

新课标**高考数学**
第二轮复习用书

2014



洞穿高考

数学辅导丛书

洞穿高考数学 解答题核心考点

理科版



提炼核心考点，构建数学题模型，
举一反三，“秒杀”高考数学解答题

主编 ● 张永辉

清华大学出版社



洞穿高考数学辅导丛书

- 《新课标高考数学题型全归纳（理科版）》 张永辉 主编

- 《新课标高考数学题型全归纳（文科版）》 张永辉 主编

系统总结高考数学常考题型解题方法与技巧，从历年高考真题和众多经典模拟题中精选200个核心题型进行解题思路与方法的分析，举一反三，提高解题速度。

适用阶段：高考数学第一轮复习

- 《洞穿高考数学解答题核心考点（理科版）》 张永辉 主编

- 《洞穿高考数学解答题核心考点（文科版）》 张永辉 主编

深度把握高考解答题的核心考点，构建试题模型，帮助考生“秒杀”高考解答题，从容解答。

适用阶段：高考数学第二轮复习

- 《30分钟拿下高考数学选择题、填空题（理科版）》 张永辉 主编

- 《30分钟拿下高考数学选择题、填空题（文科版）》 张永辉 主编

系统总结选择题和填空题的6种解题方法与技巧，精编30套限时训练题，帮助考生30分钟拿下高考数学选择题和填空题。

适用阶段：高考数学第二轮复习

- 《高考数学临门一脚（理科版）》 张永辉 主编

- 《高考数学临门一脚（文科版）》 张永辉 主编

以高考前查漏补缺为主题的复习宝典，帮助考生实现高考前全方位、无死角的复习。最后30题涵盖所有重要考点，点破考试方向。

适用阶段：高考数学考前冲刺阶段

清华大学出版社数字出版网站

WQBook 书文局

www.wqbook.com

组合官网: www.zhongguoshuxue.com

读者答疑QQ群: 187811968

邮箱地址: zhangyonghui88881@sina.com

答疑热线: 15011177866

上架建议：高中数学

ISBN 978-7-302-35056-9



9 787302 350569 >

定价：38.00元



洞穿高考

数学辅导丛书

洞穿高考数学 解答题核心考点

理科版

主编 ● 张永辉

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

《洞穿高考数学解答题核心考点》是为快速提高考生高考数学解答题的解题能力而编写的考前第二轮复习用书,分为理科版和文科版,系统介绍了高考数学解答题的六大板块:三角函数、立体几何、概率统计、解析几何、函数与导数、数列与不等式及创新题。本书从历年的高考真题和众多经典模拟题中筛选核心考点,归纳并总结出各类考点的解题方法和技巧,解法快捷,旨在帮助考生“秒杀”高考解答题,达到口述回答解答题的从容境界。

本书为理科版,适合高考理科学生、高中数学教师、高考数学命题与考试研究者以及广大数学爱好者参考使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

洞穿高考数学解答题核心考点:理科版/张永辉主编. —北京:清华大学出版社,2014

(洞穿高考数学辅导丛书)

ISBN 978-7-302-35056-9

I. ①洞… II. ①张… III. ①中学数学课—高中—题解—升学参考资料 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 003984 号

责任编辑:陈仕云

封面设计:刘超

版式设计:文森时代

责任校对:赵丽杰

责任印制:沈露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市中晟雅豪印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:203mm×280mm 印 张:17.25 字 数:498 千字

版 次:2014 年 1 月第 1 版 印 次:2014 年 1 月第 1 次印刷

印 数:1~4500

定 价:38.00 元

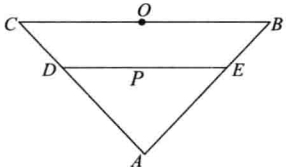
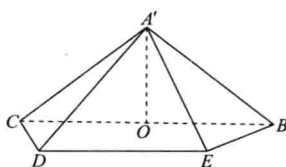
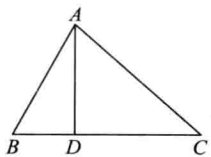
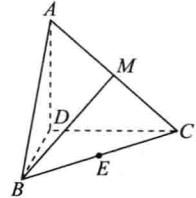
产品编号:053489-01

《洞穿高考数学解答题核心考点(2013版)》

与2013年高考真题对照表

绝非猜题,但命题神似! 绝非押题,但题名金榜!

《洞穿高考数学解答题核心考点》上的试题经多年沉淀,很多题目与高考试题相差无几,神似真题考前活现. 现摘录部分相似试题,以飨读者.

2013年普通高等学校全国统一考试试题	《洞穿高考数学解答题核心考点(2013版)》
2013 天津理 15 已知函数 $f(x) = -\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x + 1, x \in \mathbf{R}$. (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期; (2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.	第一章 三角函数 核心考点一 三角函数的图像和性质 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos^2 x - 1, x \in \mathbf{R}$. (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期; (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值. (2013 版第 3 页例 1.1 变式 2)
相似点: 考查三角恒等变换, 研究三角函数的值域(最值)、周期. 首先要将函数解析式化为“$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B$”的形式求解. 相似度: 95%.	
2013 新课标全国理 II 17 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $a = b \cos C + c \sin B$. (1) 求 B; (2) 若 $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.	第一章 三角函数 核心考点二 解三角形 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且满足 $\frac{2c-b}{a} = \frac{\cos B}{\cos A}$. (1) 求角 A 的大小; (2) 若 $a = 2\sqrt{5}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值. (2013 版第 9 页例 1.6)
相似点: 通过边角的转换, 结合了三边形的内角和定理的知识, 以及正弦定理, 求解三角形中角的问题. 求解三角形面积的最值问题, 其设问方式均, 已知一边及其对角, 求解面积的最大值. 相似度: 100%.	
2013 广东理 18 如图 1 所示, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle A = 90^\circ$, $BC = 6$, D, E 分别是 AC, AB 上的点, $CD = BE = \sqrt{2}$, O 为 BC 的中点. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 得到如图 2 所示的四棱锥 $A'-BCDE$, 其中 $A'O = \sqrt{3}$.	第二章 立体几何 如图 1 所示, $\angle ACB = 45^\circ$, $BC = 3$, 过动点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足 D 在线段 BC 上且异于点 B, 连接 AB, 沿 AD 将 $\triangle ABD$ 折起, 使 $\angle BDC = 90^\circ$, 如图 2 所示.
 图 1	 图 2
 图 1	 图 2

- (1) 证明: $A'O \perp$ 平面 $BCDE$;
 (2) 求二面角 $A'-CD-B$ 的平面角的余弦值.

- (1) 当 BD 的长为多少时, 三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大;
 (2) 当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时, 设点 E, M 分别为棱 BC, AC 的中点, 在棱 CD 上确定一点 N , 使得 $EN \perp BM$, 并求 EN 与平面 BMN 所成角的大小.

(2013 版第 25 页例 2.8 变式 5)

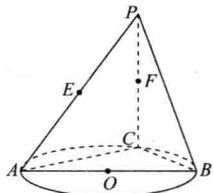
相似点: 以平面图形为背景进行折叠变换, 研究空间几何中的位置关系并计算空间角. 这是近几年高考数学立体几何命题的新特点、新趋势, 并将形成命题的常态.

相似度: 90%.

2013 湖北理 19(1)

如图所示, AB 是圆 O 的直径, 点 C 是圆 O 上异于 A, B 的点, 直线 $PC \perp$ 平面 ABC , E, F 分别是 PA, PC 的中点.

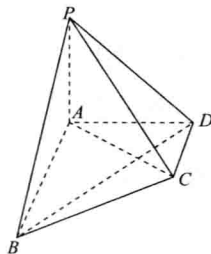
(1) 记平面 BEF 与平面 ABC 的交线为 l , 试判断直线 l 与平面 PAC 的位置关系, 并加以证明.



第二章 立体几何

核心考点一 证明空间中的平行与垂直的位置关系
 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AB \perp AD$, $AB=4, AD=2\sqrt{2}, CD=2, PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=4$.

(1) 设平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = m$. 求证: $CD \parallel m$.



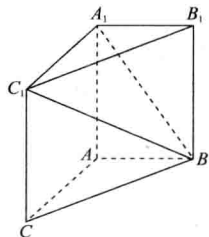
(2013 版备选题)

相似点: 利用线面平行的判定定理, 证明线面平行, 再证明线面平行(线面平行的性质定理), 进而得出结论.

相似度: 100%.

2013 北京理 17

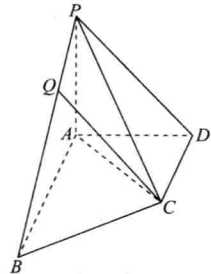
如图所示, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, AA_1C_1C 是边长为 4 的正方形. 平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C , $AB=3, BC=5$.



- (1) 求证: $AA_1 \perp$ 平面 ABC ;
 (2) 求二面角 $A_1-BC_1-B_1$ 的余弦值;
 (3) 证明: 在线段 BC_1 存在点 D , 使得 $AD \perp A_1B$, 并求 $\frac{BD}{BC_1}$ 的值.

第二章 立体几何

核心考点二 空间角及空间距离的计算
 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AB \perp AD$, $AB=4, AD=2\sqrt{2}, CD=2, PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=4$. 设点 Q 为线段 PB 上一点, 且直线 QC 与平面 PAC 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\frac{PQ}{PB}$ 的值.



(2013 版第 25 页例 2.8 变式 6)

相似点:利用向量法求解探究性问题,进行线段长比值的计算.相似度:90%.

2013 山东理 19

甲、乙两支排球队进行比赛,约定先胜 3 局者获得比赛的胜利,比赛随即结束,除第五局甲队获胜的概率是 $\frac{1}{2}$ 外,其余每局比赛甲队获胜的概率都是 $\frac{2}{3}$,假设各局比赛结果相互独立.

- (1)分别求甲队以 3:0,3:1,3:2 胜利的概率;
(2)若比赛结果为 3:0 或 3:1,则胜利方得 3 分、对方得 0 分;若比赛结果为 3:2,则胜利方得 2 分、对方得 1 分.求乙队得分 X 的分布列及数学期望.

第三章 概率统计

核心考点一 离散型随机变量的分布列及期望
乒乓球单打比赛在甲、乙两名运动员间进行,比赛采用 7 局 4 胜制(即先胜 4 局者获胜,比赛结束),假设两人在每一局比赛中获胜的可能性相同.

- (1)求甲以 4:1 的比分获胜的概率;
(2)求乙获胜且比赛局数多于 5 局的概率;
(3)求比赛局数的分布列.

(2013 版第 34 页例 3.1 变式 5)

相似点:考查相互独立事件的概率、二项分布、离散型随机变量的概率分布与期望.相似度:90%.

2013 辽宁理 19

现有 10 道题,其中 6 道甲类题,4 道乙类题,张同学从中任取 3 道题解答.

- (1)求张同学至少取到 1 道乙类题的概率;
(2)已知所取的 3 道题中有 2 道甲类题,1 道乙类题.设张同学答对甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$,答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$,且各题答对与否相互独立.用 X 表示张同学答对题的个数,求 X 的分布列和数学期望.

第三章 概率统计

核心考点一 离散型随机变量的分布列及期望
 A, B 是治疗同一疾病的两种药,用若干试验组进行对比试验,每个试验组由四只小白鼠组成,其中两只服用 A 种药,另外两只服用 B 种药,然后观察疗效.若在一个试验中,服用 A 种药有效的白鼠只数多于服用 B 种药有效的白鼠只数,就称该试验组为甲类组.设每只白鼠服用 A 种药有效的概率为 $\frac{2}{3}$,服用 B 种药有效的概率为 $\frac{1}{2}$.

- (1)求一个试验组为甲类组的概率;
(2)观察 3 个试验组,用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数,求 ξ 的分布列和数学期望及方差.

(2013 版第 35 页例 3.2 变式 2)

相似点:考查二项分布的概率公式及相互独立事件的概率计算.相似度:90%.

2013 重庆理 18

某商场举行的“三色球”购物摸奖活动规定:在一次摸奖中,摸奖者先从装有 3 个红球与 4 个白球的袋中任意摸出 3 个球,再从装有 1 个蓝球与 2 个白球的袋中任意摸出 1 个球,根据摸出 4 个球中红球与蓝球的个数,设一、二、三等奖如下:

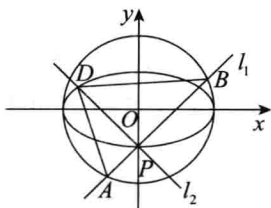
奖级	摸出红、蓝球个数	获奖金额
一等奖	3 红 1 蓝	200 元
二等奖	3 红 0 蓝	50 元
三等奖	2 红 1 蓝	10 元

第三章 概率统计

核心考点一 离散型随机变量的分布列及期望
某批产品成箱包装,每箱 5 件,一用户在购买这批产品之前,首先取出 3 箱,再从每箱中任取 2 件产品进行检验.设第 1,2,3 箱产品中分别有二等品 0,1,2 件,其余都是一等品.

- (1)用 ξ 表示抽检的 6 件产品中二等品的件数,求 ξ 的分布列和数学期望;
(2)若抽检的 6 件产品有 2 件或 2 件以上为二等品,用户就拒绝购买这批产品,求用户拒绝购买这批产品的概率.

(2013 版第 33 页例 3.1 变式 2)

其余情况无奖且每次摸奖最多只能获得一个奖级. (1)求一次摸奖恰好摸到 1 个红球的概率; (2)求摸奖者在一次摸奖中获奖金额 X 的分布列与期望 $E(X)$.	
相似点:利用古典概型的概率计算方法解答.先确定随机变量的所有可能值,然后分别计算出这些取值的概率,列出分布列,再利用期望公式求期望.相似度:90%.	
2013 陕西理 20 已知动圆过定点 $A(4,0)$,且在 y 轴上截得弦 MN 的长为 8. (1)求动圆圆心的轨迹 C 的方程; (2)已知点 $B(-1,0)$,设不垂直于 x 轴的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 P, Q,若 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线,证明直线 l 过定点.	第四章 解析几何 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{5}}{3}$,定点 $M(2,0)$,椭圆短轴的端点是 B_1, B_2,且 $MB_1 \perp MB_2$. (1)求椭圆 C 的方程; (2)设过点 M 且斜率不为 0 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点.试问 x 轴上是否存在定点 P,使 PM 平分 $\angle APB$? 若存在,求出点 P 的坐标;若不存在,说明理由. (2013 版备选题)
相似点:设出直线 l 的方程,与轨迹 C 联立,得到 C 的方程,由根与系数的关系得到两根的和与积,并利用 x 轴是角平分线的性质得到 P, Q 两点的坐标关系式,进而得到直线所过的定点.相似度:95%.	
2013 新课标全国 I 理 20(1) 已知圆 $M: (x+1)^2 + y^2 = 1$,圆 $N: (x-1)^2 + y^2 = 9$,动圆 P 与圆 M 外切并且与圆 N 内切,圆心 P 的轨迹为曲线 C.求 C 的方程.	第四章 解析几何 核心考点一 求动点的轨迹方程 设圆 C 与两圆 $(x+\sqrt{5})^2 + y^2 = 4, (x-\sqrt{5})^2 + y^2 = 4$ 中的一个内切,另一个外切.求 C 的圆心轨迹 L 的方程. (2013 版第 43 页例 4.2 变式 2)
相似点:利用几何性质结合曲线(圆、椭圆、双曲线、抛物线)的定义,求解动点的轨迹方程. 相似度:100%.	
2013 浙江理 21 如图所示,点 $P(0, -1)$ 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点, C_1 的长轴是圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4$ 的直径. l_1, l_2 是过点 P 且互相垂直的两条直线,其中 l_1 交圆 C_2 于 A, B 两点, l_2 交椭圆 C_1 于另一点 D. (1)求椭圆 C_1 的方程; (2)求 $\triangle ABD$ 面积取最大值时直线 l_1 的方程. 	第四章 解析几何 核心考点三 定点、定值、最值问题 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,过点 $(m, 0)$ 作 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线交椭圆 C 于点 A, B. (1)求椭圆的焦点和离心率; (2)求 AB 的最大值. (2013 版第 70 页例 4.22 变式 1)

相似点:将所求三角形或弦长表示为目标函数,利用基本不等式或者函数方法求最值.

相似度:95%.

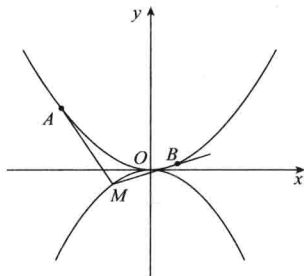
2013 辽宁理 20

如图所示,抛物线 $C_1: x^2 = 4y$, $C_2: x^2 = -2py$ ($p > 0$). 点 $M(x_0, y_0)$ 在抛物线 C_2 上,过 M 作 C_1 的切线,切点为 A, B (M 为原点 O 时, A, B 重合于 O).

当 $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ 时,切线 MA 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

(1)求 p 的值;

(2)当 M 在 C_2 上运动时,求线段 AB 中点 N 的轨迹方程(A, B 重合于 O 时,中点为 O).



第四章 解析几何

核心考点一 求动点的轨迹方程

在平面直角坐标系 xOy 中,有一个以 $F_1(0, -\sqrt{3})$ 和 $F_2(0, \sqrt{3})$ 为焦点,离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆. 设椭圆在第一象限的部分为曲线 C , 动点 P 在 C 上, C 在点 P 处的切线与 x, y 轴的交点分别为 A, B , 且向量 $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$. 求点 M 的轨迹方程.

(2013 版第 49 页例 4.6 变式 3)

相似点:在求动点轨迹时,有时出现两曲线交点的轨迹问题,这类问题常常通过解方程组得到交点的坐标(或含参数),再消去参数得出所求轨迹的方程. 相似度:90%.

2013 辽宁理 21(1)

已知函数 $f(x) = (1+x)e^{-2x}$. 当 $x \in [0, 1]$ 时, 求证: $1-x \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x}$.

第五章 函数与导数

核心考点五 利用导数证明不等式

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

(1)求 $f(x)$ 的极小值;

(2)若 $a, b > 0$, 求证: $\ln a - \ln b \geq 1 - \frac{b}{a}$.

(2013 版第 93 页例 5.14)

相似点:利用导数证明不等式的关键是构造函数,有时根据题设直接证明显然难度很大,所以需要将不等式等价转化为较容易证明的结构形式. 相似度:95%.

2013 江苏 20(1)

设函数 $f(x) = \ln x - ax$, $g(x) = e^x - ax$, 其中 a 为实数. 若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是单调减函数, 且 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有最小值, 求 a 的取值范围.

第五章 函数与导数

核心考点二 含参函数在区间上具有单调性、无单调性或存在单调区间,求参数范围

设函数 $f(x) = xe^{kx}$ ($k \neq 0$).

(1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3)若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递增, 求 k 的取值范围.

(2013 版第 79 页例 5.3)

相似点:对导数单调性的考查侧重于已知函数的解析式求函数的单调区间,已知函数在某个区间上的单调性求参数的取值范围,已知函数存在单调减区间或单调增区间求参数的取值范围.

相似度:95%.

2013 山东理 21(1)

设函数 $f(x) = \frac{x}{e^{2x}} + c$ ($e = 2.71828\cdots$ 是自然对数的底数, $c \in \mathbf{R}$). 求 $f(x)$ 的单调区间、最大值.

第五章 函数与导数

核心考点一 含参函数的单调性(区间)与极值、最值
设函数 $f(x) = ax - (a+1)\ln(x+1)$, 其中 $a \geq -1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2013 版第 76 页例 5.1)

相似点:对函数求导,求解不等式求出单调区间. 相似度:95%.

2013 广东理 21

设函数 $f(x) = (x-1)e^x - kx^2$ (其中 $k \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $k=1$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 时,求函数 $f(x)$ 在 $[0, k]$ 上的最大值 M .

第五章 函数与导数

核心考点一 含参函数的单调性(区间)与极值、最值

已知函数 $f(x) = ax^2 + 1$ ($a > 0$), $g(x) = x^3 + bx$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处具有公共切线,求 a, b 的值;

(2) 当 $a^2 = 4b$ 时,求函数 $f(x) + g(x)$ 的单调区间,并求其在区间 $(-\infty, -1]$ 上的最大值.

(2013 版第 79 页例 5.2 变式 2)

相似点:在求解含有参数的闭区间上的函数最值问题中,分类讨论的标准是函数的极值点与区间的位置关系.根据位置确定函数在区间上的单调性,如果极值点在区间内,再结合区间的端点值进行进一步讨论. 相似度:95%.

2013 天津理 20

已知函数 $f(x) = x^2 \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明:对任意的 $t > 0$,存在唯一的 s ,使 $t = f(s)$;

(3) 设(2)中所确定的 s 关于 t 的函数为 $s = g(t)$,证明:当 $t > e^2$ 时,有 $\frac{2}{5} < \frac{\ln g(t)}{\ln t} < \frac{1}{2}$.

第五章 函数与导数

核心考点五 利用导数证明不等式

(1) 设函数 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$,

证明:当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;

(2) 从编号 1 到 100 的 100 张卡中每次随机抽取一张,然后放回,用这种方法连续抽取 20 次,设抽得的 20 个号码互不相同的概率为 p ,

证明: $p < \left(\frac{9}{10}\right)^{19} < \frac{1}{e^2}$.

(2013 版第 93 页例 5.13 变式 2)

相似点:构造辅助函数,把不等式的证明转化为利用导数研究函数的单调性或求最值,从而证得不等式,构造函数是用导数证明不等式的关键. 相似度:95%.

2013 大纲理 22 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$. (1) 若 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq 0$, 求 λ 的最小值; (2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 证明: $a_{2n} - a_n + \frac{1}{4n} > \ln 2$.	第五章 函数与导数 核心预测题 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$. (1) 若函数在区间 $(m, m + \frac{1}{3})$ (其中 $m > 0$) 上存在极值, 求实数 m 的取值范围; (2) 如果当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $f(x) \geq \frac{k}{x+1}$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围; (3) 求证: $[(n+1)!]^2 > (n+1) \cdot e^{n-2} (n \in \mathbf{N}^*)$. (2013 版第 163 页预测题十一题)
相似点: 两道试题都是通过前一问的参数的取值范围的端点值来构造不等式, 从而构造辅助函数证明不等式. 相似度: 95%.	
2013 天津理 19(1) 已知首项为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列, 其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $S_3 + a_3, S_5 + a_5, S_4 + a_4$ 成等差数列. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.	第六章 数列与不等式及创新题 核心考点一 等差数列与等比数列的综合 设 $\{a_n\}$ 是公比大于 1 的等比数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_3 = 7$, 且 $a_1 + 3, 3a_2, a_3 + 4$ 构成等差数列. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项. (2013 版第 99 页例 6.1 变式 2)
相似点: 等差数列与等比数列的综合, 求解数列的通项公式. 相似度: 95%.	
2013 山东理 20 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $S_4 = 4S_2$, $a_{2n} = 2a_n + 1$. (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 且 $T_n + \frac{a_n + 1}{2^n} = \lambda (\lambda \text{ 为常数})$, 令 $c_n = b_{2n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 R_n.	第六章 数列与不等式及创新题 核心考点三 数列的求和 设 $a_1 = 1, a_2 = \frac{5}{3}, a_{n+2} = \frac{5}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 令 $b_n = a_{n+1} - a_n (n \in \mathbf{N}^*)$. (1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 S_n. (2013 版第 112 页例 6.15)
相似点: 利用错位相减法求解数列的前 n 项和. 相似度: 95%.	
2013 广东理 19 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $a_1 = 1, \frac{2S_n}{n} = a_{n+1} - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}, n \in \mathbf{N}^*$. (1) 求 a_2 的值; (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (3) 证明: 对一切正整数 n, 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$.	第六章 数列与不等式 核心考点四 数列与不等式的综合及创新题 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 满足 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1, n \in \mathbf{N}^*$, 且 $a_1, a_2 + 5, a_3$ 成等差数列. (1) 求 a_1 的值; (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (3) 证明: 对一切正整数 n, 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$. (2013 版第 125 页例 6.25 变式 4)

相似点:考查利用 S_n 与 a_n 的关系求解通项公式,不等式证明问题. 对于 $\sum_{i=1}^n a_i < C$ 或 $\sum_{i=1}^n a_i > C$ (C 是常数)的数列不等式的证明,一般考虑对 a_n 进行放缩,目标是变成可求和的情形,通常为可裂项相消或压缩等比的数列. 证明时要注意对照求证的结论,调整和控制放缩的度. 以上两题均转化为压缩等比数列求和. 相似度:100%.

2013 北京理 20

已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的无穷数列,该数列前 n 项的最大值记为 A_n ,第 n 项之后各项 $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ 的最小值记为 $B_n, d_n = A_n - B_n$.

(1)若 $\{a_n\}$ 为 $2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, \dots$, 是一个周期为 4 的数列(即对任意 $n \in \mathbf{N}^*, a_{n+4} = a_n$),写出 d_1, d_2, d_3, d_4 的值;

(2)设 d 为非负整数,证明: $d_n = -d (n=1, 2, 3, \dots)$ 的充分必要条件为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列;

(3)证明:若 $a_1 = 2, d_n = 1 (n=1, 2, 3, \dots)$, 则 $\{a_n\}$ 的项只能是 1 或者 2,且有无穷多项为 1.

第六章 数列与不等式及创新题

核心考点四 数列与不等式的综合及创新题

若数列 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$, 满足 $|a_{k+1} - a_k| = 1 (k=1, 2, \dots, n-1)$, 则称 A_n 为 E 数列,记 $S(A_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

(1)写出一个满足 $a_1 = a_5 = 0$, 且 $S(A_5) > 0$ 的 E 数列 A_5 ;

(2)若 $a_1 = 12, n = 2000$, 证明: E 数列是递增数列的充要条件是 $a_n = 2011$;

(3)对于任意给定的整数 $n (n \geq 2)$, 是否存在首项为 0 的 E 数列 A_n , 使得 $S(A_n) = 0$? 如果存在, 写出一个满足条件的 E 数列 A_n ; 如果不存在, 说明理由.

(2013 版第 133 页例 6.30 变式 1)

相似点:主要考查数集、数列的基本性质,属于信息给予题. 通过定义的理解,考查考生分析探究及应用特殊化、极端化等思想的推理论证能力. 以集合、数列等离散型数域为背景的问题一直是近几年的命题重点内容,应引起足够的重视. 相似度:95%.

本书编委会

主 编 张永辉

副主编 余 臣 王 晓 明 张喜金 张宏卫 王国庆

张作卿 李拴柱 颜亚冰 董安林 孙光磊

孟令修 安 英 樊德国 董家兴 白立星

张俊宇

编 委 徐贵冬 徐宣庆 李 鹏 文先龙 陈 杰

吉海波 佟宝忠 熊建军 臧敦亮 张胜利

陈汉邦 陈治海 肖贵钧 李小华 孙红岩

高艳山 孙红芳 韦兴洲

做最好的高考数学书

——“洞穿高考数学辅导丛书”总序

我一直认为,数学是高考中最难的一科.高考成功一定要经过努力,但努力不一定能成功,选择永远比努力更重要.从最新数学高考的命题特点来看,试题明显从过去单纯地强调简单的观察能力和特殊技巧,转变为现在深刻地强调要把握数学问题的原理及解题的通法通性.于是,打造最好的高考数学书成为时代赋予我们的使命.

笔者出版了多本高考数学专著,历经八载,与国内权威出版社合作,联合打造了中国数学教辅研发品牌——“洞穿高考数学辅导丛书”.本丛书摒弃了目前教辅图书粗制滥造的编写模式,每一个例题、变式题、巩固训练题都经过编者的精心研究,从备战高考的三个复习阶段入手,从不同角度给所有学生全程、全方位的辅导.笔者多年致力于高考数学教学与研究,通过对优秀考生的调查统计,发现大多数考生在复习中经历了一个“发现自我,改造自我,突破自我”的过程,即不知道自己做什么(全面复习)—知道自己做什么(重点突破)—不知道自己不知道什么(冲刺高考)—全知道(决胜高考),而我们寻求的正是这种应对考试的复习之道.

第一轮复习的重点是“三基”训练,目标是全面、扎实、系统、灵活,即夯实基础,全面复习.学生应该重点建构自己的知识体系,弄清高考考什么,怎么考?与第一轮复习配套的用书为《新课标高考数学题型全归纳》,采用“题型+模型”的编写模式.全书以200个题型为主线,总结了高考所有重要考点和题型的解题思路及科学有效的套路方法.对于重要的题型,我们给出“分析”,引导学生自己找到解题的突破口,还给出“评注”来升华解题方法,从而达到归纳解题方法的目的.有些评注写得入木三分,直接揭示了高考题母题的来源.书中的“模型”部分,更是将许多相关问题一网打尽,使考生能以不变应万变,达到“无招胜有招”的境界.

第二轮复习的重点是专题强化训练,目标在于提高学生解决高考解答题的能力,重点突破.考生要集中练习高考的核心考点,不求面面俱到,但是一定要把重要考点各个击破,真正做到触类旁通、闻一知十.与第二轮复习配套的用书为《30分钟拿下高考数学选择题、填空题》、《洞穿高考数学解答题核心考点》.这两本辅导书从高考数学选择题、填空题与解答题的实战角度进行编写,对于选择题、填空题,我们的目标是30分钟轻取70分.《30分钟拿下高考数学选择题、填空题》一书通过方法篇、题组篇与实战篇的训练,能让考生在考场上高效地解答选择题、填空题;《洞穿高考数学解答题核心考点》一书能帮助考生快速掌握“秒杀”高考解答题的方法与技巧.为了提高考生解决解答题的能力,我们从历年高考真题和众多模拟题中筛选核心考点,归纳总结出各种解题方法和技巧,以

求达到口述解答题的从容境界。

经过两轮复习后,很多考生仍然感觉做题时心中没谱,那么,这就需要第三轮复习:模拟、强化。这是第一、二轮复习的提升,不仅要检验对各考点的掌握情况,更重要的是对知识的融会贯通、查漏补缺、答题技巧的训练乃至对学生智能、情感和意志等进行调节。因此,我们悉心研发了第三轮复习用书——《高考数学临门一脚》。本书整合了全国各地权威数学名家的研究成果,研发出最后 30 题,将最前沿的考试方向与命题趋势以密押题的形式呈现给大家,密押试题的考点相互补充,形成整体,是一份临考前不可或缺的重要材料,希望同学们在使用时一定要做到“卷做三遍,题后三思”。

总之,这三轮复习用书功能各异,但合起来又构成一个有机整体。这就是倾心为你打造的成功计划的三部曲,按我们的计划,一步一个脚印,结果定在掌控中!希望中国千万名高考考生通过使用这四本书,考进自己理想的大学,这是我们最开心、最幸福的事情。希望大家能从中得到启发,并肯定我们的成果。当然,我们也会继续努力前进,“做最好的高考数学书”是我们不变的信念,永恒的追求。

为了满足理科和文科考生的学习需要,上述每一个阶段的复习用书均分为理科版和文科版两个分册,欢迎广大考生订购。同时,第一阶段复习用书《新课标高考数学题型全归纳》还有配套电子课件免费赠送,为教学提供了便利,让老师备课变得轻松而高效!

高考长路,拼搏依旧,温柔依旧——因为有你相伴!

温家宝总理曾以诗明志,今天,我们把这句诗转赠给紧张备考的高三学子,也送给辛勤教学、默默无闻、无私奉献的高中毕业班园丁们。

“华山再高,顶有过路。”

张永辉

2013 年 9 月

前言

为了满足高三考生的高考数学复习要求,我们专门编写了《新课标高考数学题型全归纳》、《30分钟拿下高考数学选择题、填空题》、《洞穿高考数学解答题核心考点》和《高考数学临门一脚》作为贯穿高三不同复习阶段的四本辅导书.

在高考冲刺阶段时间紧、任务重的情况下,为了帮助同学们赢得时间,快速击破高考的最后壁垒,我们悉心研究了近八年来的高考数学试题,经过层层筛选,提炼出核心考点,构造常考模型,才有了《洞穿高考数学解答题核心考点》的问世.相信本书在启迪思维、开拓思路、提高应试技巧诸方面将起到良师益友的作用.

本书特点:

1. 内容系统、全面. 本书系统介绍了高考数学解答题的六大板块,即三角函数、立体几何、概率统计、解析几何、函数与导数、数列与不等式及创新题的命题规律和解题方法,研究并挖掘出重要模型,帮助考生“秒杀”高考解答题,达到口述解答题的从容境界.

2. 解法快捷. 本书针对各种题型均总结出解题方法、规律和技巧(如数列与不等式中经典不等式的应用,独特的解题方法会令读者有耳目一新的感觉),这是本书的特色之一.编者以实用性、针对性和高效性为原则,帮助读者掌握解题规律和方法,可以举一反三、触类旁通,大大提高解题能力.

3. 精选典例. 本书编者以近八年的高考数学真题和模拟题为素材,通过分析、归纳,遴选出高考解答题六大板块的核心考点(题型)及例题,所选例题极具典型性和代表性.例题的解答以题型所总结出的“思路提示”的解题方法和规律为指导,体现通解通法,考生可从中体会该题型的解题方法,丰富解题经验.

4. 针对性强. 本书除了在“第一部分”各章节设有“核心考点”及其“思路提示”外,还在“第二部分”相应地设置了“核心预测题”.编者将近几年高考试题和模拟题中的相关问题收集到一起提供给读者,以求快速掌握高考命题思路和解题方法.其中在2010—2013年高考试题中,众多省(市)的高考题被直接命中.

本书适合参加高考的理科考生在复习时研读,也可作为高中数学教师的教学参考资料.编者相信,书中所总结的解题方法对读者提高解题能力一定有所帮助,所以本书不仅是广大考生的良师益友,也是教师的得力助手.

编者虽倾心倾力,但能力有限,若有疏漏和不妥之处,敬请广大读者和数学同行指正.

愿此书伴随莘莘学子步入理想的大学!

张永辉

2013年10月于北京

目 录

第一部分 数学解答题核心考点

第一章 三角函数	2
核心考点一 三角函数的图像和性质	2
核心考点二 解三角形	7
第二章 立体几何	9
核心考点一 空间中平行与垂直的位置关系	9
核心考点二 空间角及空间距离的计算	19
第三章 概率统计	28
核心考点一 离散型随机变量的分布列及期望	28
核心考点二 数据抽样和分析——频率分布直方图的制作和分析	34
第四章 解析几何	37
核心考点一 求动点的轨迹方程	37
核心考点二 平面向量在解析几何中的应用	45
核心考点三 圆锥曲线中定点、定值、最值问题	54
第五章 函数与导数	68
核心考点一 含参函数的单调性(区间)与极值、最值	68
核心考点二 含参函数在区间上具有单调性、无单调性或存在单调区间,求参数范围	75
核心考点三 方程解(函数零点)的个数问题	79
核心考点四 不等式恒成立与存在性问题	81
核心考点五 利用导数证明不等式	88
第六章 数列与不等式及创新题	94
核心考点一 等差数列与等比数列的综合	94
核心考点二 数列的通项公式的求解	98
核心考点三 数列的求和	103
核心考点四 数列与不等式的综合	108
核心考点五 数列创新题中的推理与证明	119