事件 $\varnothing$，有 $P(\varnothing)=0$.

(2)(**有限可加性**) 若 A_1, A_2, …, A_n 是两两互不相容的事件，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

(3) 对任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

事实上，因 $A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\varnothing$，由性质(2)及规范性，有

$$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1\text{，从而 } P(\overline{A})=1-P(A).$$

(4) 对事件 A、B，若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

证明 因 $B=A\cup(B-A)$，且事件 A 与 $B-A$ 互不相容，由性质(2)，有

$$P(B)=P(A)+P(B-A).$$

从而，$P(B-A)=P(B)-P(A)$.

推论 1.2.1 对事件 A、B，若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

一般地，对任意两个事件 A、B，有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB).$$

(5)(**加法公式**) 对任意两个事件 A、B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明 因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$，由性质(2)，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB).$$

又因 $AB\subset B$，由性质(4)，得

$$P(B-AB)=P(B)-P(AB).$$

因此，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

特别地，当事件 A、B 互不相容即 $AB=\varnothing$ 时，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

加法公式可以推广到任意有限个事件的情形：对任意 n 个事件 A_1, A_2, …, A_n，则有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)\\&-\sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant n}P(A_iA_jA_kA_l)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

例 1.2.1 已知 $P(\overline{A})=0.5$，$P(\overline{A}B)=0.2$，$P(B)=0.4$，求：

(1) $P(AB)$；(2) $P(A-B)$；(3) $P(A\cup B)$.

解 (1) 因 $\overline{A}B=B-A$，因此

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB).$$

所以，

$$P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=0.4-0.2=0.2.$$

(2) 因 $P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.5=0.5$，所以

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3.$$

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7.$

§1.3　古典概型和几何概型

1.3.1　古典概型

若随机试验 E 满足：

(1) 对应的样本空间只含有限个样本点，即 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$（有限性）；

(2) 每个样本点出现的可能性相等，即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)\text{（等可能性）},$$

则称该试验模型为**等可能概型**或**古典概型**.

设试验 E 是古典概型，则基本事件 $\{\omega_1\}$，$\{\omega_2\}$，…，$\{\omega_n\}$ 两两互不相容，且 $\Omega=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\}$，由于 $P(\Omega)=1$ 且 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$，所以

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}.$$

如果事件 A 中包含 n_A 个样本点，则有

$$P(A)=\frac{A\text{ 所含样本点数}}{\text{样本空间中样本点总数}}=\frac{n_A}{n}. \tag{1.3.1}$$

例 1.3.1　袋中装有外形完全相同的两只白球和两只黑球，依次从中摸出两只球. 记 A="第一次摸得白球"，B="第二次摸得白球"，C="两次均摸得白球". 求事件 A、B、C 的概率.

解　我们用枚举法找出该试验的全体样本点. 不妨对球编号，两只白球编号为奇数 1、3，而两只黑球编号为偶数 2、4，数对 (i, j) 表示第一次摸到 i 号球、第二次摸到 j 号球这一结果，于是可将该试验的样本空间所包含的样本点一一列出，即

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),$$
$$(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}.$$

共有 12 个样本点.

由于球的外形完全相同，故样本点具有等可能性，这是一个古典概型，又

$$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,4)\},$$
$$B=\{(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(4,1),(4,3)\},$$

$C=\{(1,3),(3,1)\}$.

由公式(1.3.1)有

$$P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

注 由上例看出，用公式（1.3.1）计算古典概率的关键，是要正确求出 n 和 n_A，然而并非每次计算 n 和 n_A 都像例 1.3.1 那样简单，许多时候是比较费神且富于技巧的，计算中经常要用到两条基本原理——乘法原理和加法原理，以及由它们导出的排列、组合等公式.

例 1.3.2 有 10 个阻值分别为 1Ω，2Ω，…，10Ω 的电阻，从中任意取出三个，以 A 表示“取出的三个阻值恰好一个小于 5Ω，一个等于 5Ω，一个大于 5Ω”，求 $P(A)$.

解 从 10 个电阻中任取 3 个而不必考虑其顺序，所有可能的取法为组合数 $\binom{10}{3}$，由于每个电阻被取到的机会均等，因此每种取法是等可能的，此为古典概型. 因小于 5Ω 的电阻有 4 个，等于 5Ω 的只有 1 个，大于 5Ω 的有 5 个，事件 A 所含样本点数为 $\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{5}{1}$. 所以

$$P(A)=\frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{6}.$$

例 1.3.3 袋中有 a 只黑球，b 只白球，它们除颜色不同外，其余无差异，现随机地把球一只一只地摸出，求

$A=$“第 k 次摸出的球为黑球”的概率（$1\leqslant k\leqslant a+b$）.

解 （方法一）将 a 只黑球看作没有区别，b 只白球也看作没有区别，将 $a+b$ 只球一一摸出排在 $a+b$ 个位置上，所有不同的摸法对应着 $a+b$ 个位置中取出 a 个位置来摸黑球（其余为摸白球）的取法，即样本点总数 $n=\binom{a+b}{a}$，而 A 所含样本点数对应不考虑第 k 个位置（第 k 个位置固定为黑球）的其余 $a+b-1$ 个位置中取出 $a-1$ 个来摸黑球的取法，即为 $\binom{a+b-1}{a-1}$，于是

$$P(A)=\frac{\binom{a+b-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}}=\frac{a}{a+b}.$$

（方法二）将 a 只黑球及 b 只白球编号后一一取出排成一排，则所有可能的排法为 $(a+b)!$，事件 A 发生当且仅当第 k 个位置上是 a 只黑球中取出一个，其余 $a+b-1$ 个位置是剩下的 $a-1$ 只黑球和 b 只白球来排列，于是 A 所含样本点数为 $a(a+b-1)!$，所以

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

（方法三）把 a 只黑球和 b 只白球依次编号为 $1, 2, \cdots, a+b$. 记 $\omega_i=\{$第 k 次摸到 i 号球$\}$，则样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{a+b}\}$，其中各 ω_i 是等可能出现的，显然 A 中含 a 个样本点，故

$$P(A)=\frac{a}{a+b}.$$

注 上例的结论告诉我们：第 k 次摸到黑球的概率与取球次序并无关系. 这一有趣的结果具有现实意义，比如日常生活中人们常爱用"抽签"的办法解决难以确定的问题，本题结果告诉我们，抽到"中签"的概率与"抽签"的先后次序无关.

例 1.3.4 一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品（$M<N$），采用有放回和不放回两种抽取方式从中抽取 n 件产品，问恰好抽到 k 件次品的概率是多少？

解 设 $A=$"恰好抽到 k 件次品".

(1)（**有放回抽取**）不妨将 N 件产品进行编号，有放回地抽 n 次的所有不同的抽法对应重复排列数 N^n，其中次品恰好出现 k 件的取法数为 $\binom{n}{k}M^k(N-M)^{n-k}$. 故所求概率为

$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}M^k(N-M)^{n-k}}{N^n}=\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}. \tag{1.3.2}$$

(2)（**不放回抽取**）从 N 件产品中取出 n 件的所有不同取法对应组合数 $\binom{N}{n}$，"恰好取到 k 件次品"对应的样本点数为 $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}. \tag{1.3.3}$$

注 由上例看出，抽样方法不同，计算出的概率也是不同的，但当产品总数 N 较大而抽取的产品数 n 相对较小时，上述两个概率的差别就可以忽略. 人们在实践中正是利用这一点，把抽取对象数目较大的不放回抽样当作有放回抽样来处理，这样用式（1.3.2）计算概率比用式（1.3.3）简便得多.

例 1.3.5 一袋中装有 $N-1$ 只黑球及 1 只白球，每次从袋中摸出一球，并换入 1 只黑球，如此继续下去，问第 k 次摸到黑球的概率是多大？

解 记 $A=$"第 k 次摸到黑球"，则 $\overline{A}=$"第 k 次摸到白球". 由题设条件，$\overline{A}$ 发生当且仅当前 $k-1$ 次都摸到黑球而第 k 次摸到白球，因此，

$$P(\overline{A})=\frac{(N-1)^{k-1}}{N^k}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N},$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$

例 1.3.6 一对骰子掷 24 次，求至少得到一次双六的概率.

解 记 A="至少得到一次双六"，那么 $\overline{A}$="没有一次是双六". 一对骰子每掷一次有 36 种结果，于是一对骰子掷 24 次就有36^{24}种结果，故样本点的总数为36^{24}，每次不出现双六的结果为 35 种，所以掷 24 次都不出现双六的所有结果有35^{24}种，于是

$$P(\overline{A})=\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx 0.51.$$

所求概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx 0.49.$$

1.3.2 几何概型

对于古典概型来讲，样本空间只有有限个样本点且每个样本点发生的可能性相同. 当样本空间中样本点的个数无限时，这便是下面要介绍的几何概型.

如果随机试验 E 对应的样本空间为 n 维欧氏空间的某个区域 Ω，且样本点在 Ω 内"均匀分布"，则"样本点落入 Ω 内某可测子区域 A"的概率与 A 的测度$\mu(A)$成正比，而与子区域 A 的位置及形状无关，即

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{1.3.4}$$

这里 $\mu(\cdot)$ 表示测度，即长度、面积、体积等.

我们称用式（1.3.4）计算的概率为**几何概率**，相应的概率模型为**几何概型**.

例 1.3.7 （**Buffon 投针问题**）平面上画有等距离为 $a(a>0)$ 的一些平行线，向此平面任意投掷一枚长为 $l(l<a)$ 的针，试求针与平行线相交的概率.

解 以 A 表示"针与平行线相交"，如图 1—3—1 所示，以 x 表示针的中点 M 到最近一条平行线的距离，φ 表示针与最近一条平行线的交角，则

$$0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

以上两式确定了平面上的一个矩形区域，这一矩形区域上的所有点构成样本空间 Ω. 要使针与平行线相交，必须且只需

$$0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

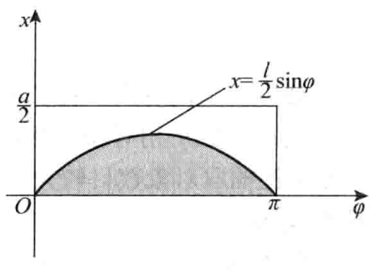

图 1—3—1

如图 1—3—1 中阴影部分所示，由于针是等可能地落在平面上的任一位置，故有

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\frac{1}{2}a\pi}=\frac{2l}{\pi a}. \tag{1.3.5}$$