普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析选讲

主　编　黄金莹　谢　颖

副主编　赵　宇　董庆超

主　审　宋　文

西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十二五"规划教材

数学分析选讲

主　编　黄金莹　谢　颖
副主编　赵　宇　董庆超
主　审　宋　文

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

全书分为四章，包括函数极限与连续、级数与无穷积分、函数的可微性、函数的可积性。通过列举数学分析经典例题的多种解法（一题多解问题）以及围绕数学分析基本概念和重要结论开展应用技巧的集中训练（一解多题问题），系统地回顾了数学分析的理论知识，并注重各个知识点之间的交叉融合，体现了数学分析的系统性和严谨性。选讲例题的综合性和技巧性较强，不局限于教材章节顺序，难度适中，可用于本科数学和理工科各专业高年级学生考研复习及青年教师授课选题参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/黄金莹，谢颖主编．—西安：西安交通大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5605-6274-2

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①黄…　②谢…　Ⅲ．①数学分析-高等学校-教学参考教材　Ⅳ．①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 113153 号

书　　名　数学分析选讲
主　　编　黄金莹　谢　颖
责任编辑　田　华

出版发行　西安交通大学出版社
（西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049）
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874（发行中心）
(029)82668315　82669096（总编办）
传　　真　(029)82668280
印　　刷　北京京华虎彩印刷有限公司

开　　本　727mm×960mm　1/16　**印张** 14.125　**字数** 352 千字
版次印次　2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-6274-2/O・467
定　　价　32.80 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

版权所有　侵权必究

前　言

本书是为较系统地学过一遍数学分析的人而编写的，可供本科数学专业和理工科各专业高年级学生考研复习及青年教师授课选题参考之用。本书在编排顺序上不同于通常教材那样按部就班，我们将具有相同理论背景的知识点或者性质结论可以相互比照的知识点放在一起，以达到综合应用的目的。

本书采用两种方式开展所谓的“数学分析选讲”，一是列举数学分析重要定理和经典例题的多种证法，从中体会多角度思考数学问题的发散思维方法，据此深刻理解问题的内涵本质，即一题多解问题；二是着眼于数学分析某些重要概念和结论，开展集中应用训练，从而总结这些重要概念和结论的应用思想和应用技巧，即一解多题问题。这两种方式的目的是使读者进一步熟悉数学分析的知识点，并对基本的概念、定理加以灵活应用，同时我们想通过这样的方式培养读者的解题兴趣，丰富读者的解题技巧。

为了实现上述目的，作者结合多年教学的积累，同时参考近几年出版的数学分析类的教材及教辅，历时五年，终于使本书以读者即将看到的模样付梓印刷，欣慰之余，也有必要说明几点。

第一，一题多解的产生及作用。对于一道较为具体的例子，通常是命题者在从事教学或研究时思考总结演算的结果，有其自己的考察目的。一种解法只要把它解决了就可以，通常不必追求另外的解法，否则会有过分演绎的嫌疑。而一题多解的产生则是众多解题者在解题过程中，依据自身的知识背景和数学习惯，甚至是“灵光一闪”，从不同的数学视角审视同一数学问题的结果。适当的一题多解，能够使知识点相互支撑相互印证，起到融会贯通的作用。本书所呈现的一题多解题目，很大程度上旨在总结所给类型题的解题方法，从而省却了对某类型题解题方法的文字性概括，同时一题多解题目还兼具了开拓思路，体现数学分析严谨性、系统性的作用。

第二，如何看待一解多题。在本书中我们经常会围绕某一重要定理来列举它的应用，例如本书对区间套定理、柯西收敛准则、微分中值定理等，我们都作了针对性的习题演练。这些结论在数学分析中处于地基和框架的作用，数学分析这座大厦建设质量的优劣，就取决于这些地基和框架的强度。当我们在框架之间再搭建

起一个个房间，按章节讨论不同的课题时，这些结论将成为有力的工具，支撑起数学分析这座宏伟的建筑。

第三，关于题目和解法的选材。本书题目的选取有如下比例：自编题目大概占到 20%，80%的题目选自于所参考的教辅或教材。本书一题多解的题目，30%的解法为作者给出，70%为作者收集整理。一解多题是作者对数学分析典型问题的总结和梳理。此外，我们适量地配备了思考题及答案，供读者参考习作。

本书第 1 章、第 3 章的前两节及附录内容由佳木斯大学理学院黄金莹编写，第 2 章全部和第 3 章的后两节内容由哈尔滨职业技术学院谢颖编写，第 4 章和思考题答案由佳木斯大学理学院赵宇、董庆超共同编写，赵宇和董庆超还分别负责了打印和校对工作。哈尔滨师范大学数学科学学院院长宋文教授通篇审阅本书，并提出许多宝贵意见，在此特向老师表示衷心的感谢。此外，西安交通大学出版社田华编辑对本书的出版给予极大帮助，特致谢意。

黄金莹
于佳木斯大学理学院
2014 年 1 月 1 日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　函数极限与连续

数学分析的任务是研究函数的分析性质 —— 连续性、可微性、可积性，这三种性质的刻划必须借助于极限(甚至函数自身的表示也要借助于极限)，因此极限作为数学分析的研究工具贯穿始终. 本章涵盖的内容包括实数的完备性、数列极限、函数极限、函数的连续性与一致连续性.

1.1　确界与振幅

本节综合给出确界的性质. 首先，介绍有关上(下)确界的验证方法，然后介绍了与确界密切相关的一个概念 —— 函数振幅，它在刻划函数连续性与可积性方面有着很好的应用.

1.1.1　确界概念及性质

定义 1.1.1　设 S 是 $\mathbf{R}$ 的一个数集，若数 η 满足：

(ⅰ) 对 $\forall x \in S$，有 $x \leqslant \eta$；(ⅱ) 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_0 \in S$，使得 $x_0 > \eta - \varepsilon$，则称数 η 为数集 S 的上确界，记作 $\sup S = \eta$.

对于(ⅱ)还可以有另外两种等价叙述，即

(ⅱ$_1$) 对 $\forall \alpha < \eta$，$\exists x_0 \in S$，使得 $x_0 > \alpha$；

(ⅱ$_2$) 对 S 的任何上界 M，都有 $\eta \leqslant M$.

若数 ξ 满足：

(ⅰ) 对 $\forall x \in S$，有 $x \geqslant \xi$；(ⅱ) 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_0 \in S$，使得 $x_0 < \xi + \varepsilon$，则称数 ξ 为数集 S 的下确界，记作 $\inf S = \xi$.

确界定理：非空有上(下)界数集必有唯一的上(下)确界.

确界性质由下面例 1.1.1 给出.

例 1.1.1　设 A，B 均为非空有界数集，a，c 为常数，定义：

$A^{-}=-A=\{-x \mid x \in A\}$；$cA=\{cx \mid x \in A\}$；$AB=\{xy \mid x \in A, y \in B\}$；

$a+A=\{a+x \mid x \in A\}$；$A+B=\{x+y \mid x \in A, y \in B\}$.

求证：(1) 若 $A \subseteq B$，则 $\inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \sup B$；

(2) 若对 $\forall x \in A, \forall y \in B$，有 $x \leqslant y$，则 $\sup A \leqslant \inf B$；

若对 $\forall x \in A, \exists y \in B$，有 $x \leqslant y$，则 $\sup A \leqslant \sup B$；

若对 $\forall y \in B, \exists x \in A$，有 $x \leqslant y$，则 $\inf A \leqslant \inf B$；

(3) $\sup A \cup B=\max\{\sup A, \sup B\}$，$\inf A \cup B=\min\{\inf A, \inf B\}$；

$\max\{\inf A, \inf B\} \leqslant \inf A \cap B \leqslant \sup A \cap B \leqslant \min\{\sup A, \sup B\}$；

(4) $\inf A^{-}=-\sup A$，$\sup A^{-}=-\inf A$；

(5) 若 $c \geqslant 0$，则 $\inf cA=c\inf A$，$\sup cA=c\sup A$；

若 $c \leqslant 0$，则 $\inf cA=c\sup A$，$\sup cA=c\inf A$；

(6) 设 $a \in \mathbf{R}$，则 $\inf(a+A)=a+\inf A$，$\sup(a+A)=a+\sup A$；

(7) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$，$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$；

(8) 若 A,B 中数均非负，则 $\inf AB=\inf A \cdot \inf B$，$\sup AB=\sup A \cdot \sup B$.

证明 仅以(7)(8)为例，对于(7)$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$ 我们可以考虑以下三种方法.

证法一 要证 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$，即证 $\sup A+\sup B$ 是 $A+B$ 的上确界.

(ⅰ) $\forall x \in A, \forall y \in B$，有 $x \leqslant \sup A$，$y \leqslant \sup B$，从而 $x+y \leqslant \sup A+\sup B$.

(ⅱ) 对 $\forall \varepsilon>0, \exists x_0 \in A, \exists y_0 \in B$，使得 $x_0>\sup A-\frac{\varepsilon}{2}$，$y_0>\sup B-\frac{\varepsilon}{2}$，从而 $\exists x_0+y_0 \in A+B$，使得 $x_0+y_0>\sup A+\sup B-\varepsilon$.

故 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

证法二 (ⅰ) 同上

(ⅱ) 设 $\forall \alpha<\sup A+\sup B$，(这里的 α 相当于证法一中的 $\sup A+\sup B-\varepsilon$)，

$$\alpha'=\sup A-\frac{\sup A+\sup B-\alpha}{2}<\sup A,$$

$$\alpha''=\sup B-\frac{\sup A+\sup B-\alpha}{2}<\sup B,$$

从而 $\exists x_0 \in A, \exists y_0 \in B$，使得 $x_0>\alpha'$，$y_0>\alpha''$，从而 $x_0+y_0>\alpha'+\alpha''=\alpha$，

故 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

证法三　要证 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$，即证

(1) $\sup(A+B)\leqslant\sup A+\sup B$ 且 (2) $\sup(A+B)\geqslant\sup A+\sup B$.

事实上

(1) $\forall x\in A,\forall y\in B$，有 $x\leqslant\sup A, y\leqslant\sup B$，从而 $x+y\leqslant\sup A+\sup B$，即 $\sup A+\sup B$ 是 $A+B$ 的一个上界，故 $\sup(A+B)\leqslant\sup A+\sup B$.

(2) $\forall y\in B$，有 $y+A\subseteq A+B$，根据结论(1)得，$\sup(y+A)\leqslant\sup(A+B)$. 又根据结论(6)得，$y+\sup A=\sup(y+A)$，故 $\forall y\in B, y+\sup A\leqslant\sup(A+B)$，

即 $\sup(A+B)$ 是 $B+\sup A$ 的一个上界，于是 $\sup(B+\sup A)\leqslant\sup(A+B)$，

又 $\sup(B+\sup A)=\sup A+\sup B$，于是 $\sup(A+B)\geqslant\sup A+\sup B$.

对于(8) $\inf AB=\inf A\cdot\inf B$ 也可以类似考虑.

证法一　要证 $\inf AB=\inf A\cdot\inf B$，即证 $\inf A\cdot\inf B$ 是 AB 的下确界.

(i) $\forall x\in A,\forall y\in B$，有 $x\geqslant\inf A\geqslant 0, y\geqslant\inf B\geqslant 0$，从而 $xy\geqslant\inf A\inf B$.

(ii) 对 $\forall\varepsilon>0$，记 $\varepsilon'=\dfrac{-(\inf A+\inf B)+\sqrt{(\inf A+\inf B)^2+4\varepsilon}}{2}$，

则 $\varepsilon'>0$，且 $\exists x_0\in A,\exists y_0\in B$，使得 $x_0<\inf A+\varepsilon', y_0<\inf B+\varepsilon'$，从而，

$\exists x_0y_0\in AB$，使得 $x_0y_0<(\inf A+\varepsilon')(\inf B+\varepsilon')=\inf A\inf B+\varepsilon$.

故 $\inf AB=\inf A\cdot\inf B$.

证法二　要证 $\inf AB=\inf A\cdot\inf B$，即证

(1) $\inf AB\geqslant\inf A\cdot\inf B$ 且 (2) $\inf AB\leqslant\inf A\cdot\inf B$.

事实上

(1) $\forall x\in A,\forall y\in B$，有 $x\geqslant\inf A, y\geqslant\inf B$，从而 $xy\geqslant\inf A\inf B$，即 $\inf A\inf B$ 是 AB 的一个下界，故 $\inf AB\geqslant\inf A\cdot\inf B$.

(2) $\forall y\in B$，有 $yA\subseteq AB$，根据结论(1)得，$\inf yA\geqslant\inf AB$；又根据结论(5)得，$\inf yA=y\inf A$，故 $\forall y\in B, y\inf A\geqslant\inf AB$，

即 $\inf AB$ 是集 $B\inf A$ 的一个下界，故 $\inf AB\leqslant\inf(B\inf A)$，又 $\inf(B\inf A)=\inf A\inf B$，故 $\inf AB\leqslant\inf A\cdot\inf B$.

例 1.1.1 中其它关于确界等式的题目可适当选择上述三种方法之一，特别是方法三，将等式转化为两个关于确界的不等式，而关于确界不等式的题目则只需注

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

意将题目变形为"$\sup S \leqslant \eta$"(这只需证 η 是集 S 的一个上界)或"$\inf S \geqslant \xi$"(这只需证 ξ 是集 S 的一个下界).

例如:要证明 $\inf cA = c\inf A$,其中 $c \geqslant 0$.

不妨设 $c > 0$,要证 $\inf cA = c\inf A$,即证(1)$\inf cA \leqslant c\inf A$ 且(2)$\inf cA \geqslant c\inf A$.
对于(2)$\inf cA \geqslant c\inf A$,相当于证 $c\inf A$ 是 cA 的一个下界.
对于(1)$\inf cA \leqslant c\inf A$,向"$\inf S \geqslant \xi$" 形式转化,就是 $\inf A \geqslant \frac{1}{c}\inf cA$,相当于证 $\frac{1}{c}\inf cA$ 是 A 的一个下界.

1.1.2 函数振幅

定义 1.1.2 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义,$\omega(f,A) = \sup\limits_{\forall x,y\in A} |f(x) - f(y)|$ 称为函数 $f(x)$ 在数集 A 的振幅.

特别地,$f(x) = x$ 在数集 A 的振幅 $d(A) = \sup\limits_{\forall x,y\in A} |x - y|$,又称为数集 A 的直径.

$f(x)$ 在数集 A 的振幅就是函数 $f(x)$ 在数集 A 上的值域 $f(A)$ 的直径.

在几何上,函数 $f(x)$ 在数集 A 的振幅可以这样理解:函数图像在纵坐标方向上下震荡的幅度或者是数集 $f(A)$ 中任意两点的最远距离(当然未必可达,例如有限的开区间 (a,b) 与闭区间 $[a,b]$ 的直径都是 $b-a$,但前者是找不到这样两个点使得其距离为 $b-a$ 的).

数集 A 有界当且仅当数集 A 的直径 $d < +\infty$;

$f(x)$ 在数集 A 有界当且仅当 $\omega(f,A) < +\infty$.(请读者自证一下!)

例 1.1.2 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有界,则 $f(x)$ 在数集 A 的振幅的等价形式为 $\omega(f,A) = \sup\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\} - \inf\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}$.

证明 首先证明 $\sup\limits_{\forall x,y\in A} |f(x) - f(y)| = \sup\limits_{\forall x,y\in A}\{f(x) - f(y)\}$.

令 $B = \{|f(x) - f(y)| \mid \forall x,y \in A\}$,$C = \{f(x) - f(y) \mid \forall x,y \in A\}$.

因 $\forall x,y \in A$,$|f(x) - f(y)| = \begin{cases} f(x) - f(y), f(x) \geqslant f(y) \\ f(y) - f(x), f(x) < f(y) \end{cases}$,故 $B \subseteq C$,

进而由例 1.1.1(1) 知,$\sup B \leqslant \sup C$.

又 $\forall x,y\in A, f(x)-f(y)\leqslant |f(x)-f(y)|$，由例 1.1.1(2) 知，$\sup B\geqslant \sup C$，

从而 $\sup\limits_{\forall x,y\in A}|f(x)-f(y)|=\sup\limits_{\forall x,y\in A}\{f(x)-f(y)\}$.

其次证明 $\sup\limits_{\forall x,y\in A}\{f(x)-f(y)\}=\sup\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\inf\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}$.

由例 1.1.1(4)、(7) 知，

$$\begin{aligned}\sup_{\forall x,y\in A}\{f(x)-f(y)\}&=\sup_{\forall x,y\in A}\{f(x)+[-f(y)]\}\\&=\sup_{\forall x\in A}\{f(x)\}+\sup_{\forall x\in A}\{-f(x)\}\\&=\sup_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\inf_{\forall x\in A}\{f(x)\}.\end{aligned}$$

或证：$\forall x,y\in A$，有 $f(x)\leqslant\sup\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}$ 与 $-f(y)\leqslant-\inf\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}$，进而

$$f(x)-f(y)\leqslant\sup_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\inf_{\forall x\in A}\{f(x)\}.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in A,y_0\in A$，使得

$$f(x_0)>\sup_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\frac{\varepsilon}{2},f(y_0)<\inf_{\forall x\in A}\{f(x)\}+\frac{\varepsilon}{2},$$

进而 $f(x_0)-f(y_0)>\sup\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\inf\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\varepsilon$，由确界定义知，

$\sup\limits_{\forall x,y\in A}\{f(x)-f(y)\}=\sup\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}-\inf\limits_{\forall x\in A}\{f(x)\}$.

下面的例 1.1.3、例 1.1.4 作为振幅概念的应用，利用振幅分别刻划函数在一点处的极限、连续以及在闭区间的一致连续.

例 1.1.3　(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(f,\mathring{U}(a,\delta))=0$；

(2) $f(x)$ 在 a 连续当且仅当 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(f,U(a,\delta))=0$.

证明　(1) 必要性

因 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，由 Cauchy(柯西) 收敛准则知，

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0,\forall x,y\in\mathring{U}(a,\delta(\varepsilon))，有 |f(x)-f(y)|<\varepsilon,$$

进而　$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0,\omega(f,\mathring{U}(a,\delta(\varepsilon)))\leqslant\varepsilon,$$

而对于 $\forall\delta:0<\delta<\delta(\varepsilon)$，有 $\mathring{U}(a,\delta)\subset\mathring{U}(a,\delta(\varepsilon))$，

进一步就有　$$\omega(f,\mathring{U}(a,\delta))\leqslant\omega(f,\mathring{U}(a,\delta(\varepsilon)))\leqslant\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(f,\mathring{U}(a,\delta))=0$.

充分性

因 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(f,\mathring{U}(a,\delta))=0$，故

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, 对\ \forall \delta: 0 < \delta < \delta(\varepsilon), 有\ \omega(f, \mathring{U}(a,\delta)) < \varepsilon,$$

从而 $$\forall x,y \in \mathring{U}(a,\delta), 有\ |f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{\forall x,y\in \mathring{U}(a,\delta)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

由 Cauchy 收敛准则知，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在.

(2) 只需将结论(1) 证明过程中的空心邻域改为实心邻域即可.

例 1.1.4 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上一致连续充要条件是对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，对任意的分法 T：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b,$$

当 $\lambda(T) < \delta$ 时，对 $\forall k = 1,2,\cdots,n$，有 $\omega_k < \varepsilon$.

其中 $\lambda(T) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k - x_{k-1}\}, \omega_k = \omega(f, [x_{k-1}, x_k])$

$$= \sup_{\forall x,y\in[x_{k-1},x_k]} |f(x) - f(y)|.$$

证明 必要性

因函数 $f(x)$ 在$[a,b]$一致连续，根据定义就有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,y \in [a,b], |x-y| < \delta, 有\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

于是对任意的分法 T：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b,$$

当 $\lambda(T) < \delta$ 时，对 $\forall k = 1,2,\cdots,n$，有

$$\omega_k = \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = \sup_{\forall x,y\in[x_{k-1},x_k]} |f(x) - f(y)| = M_k - m_k < \varepsilon,$$

其中 M_k 为 $f(x)$ 在$[x_{k-1}, x_k]$的最大值，m_k 为 $f(x)$ 在$[x_{k-1}, x_k]$的最小值.

充分性

已知对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，对任意的分法 T:$\lambda(T) < \delta, \forall k = 1,2,\cdots,n$，有 $\omega_k < \varepsilon$.

任取 $x,y \in [a,b]$，且 $|x-y| < \delta$，总存在以所取的 x,y 为分点的分法 T，且 $\lambda(T) < \delta$，进而 $\forall k = 1,2,\cdots,n$，有 $\omega_k < \varepsilon$，进一步就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$，即 $f(x)$ 在$[a,b]$一致连续.

例 1.1.4 被称为振幅一致小定理，利用它并结合可积准则可以获得连续函数可积性.

例 1.1.5 若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$可积.

证明 因函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，从而函数 $f(x)$ 在$[a,b]$一致连续.

根据例 1.1.4 知，

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，对任意的分法 $T:\lambda(T) < \delta, \forall k = 1,2,\cdots,n$，有 $\omega_k < \varepsilon$.

于是，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，对任意的分法 $T:\lambda(T) < \delta, \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b-a)$，即 $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0$，由可积准则知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

思考题 1.1

1. 设函数 $f(x), g(x)$ 在数集 A 有界，即 $\exists M, N > 0$，对 $\forall x \in A$，有 $|f(x)| \leqslant M, |g(x)| \leqslant N$，证明：

$$\omega(f \pm g, A) \leqslant \omega(f, A) + \omega(g, A);$$

$$\omega(fg, A) \leqslant N\omega(f, A) + M\omega(g, A).$$

2. 设 f, g 为 D 上有界函数，证明：$\inf_{x\in D} f(x) + \inf_{x\in D} g(x) \leqslant \inf_{x\in D}\{f(x) + g(x)\} \leqslant \inf_{x\in D} f(x) + \sup_{x\in D} g(x) \leqslant \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \leqslant \sup_{x\in D} f(x) + \sup_{x\in D} g(x)$

1.2　实数完备性

本节围绕实数完备性定理展开讨论，除了回顾实数完备性定理的基本内容之外，我们还强化了区间套定理、单调有界定理的应用，特别是用区间套定理将数学中的三个重要常数——e、c（欧拉常数）、π“套”了出来.

1.2.1　实数完备性定理的基本内容

实数完备性定理包括七个等价命题。

(1) 确界定理：非空有上（下）界数集必有唯一的上（下）确界（实数集 **R** 及 **R** 的子集简称为数集）.

(2) 单调有界定理：单调增加有上界（或单调减少有下界）的数列必收敛.

(3)Cauchy 收敛准则：

$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, \forall p \in N_+$，有 $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$.

(4) 区间套定理：闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足条件：

$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1,2,\cdots$，即 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant$

$b_2 \leqslant b_1$

以及$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，则称$\{[a_n, b_n]\}$是一个闭区间套，此时必存在唯一的$\xi \in [a_n, b_n]$，$n = 1, 2, \cdots$.

(5) 有限覆盖定理：

设H为闭区间$[a,b]$的一个无限开覆盖，则H中必有有限多个开区间覆盖$[a,b]$.

(6) 聚点定理：有界无限数集至少有一个聚点.

(7) 致密性定理：有界点列必有收敛子列.

例 1.2.1 用其它实数完备性定理证明单调有界定理：若$\{x_n\}$单调增加有上界，则$\{x_n\}$收敛.

证法一(用区间套定理)

设$\{x_n\} \subset [a,b]$，对$[a,b]$二等分得$[a, \frac{a+b}{2}]$，$[\frac{a+b}{2}, b]$.

若$[\frac{a+b}{2}, b]$含$\{x_n\}$中的项，则记$[\frac{a+b}{2}, b] = [a_1, b_1]$，否则记$[a, \frac{a+b}{2}] = [a_1, b_1]$.

对$[a_1, b_1]$实施同样的步骤，优先记$[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1] = [a_2, b_2]$，否则记$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] = [a_2, b_2]$.

如此下去，得到闭区间套$\{[a_n, b_n]\}$，且由数列$\{x_n\}$的单调性可得如下性质：

$\forall n \in N_+$，$[a_n, b_n]$中含有数列$\{x_n\}$的几乎所有项. 由闭区间套定理知，存在唯一一点$c \in [a_n, b_n]$，$n = 1, 2, \cdots$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

于是，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N_+$，$\forall n > N$，有$[a_n, b_n] \subset U(a, \varepsilon)$，从而$U(a, \varepsilon)$含有数列$\{x_n\}$的几乎所有项，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

证法二(用确界定理)

单调增加有上界数列$\{x_n\}$构成非空有界数集，仍用$\{x_n\}$表示该数集(相同项为一个元素). 由确界定理知，$\sup\{x_n\}$存在，设$\sup\{x_n\} = c$.

由上确界定义知， $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N_+$，使得$c - \varepsilon < x_N$，

于是， 对$\forall n > N$，有$c - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant c < c + \varepsilon$，

即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

证法三(用有限覆盖定理)

(反证法)假设$\{x_n\}$不存在极限,则对于包含$\{x_n\}$的闭区间$[a,b]$中的任意一点都不会是$\{x_n\}$的极限,即$U(x,\varepsilon_x)$之外含有数列$\{x_n\}$的无限多项,再由数列的单调性可知$\{x_n\}$的几乎所有项在$U(x,\varepsilon_x)$之外,邻域$U(x,\varepsilon_x)$之内只能含有数列$\{x_n\}$的有限多项.构造开邻域族

$$G=\{U(x,\varepsilon_x)\mid\forall x\in[a,b],U(x,\varepsilon_x)\text{ 只含数列}\{x_n\}\text{的有限多项}\},$$

G覆盖闭区间$[a,b]$,由有限覆盖定理知,G中存在有限多个开邻域也覆盖$[a,b]$,从而$\{x_n\}$也被这有限多个开邻域覆盖,这与$\{x_n\}$只有有限多项矛盾.

证法四(用聚点定理)

如果数列$\{x_n\}$中有无限多相同的项,则由$\{x_n\}$的单调性知,$\{x_n\}$可视作常数列,此时必存在极限.

如果数列$\{x_n\}$中只有有限多项相同,则$\{x_n\}$可视作有界无限点集,由聚点定理知,$\{x_n\}$至少存在一个聚点c.由聚点定义知,$\forall\varepsilon>0,U(c,\varepsilon)$中含有$\{x_n\}$的无限多项,从而含有$\{x_n\}$的几乎所有项,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

证法五(用 Cauchy 收敛准则)

(反证法)假设$\{x_n\}$不存在极限,由 Cauchy 收敛准则的否定叙述知,

$\exists\varepsilon_0>0,\forall n\in N_+,\exists N,M>n(N>M)$,有$|x_N-x_M|\geqslant\varepsilon_0$,或$x_N\geqslant x_M+\varepsilon_0$.

构造子列:对于$n=1,\exists N_1,M_1>1(N_1>M_1)$,有$x_{N_1}\geqslant x_{M_1}+\varepsilon_0$;

对于$n=N_1,\exists N_2,M_2>N_1(N_2>M_2)$,有$x_{N_2}\geqslant x_{M_2}+\varepsilon_0\geqslant x_{N_1}+\varepsilon_0\geqslant x_{M_1}+2\varepsilon_0$;

……

对于$n=N_{k-1},\exists N_k,M_k>N_{k-1}(N_k>M_k)$,有$x_{N_k}\geqslant x_{M_k}+\varepsilon_0\geqslant x_{N_{k-1}}+\varepsilon_0\geqslant x_{M_1}+k\varepsilon_0$;

……

由此得到子列$\{x_{N_k}\}$,且$x_{N_k}\geqslant x_{M_1}+k\varepsilon_0$,从而$\lim\limits_{k\to\infty}x_{N_k}=+\infty$,这与$\{x_n\}$有界矛盾.

注　(1)闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$的公共点也是两个端点数列$\{a_n\}\{b_n\}$的公共极

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com