



## 摘 要

本文详细讨论跨音速混合型非线性二阶偏微分方程的有限差分松弛理论。导出跨音速小扰动速势方程（简单混合型方程）的守恒型差分方程，讨论了激波形成的原理。然后介绍小扰动计算结果在飞机气动外形的设计和分析中的应用。接着，本文讨论复杂混合型方程（全速势方程）的旋转差分格式，讨论了直角坐标系中该方程及其边界条件的差分方程，坐标变换方法以及典型的计算结果。最后，讨论非定常跨音速流中混合型松弛差分法的应用。

# 目 录

## 摘 要

### 一、引 言

### 二、简单混合型方程——跨音速小扰动速势方程

#### § 2.1 基本方程

#### § 2.2 速势方程的差分格式

#### § 2.3 边界条件的差分格式

#### § 2.4 松弛解法

#### § 2.5 激波的形成及其结构

#### § 2.6 应用和典型计算结果

### 三、复杂混合型方程——跨音速全速势方程

#### § 3.1 基本方程

#### § 3.2 全速势方程的差分格式

#### § 3.3 边界条件的差分格式

#### § 3.4 坐标变换

#### § 3.5 应用和典型计算结果

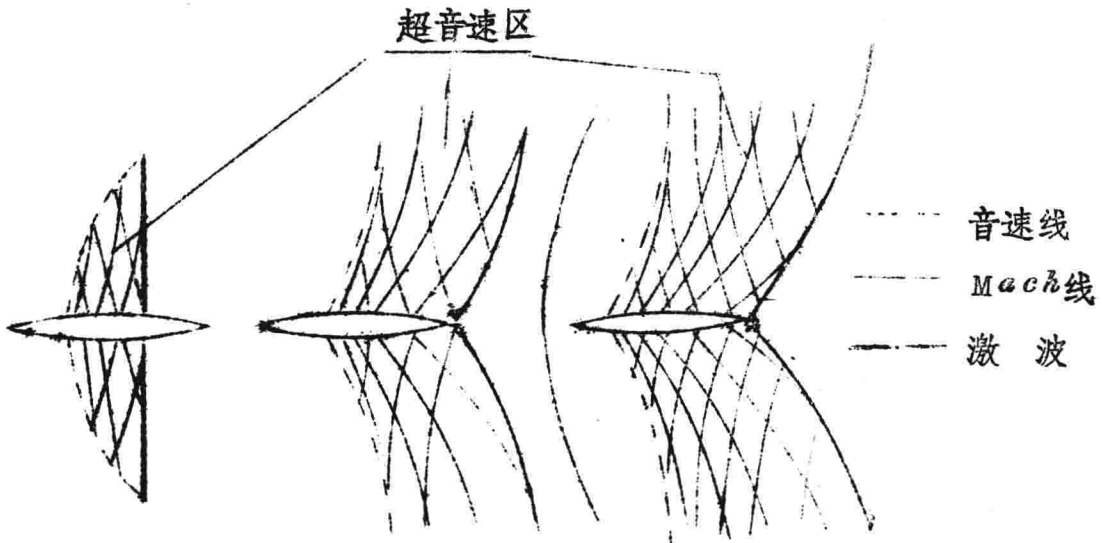
### 四、非定常跨音速流中混合差分法的应用

## 参考文献

## 附录：跨音速一阶和二阶小扰动速势方程的推导

# 一、 引 言

跨音速流的特点是流场内同时存在亚音速区和超音速区；当气流从超音速过渡到亚音速时，通常还存在激波。图 1·1 表示典型的跨音速流动型态。因此，跨音速流中自由流  $M$  数  $M_\infty$  有一个范围。大致



(a) 超临界流  $M_\infty < 1$       (b) 音速流  $M_\infty = 1$       (c) 超音速流  $M_\infty > 1$       图 1·1  
 图 1·1 绕翼型的典型跨音速流型

是  $0.7 < M_\infty < 1.3$ 。当  $M_\infty < 0.7$  时流动为纯亚音速流，当  $M_\infty > 1.3$  时流动为纯超音速流（不考虑前缘附近极小的亚音速区）。由于跨音速流的  $M_\infty$  在 1 附近，其激波强度通常很弱，因此气流通过激波后可略去其熵的增量。这样，等熵无旋的跨音速流通过激波后仍可认为是等熵无旋流。于是，整个速度场存在速度势，可用速度势描绘跨音速流场。

大家知道，亚音速流中速度势方程是椭圆型偏微分方程，超音速流中为双曲型方程。由于跨音速流场中同时存在亚、超音速区，因此其速度势方程是混合型的，方程的性质随流场的性质而变。而且，速

势方程是非线性的。方程的解还通常伴随间断面——激波。因此，求解这种方程是很困难的，过去一直没有合适的求解方法七十年代初，Murman 和cole<sup>[1]</sup>采用松弛差分法解决了跨音速小扰动速势方程的求解问题。他们的方法能在计算过程中自动地形成激波，并且很容易编制计算机程序。后来，这个方法又被推广到等熵无旋流的全速势方程<sup>[2]</sup>。从此，跨音速混合型方程的差分计算获得蓬勃发展，成为历届计算流体动力学会议上重要议题之一。由于跨音速流计算的发展，飞机的气动外形也得到明显的改进，从而大大提高了飞机的性能。

跨音速松弛差分法的特点是在椭圆型（亚音速）区和双曲型（超音速）区采用不同的差分格式。在椭圆型区采用中心差分格式以考虑亚音速速势方程的依赖区。在双曲型区，流动方向（相当于波动方程的时间坐标）的速势偏导数采用上游一侧差分格式而垂直于流动方向的速势偏导数则采用中心差分格式，从而满足双曲型方程的差分格式稳定条件。此外，由于忽略了激波后熵的增加，等熵速势方程会包含非激波型的间断面。这是因为当流动方向相反时方程并不改变，于是对前后对称的物体既容许具有压缩突跃的解也容许具有膨胀突跃的反流解。为了获得解的唯一性，我们必须排除突跃性膨胀。所以，我们在差分格式中应保留方向性，这种方向性由于在方程中略去熵的变化而后消失了。采用上游一侧差分格式的优点是在数值计算中保留了这种方向性，因为其截断误差相当于人工粘性项，在某种意义上它表示了熵的增加。这样，突跃膨胀不再出现，使解得到唯一性。此外，当保留主要的截断误差后得到的微分方程类似于跨音速粘性流方程，它允许具有拟激波结构的解，差分方程也显示相似的性质。激波在计算过程中作为压缩层出现，压缩层占几个网格的宽度，其中人工粘性变为主要项。

下面，我们沿着跨音速混合型方程松弛差分法的发展路线首先讨论简单混合型方程（跨音速小扰动速势方程）的求解方法，导出其守恒型差分方程的形式，讨论激波形成的原理。然后介绍小扰动计算结果在飞机气动外形的设计和分析中的应用，接着，把这种方法推广到复杂混合型方程（全速势方程）中去，讨论了旋转差分格式和直角坐标系中全速势方程及其边界条件的差分方程以及典型的计算结果，最后，讨论非定常跨音速流中混合型松弛差分法的应用。

## 二、简单混合型方程——跨音速小扰动速势方程

### § 2.1 基本方程

物体的定常等熵无旋跨音速绕流问题由速势方程、激波条件和边界条件组成封闭方程组。

#### § 2.1.1 小扰动速势方程

小扰动情况下跨音速小扰动速势方程可表示如下（详细推导见附录）：

$$(1 - M^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad (2.1)$$

式中

$$1 - M^2 = 1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) M_\infty^2 \varphi_x \quad (2.2)$$

其中  $M$  是流场内点的局部  $M$  数， $M_\infty$  是自由流  $M$  数， $\gamma$  是空气比热比， $\varphi$  是扰动速势， $x, y, z$  是固定于物体的右手直角坐标系（见图 2.1），

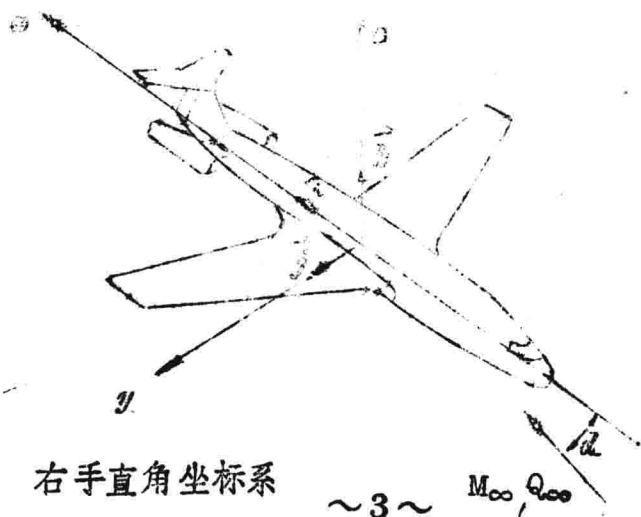


图 2.1 右手直角坐标系

扰动速势  $\varphi$  与全速势  $\Phi$  的关系是

$$\Phi = Q_{\infty}(\omega \cos \alpha + z \sin \alpha + \varphi) \approx Q_{\infty}(\omega + z \alpha + \varphi) \quad (2.3)$$

式中  $Q_{\infty}$  是自由流速度， $\alpha$  是迎角。于是，合速度  $Q$  沿  $x, y, z$  的分量为

$$\left. \begin{aligned} U = \Phi_x &= Q_{\infty}(\cos \alpha + \varphi_x) \approx Q_{\infty}(1 + \varphi_x) \\ V = \Phi_y &= Q_{\infty} \varphi_y \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

小扰动情况下，物面上的压力系数  $c_p$  则由下式求得

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left\{ (1 - (\gamma - 1) M_{\infty}^2 \varphi_x) \sqrt{\gamma - 1} - 1 \right\} \approx 2 \varphi_x \quad (2.5)$$

因此，若能求得整个流场的  $\varphi$  值，便能得到物体所受的整个空气动力。

由于 (2.1) 中  $\varphi_{xx}$  前的系数中包含未知数  $\varphi_x$ ，因此它是非线性的。同时，若局部  $M$  数  $M < 1$  则 (2.1) 表现为椭圆型、 $M = 1$  为抛物型、 $M > 1$  为双曲型。因此，方程的类型随流场内点的性质而变。这样，跨音速小扰动速势方程是混合型非线性二阶偏微分方程。

### § 2.1.2 边界条件

整个流场具有数种边界面。一个是物面边界；另一个是无穷远处或离物体足够远处，称为远场边界。此外，还存在间断面的边界条件。边界条件与物体的具体形状有关。由于我们的主要目的是说明跨音速混合型方程的求解方法，所以下面以机翼为例来讨论边界条件的形式。

(1) 翼面边界条件：定常无粘性气流在物面上的边界条件是物面上的流动速度与物面相切。由此可得机翼表面的小扰动边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_z(x, y, +0) &= \frac{\partial z}{\partial x} u - \alpha \\ \varphi_z(x, y, -0) &= \frac{\partial z}{\partial x} l - \alpha \end{aligned} \right\} \quad (x_{LE} \geq x > x_{LE}) \quad (2.6)$$

式中  $z_u$  和  $z_l$  分别是机翼上下表面的外形方程。由于是小扰动，可在弦线  $z = \pm 0$  上满足上、下翼面的边界条件。

很多情况下机翼前缘为钝前缘。对于椭圆形前缘的等后掠机翼，可知前缘速度应满足下列关系

$$U_{LE} = V_{LE} \tan \chi \quad (2.7a)$$

或

$$\varphi_{xz_{LE}} = \varphi_{yz_{LE}} \tan \chi \cos \alpha \approx \varphi_{yz_{LE}} \tan \chi - 1 \quad (2.7b)$$

式中  $\chi$  是机翼前缘后掠角。于是，前缘速势方程为

$$\left\{ 1 - \left( \frac{\varphi_{yz_{LE}} \tan \chi}{a_{LE}^*} \right)^2 \right\} \varphi_{xz_{LE}} + \left\{ 1 - \left( \frac{\varphi_{yz_{LE}}}{a_{LE}^*} \right)^2 \right\} \varphi_{yy_{LE}} +$$

$$\left\{ 1 - \left( \frac{\varphi_{z_{LE}} + \sin \alpha}{a_{LE}^*} \right)^2 \right\} \varphi_{zz_{LE}} - 2 \left( \frac{\varphi_{yz_{LE}} \tan \chi}{a_{LE}^*} \right)^2 \varphi_{xy_{LE}} -$$

$$- 2 \frac{\tan \chi \varphi_{yz_{LE}} (\varphi_{z_{LE}} + \sin \alpha)}{a_{LE}^{*2}} \varphi_{xz_{LE}} - 2 \frac{\varphi_{yz_{LE}} (\varphi_{z_{LE}} + \sin \alpha)}{a_{LE}^{*2}}$$

$$\varphi_{yz_{LE}} = 0 \quad (2.8)$$

式中

$$a_{LE}^{*2} = \frac{a_{LE}^2}{Q_\infty^2} = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \left( 1 - \left( \frac{\varphi_{yz_{LE}}}{\cos \chi} \right)^2 - (\varphi_{z_{LE}} + \sin \alpha)^2 \right)$$

(2.7) 和 (2.8) 组成钝前缘条件。

由此可见，物面边界条件一般表现为在边界面上给定速势导致的 Neumann 问题形式。



(2) Kutta 条件: 由于机翼一般具有比较尖锐的后缘, 因此在无粘流中存在关于后缘光滑流动的 Kutta 条件。当机翼承受升力时, 速势在后缘不连续, 因此在后缘处伸出一个速势间断面或称自由涡面。Kutta 条件是指速势间断面上的边界条件。条件是(I) 上下表面的压力相等; (II) 上下表面的速度与涡面平行。在小扰动情况下可认为间断面与  $x$  轴重合。于是, 由第一个条件可得到

$$\varphi_w(x, y, +0) = \varphi_w(x, y, -0), \quad (x > x_{TE})$$

或

$$\Gamma(y) = \varphi(x, y, +0) - \varphi(x, y, -0) = \varphi(x_{TE}, y, +0) - \varphi(x_{TE}, y, -0), \quad (x > x_{TE}) \quad (2.9)$$

式中  $\Gamma(y)$  是后缘速势差, 称为环量。由第二个条件可得

$$\varphi_z(x, y, +0) = \varphi_z(x, y, -0), \quad (x > x_{TE}) \quad (2.10)$$

因此, (2.9) 和 (2.10) 就是机翼后缘下游的速势间断面条件。

(3) 激波间断面条件: 跨音速流场中的激波是速势方程的边界面, 速势方程在间断面两边的解必须能满足激波突跃条件。事实上, 跨音速小扰动速势方程的弱解是与跨音速小扰动激波突跃条件相对应的。所谓弱解就是速势微分方程和无旋条件的守恒形式(散度形式)

$$\left\{ (1 - M_\infty^2) u - \frac{\gamma + 1}{2} M_\infty^2 u^2 \right\}_x + v_y + w_z = 0$$

$$v_x - u_y = 0$$

$$w_x - u_y = 0$$

$$w_y - v_z = 0$$

(2.11)

在间断面处满足下列关系:

$$\left. \begin{aligned}
 & \langle (1 - M_\infty^2) u - \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 u^2 \rangle \cos \alpha_1 + \langle v \rangle \cos \alpha_2 + \langle w \rangle \cos \alpha_3 = 0 \\
 & \langle v \rangle \cos \alpha_1 - \langle u \rangle \cos \alpha_2 = 0 \\
 & \langle w \rangle \cos \alpha_1 - \langle u \rangle \cos \alpha_3 = 0 \\
 & \langle w \rangle \cos \alpha_3 - \langle v \rangle \cos \alpha_3 = 0
 \end{aligned} \right\} (2.12)$$

式中  $u, v, w$  分别表示扰动速度  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ ;  $\langle \rangle$  表示激波前后的突跃值;  $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$  分别是激波法线对于  $x, y, z$  轴的方向余弦。(2.12) 实际上是(2.11)的积分形式守恒律在间断面处的表达形式, 它可由散度定理导出, 因此称为守恒型方程的弱解。例如, 由(2.12)的第二式可得对于包含间断面的任意面积元(见图2.2)有

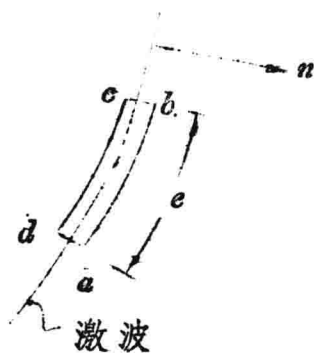


图 2.2 激波元素

$$\begin{aligned}
 & \iint_{abcd} (v_w - u_y) d_w d_y = \int_a^b (v \cos \alpha_1 - u \cos \alpha_2) dl \\
 & = \int_{abcd} (v \cos \alpha_1 - u \cos \alpha_2) dl + \int_{bc+da} (v \cos \alpha_1 - u \cos \alpha_2) dl
 \end{aligned}$$

当  $bc = da \rightarrow 0$  时, 可知

$$(I) \int_{bc+da} (v \cos \alpha_1 - u \cos \alpha_2) dl \rightarrow 0$$

$$(II) \int_{ab+cd} (v \cos \alpha_1 - u \cos \alpha_2) dl$$

$$= \int_{ab} (v_2 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2) dl + \int_{cd} (v_1 \cos \alpha_1 - u_1 \cos \alpha_2) dl$$

$$= \int_{ab} (v_2 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2) dl - \int_{dc} (v_1 \cos \alpha_1 - u_1 \cos \alpha_2) dl$$

$$\rightarrow \int_{ab} ((v_2 - v_1) \cos \alpha_1 - (u_2 - u_1) \cos \alpha_2) dl$$

当  $dl \rightarrow 0$ , 便得到 (2.12) 的第二式

$$(v_2 - v_1) \cos \alpha_1 - (u_2 - u_1) \cos \alpha_2 = 0$$

由 (2.12) 可得

$$\left( (1 - M_\infty^2) - \frac{\gamma + 1}{2} M_\infty^2 \frac{u}{a^*} \right) \langle u \rangle^2 + \langle v \rangle^2 + \langle w \rangle^2 = 0 \quad (2.13)$$

式中  $\bar{u} = (1/2)(u_1 + u_2)$ 。可以证明 (3), (2.13) 就是激波极曲线

$$w_2^2 = (u_1 - u_2)^2 \frac{u_1 u_2 + a^{*2}}{\frac{2}{\gamma + 1} u_1^2 - u_1 u_2 + a^{*2}} \quad (2.14)$$

的跨音速小扰动近似, 即小扰动激波过程是等熵过程。因此, 守恒型速势微分方程包含了等熵激波的间断面条件。

(4) 远场边界条件: 首先给出无穷远处的远场条件。在机翼的远前方、远上方和远下方这三个边界面上扰动速势  $\varphi$  为零, 即

$$\varphi = 0, \quad (x \rightarrow \infty, y = \pm \infty, z = \pm \infty) \quad (2.15)$$

在机翼的远后方边界面 (即 *Treffitz* 平面) 上, 由于从机翼后缘伸

出自由涡面，因此  $x = +\infty$  平面上  $\varphi \neq 0$ ，必须通过下列方程求解：

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad (2.16)$$

$$\varphi(x = \infty, z = +0) - \varphi(x = \infty, z = -0) = \Gamma(y)$$

为了不使计算空间过大，可取离机翼 2 倍特征长度（弦长或展长）处作为远场边界。这时，亚音速自由流中机翼的远场扰动速势  $\varphi_{FF}$  值可采用近似解析公式求得〔4〕：

$$\varphi_{FF} = \frac{z}{2\pi(y^2+z^2)} \left[ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \beta^2 y^2 + \beta^2 z^2}} \right] \int_0^{b/2} \Gamma(\eta) d\eta, \quad (x = -\infty \text{ 或 } y = +\infty, \text{ 或 } z = \pm\infty) \quad (2.17a)$$

和

$$\varphi_{FF} = \begin{cases} \Gamma(y)/2, & (z = +0, 0 \leq y \leq b/2) \\ -\Gamma(y)/2, & (z = -0, 0 \leq y \leq b/2) \\ \frac{z}{2\pi} \int_0^{b/2} \frac{\Gamma(\eta) d\eta}{(y+\eta)^2+z^2} + \frac{z}{2\pi} \int_0^{b/2} \frac{\Gamma(\eta) d\eta}{(y-\eta)^2+z^2}, & (|y| > b/2) \end{cases} \quad (2.17b)$$

式中  $b$  是机翼展长， $\beta^2 = 1 - M_\infty^2$ 。（2.17）中已引用了机翼左右对称的条件，所以必须补充一个中心面（ $y=0$ ）条件：

$$\varphi_y = \varphi_{xy} = 0, \quad (y=0) \quad (2.18)$$

由上可见，远场条件基本上是 *Dirichlet* 形式的边值问题。但它取决于环量  $\Gamma(y)$  即机翼后缘速势值  $\varphi_{TE}$ ，所以只能逐次逼近。关于超音速自由流（ $M_\infty > 1$ ）的近似远场条件可参见〔3〕。

### § 2.2 速势方程的差分格式

混合型非线性偏微分方程（2.1）的差分解法的重要特点是按照方程的类型选用不同的差分格式。当方程表现为椭圆型（亚音速区）

时  $w$  向导数取中心差分格式；当方程表现为双曲型（超音速区）时  $w$  向导数取上游一侧差分格式。

### § 2.2.1 导数的差分格式

由于目前大多数计算都采用不等步长格网来划分计算空间，所以下面给出不等步长格网的差分格式。由 Taylor 级数可得点  $(i, j, k)$  处  $\varphi_{i, j, k}$  的中心差分格式（见图 2.3）。由

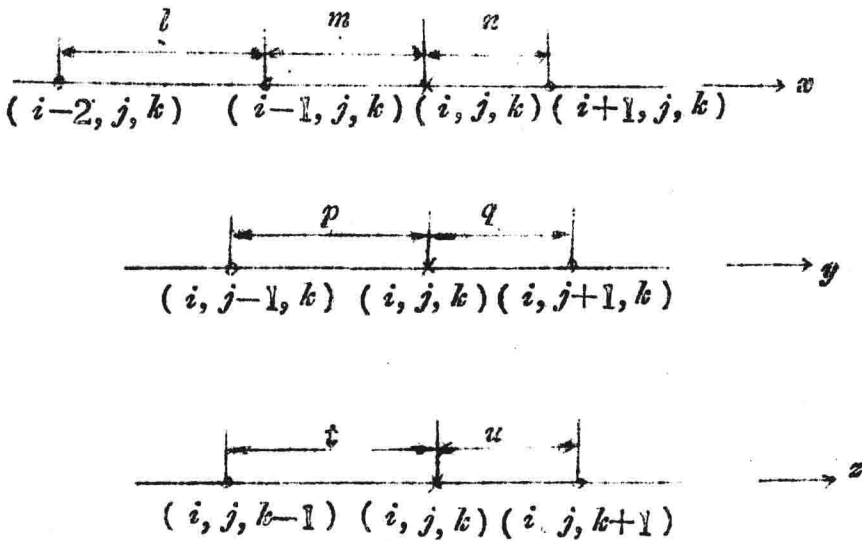


图 2.3 差分格式的依赖点

$$\varphi_{i+1, j, k} = \varphi(w_{i+n}, y_j, z_k) = \varphi_{i, j, k} + n\varphi_w + \frac{n^2}{2}\varphi_{ww} + \dots$$

$$\varphi_{i-1, j, k} = \varphi(w_{i-m}, y_j, z_k) = \varphi_{i, j, k} - m\varphi_w + \frac{m^2}{2}\varphi_{ww} - \dots$$

相加或相减可得

$$\varphi_w_{i, j, k} = \frac{\varphi_{i+1, j, k} - \varphi_{i-1, j, k}}{m+n} + O(\Delta w)$$

$$\varphi_{ww}_{i, j, k} = 2 \left( \frac{m\varphi_{i+1, j, k} - (m+n)\varphi_{i, j, k} + n\varphi_{i-1, j, k}}{mn(m+n)} \right)$$

$$+0(\Delta x)$$

$$(2.19)$$

类似地,

$$\varphi_{y i, j, k} = \frac{\varphi_{i, j+1, k} - \varphi_{i, j-1, k}}{p+q} + 0(\Delta y)$$

$$\varphi_{yy i, j, k} = 2 \left\{ \frac{p\varphi_{i, j, +1, k} - (p+q)\varphi_{i, j, k} + \varphi_{i, j-1, k}}{pq(p+q)} \right\}$$

$$\text{和} \quad +0(\Delta y) \quad (2.20)$$

$$\varphi_{z i, j, k} = \frac{\varphi_{i, j, k+1} - \varphi_{i, j, k-1}}{t+u} + 0(\Delta z)$$

$$\varphi_{zz i, j, k} = 2 \left\{ \frac{t\varphi_{i, j, k+1} - (t+u)\varphi_{i, j, k} + u\varphi_{i, j, k-1}}{tu(t+u)} \right\}$$

$$+0(\Delta z)$$

$$(2.21)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} m = \Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1} & , & n = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \\ p = \Delta y_{j-1} = y_j - y_{j-1} & , & q = \Delta y_j = y_{j+1} - y_j \\ t = \Delta z_{k-1} = z_k - z_{k-1} & , & u = \Delta z_k = z_{k+1} - z_k \end{aligned} \right\} (2.22)$$

同样, 由 Taylor 级数可得  $\varphi_{i, j, k}$  的  $x$  向导数的上游一侧差分格式:

$$\varphi_{x i, j, k} = \frac{\varphi_{i-2, j, k} - \varphi_{i, j, k}}{l+u} + 0(\Delta x) \quad (2.23)$$

$$\varphi_{xx i, j, k} = 2 \left\{ \frac{\varphi_{i, j, k} - (l+m)\varphi_{i-1, j, k} + m\varphi_{i-2, j, k}}{lm(l+m)} \right\}$$

~ 11 ~

$$+0(\Delta x)$$

式中  $l = w_{i-2} - w_{i-1}$ 。可以看出，点  $(i, j, k)$  处的上游差分格式就是其上游点  $(i-1, j, k)$  处的中心差分格式。

### § 2.2.2 差分方程

直接把 (2.19-2.22) 或 (2.23) 代入 (2.1) 即能得到速势差分方程，但是由此而得的差分方程不是守恒型的，因此不能严格满足激波间断面条件。下面，直接从守恒型方程 (2.11) 出发利用散度定理导出速势差分方程。这样的差分格式对于间断面也是适应的，只要间断点落在格网点上，因为间断面条件 (2.13) 本身就是从守恒型方程的积分形式推导出来的。构造一个向量  $\vec{\psi}$ ，使

$$\vec{\psi} = \left\{ (1-M_\infty^2) u - \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 u^2 \right\} \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \quad (2.24)$$

则 (2.11) 可改写为

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = 0 \quad (2.25)$$

这就是速势方程的散度形式，或守恒形式。根据散度定理，在任意体积元  $dV$  上有

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{\psi}) dV = \iint_S (\vec{\psi} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (2.26)$$

围绕点  $(i, j, k)$  作一矩形体积元，对上式中的面积分求积后再除以  $dV = \frac{1}{8} (m+n)(p+q)(t+u)$  便可得到速势微分方程的中心差分方程为

$$\frac{\left[ (1-M_\infty^2) u - \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 u^2 \right]_{i+\frac{1}{2}, j, k} - \left[ (1-M_\infty^2) u - \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 u^2 \right]_{i-\frac{1}{2}, j, k}}{\frac{1}{2}(m+n)} + \frac{v_{i, j+\frac{1}{2}, k} - v_{i, j-\frac{1}{2}, k}}{\frac{1}{2}(p+q)} + \frac{w_{i, j, k+\frac{1}{2}} - w_{i, j, k-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(t+u)} = 0 \quad (2.27)$$

根据中心差分公式 (2.19)

$$u_{i+\frac{1}{2}, j, k} = \frac{\varphi_{i+1, j, k} - \varphi_{i, j, k}}{n}, \quad u_{i-\frac{1}{2}, j, k}$$

$$= \frac{\varphi_{i, j, k} - \varphi_{i-1, j, k}}{m}$$

$$v_{i, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{\varphi_{i, j+1, k} - \varphi_{i, j, k}}{q}, \quad v_{i, j-\frac{1}{2}, k} = \frac{\varphi_{i, j, k} - \varphi_{i, j-1, k}}{p}$$

$$w_{i, j, k+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi_{i, j, k+1} - \varphi_{i, j, k}}{u}, \quad w_{i, j, k-\frac{1}{2}} = \frac{\varphi_{i, j, k} - \varphi_{i, j, k-1}}{t}$$

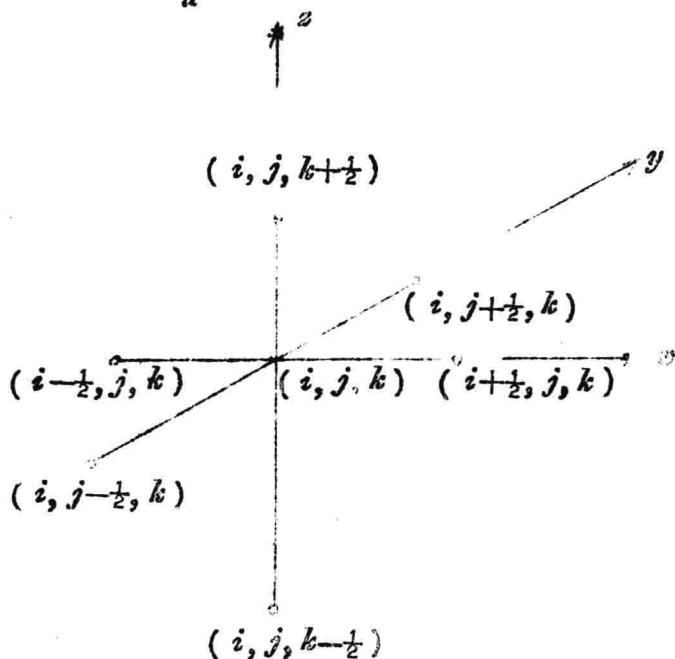


图2.4 矩形体积元各侧面的中心点

代入上式进行因式分解后可最后得

$$F_c i, j, k = \frac{m\varphi_{i+1, j, k} - (m+n)\varphi_{i, j, k} + n\varphi_{i-1, j, k}}{m n (m+n)}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{p\varphi_{i,j+1,k} - (p+q)\varphi_{i,j,k} + q\varphi_{i,j-1,k}}{pq(p+q)} \\
 & + \frac{t\varphi_{i,j,k+1} - (t+u)\varphi_{i,j,k} + u\varphi_{i,j,k-1}}{tu(t+u)} = 0 \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 F_{c,i,j,k} &= 1 - M_{\infty}^2 - (\gamma+1)M_{\infty}^2 \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k} + u_{i-\frac{1}{2},j,k}}{2} \\
 &= 1 - M_{\infty}^2 \frac{\gamma+1}{2} \frac{M_{\infty}^{2m\varphi_{i+1,j,k} - (m-n)\varphi_{i,j,k} - n\varphi_{i-1,j,k}}}{m n} \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

对(2.28)作线性稳定性分析后发现只有当  $F_{c,i,j,k} > 0$  时(2.28)才是稳定的。由(2.1)和(2.2)可知,这时速势方程表现为椭圆型,即点  $(i, j, k)$  为亚音速点。同时,由(2.29)可知对于等步长格网(即  $m=n$ )时

$$F_{c,i,j,k} = 1 - M_{\infty}^2 - (\gamma+1)M_{\infty}^2 \frac{\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i-1,j,k}}{2\Delta x}$$

因此,等步长格网时直接由导数的中心差分格式代入(2.1—2.2)即能得到守恒型椭圆型差分方程。

当速势微分方程表现为双曲型,即点  $(i, j, k)$  为超音速时,(2.28)不适用。这是因为双曲型差分方程存在一个 Courant—Friedrichs—Levy (CFL) 条件。该条件要求双曲型差分方程的依赖区不能小于微分方程的依赖区。当(2.1)表现为双曲型时,它的依赖区是以点  $(i, j, k)$  为顶点,中心线与  $x$  轴相平行的前 Mach 锥(见图 2.5),其半顶角  $\mu$  由下式确定。

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{(M^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(M_{\infty}^2 + (\gamma+1)M_{\infty}^2 \varphi_x - 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.30)$$