高职高专“十二五”规划教材

应用数学

APPLIED MATHEMATICS

张立圃　杜俊文◎主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专“十二五”规划教材

应用数学

主　编　张立圃　杜俊文

副主编　李国辉　李仲佳　周爱丽

参　编　高建云　王钦烈

主　审　高文杰

机械工业出版社

本书参照示范性院校课程建设中制定的《高等数学课程标准》，按照高等数学整体和单元设计编写而成。全书共8章，内容包括函数的极限与应用、导数与微分、一元函数的积分与应用、常微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、二重积分与应用、无穷级数与应用。

本书内容重点突出，叙述深入浅出，在引入新概念与定义时，尽可能通过实例加以说明，提高学生的学习兴趣。同时，力求将数学知识与工业生产、日常生活相联系，尽量简化抽象概念和逻辑推理，注重培养学生的数学应用能力。

本书可作为高等职业院校、成人高校及本科院校的二级职业技术学院的教材，也可作为一般工程人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/张立圃，杜俊文主编. —北京：机械工业出版社，2011.8

高职高专“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-35392-8

Ⅰ.①应… Ⅱ.①张…②杜… Ⅲ.①应用数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第159837号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑：王玉鑫 责任编辑：刘子峰

责任校对：常天培 封面设计：王伟光

责任印制：乔 宇

北京铭成印刷有限公司印刷

2011年9月第1版第1次印刷

184mm×260mm · 17.75印张 · 438千字

标准书号：ISBN 978-7-111-35392-8

定价：33.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销售一部：(010)68326294

销售二部：(010)88379649

读者购书热线：(010)88379203

网络服务

门户网：http://www.cmpbook.com

教材网：http://www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

前　言

本书是在高职示范院校建设理念指导下，在工科数学课程体系设计的基础上，结合教学改革与实践经验编写而成的。

高职教育肩负着培养大批量技术应用型和高素质技能型人才的使命，应重点培养学生解决生产、建设、管理及服务一线的综合能力。因此，本书本着“必需、够用”的原则，以提高学生的数学文化素质、促进学生主动学习数学以及应用数学为主要宗旨。在教学内容的取舍上，注意到工科类学生的实际情况，不片面追求数学理论的系统性和完整性，而是从一些涉及专业、自然科学或日常生活的实际问题出发，引出相关的数学知识，最后应用数学方法解决问题并进行深化，从而培养学生应用数学的意识和能力。在教学内容设计上，不过分强调形式化的数学概念及定理证明，而是更多地体现数学思想或用数学解决实际问题的具体方法步骤，渗透数学建模的思想。

全书共8章，内容包括函数的极限与应用、导数与微分、一元函数的积分与应用、常微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、二重积分与应用、无穷级数与应用。每章的最后一节均介绍了利用数学软件 Mathematica 解决本章的主要数学计算的方法，以提高学生利用现代计算工具解决数学问题的技能。穿插在各章最后的“小资料”通过对数学发展史和相关人物的介绍，引导学生学习数学家的探索精神、激发学生的兴趣、亲近数学的理论、拓宽学科的视野。书后附有部分习题参考答案和常用高等数学英文词汇，便于学生自学和提高。

本书由张立圃、杜俊文任主编，李国辉、李仲佳、周爱丽任副主编，参加编写的老师还有高建云、王钦烈。高文杰教授对全部书稿进行了审阅并提出了宝贵的意见。

本书在编写过程中参考了很多相关的书籍，对相关的作者在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中错误及不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，并提出宝贵的意见和建议。

编　者

目　录

第一章　函数的极限与应用

微积分经过几百年的发展已经在自然科学、工程技术、经济、管理及生物技术等诸多领域中显示出了强大的威力. 微积分以极限作为基本工具，分析研究变量和变量间的依赖关系，而函数正是描述变量之间相互依赖关系的一个基本概念，所以微积分的研究对象是函数，研究方法是极限的方法. 本章将在高中数学的基础上进一步介绍函数、极限、连续及其应用.

第一节　函　　数

在研究自然现象或工程问题时，经常会发现量与量之间相互依赖，并按一定规律变化，从而产生了函数. 函数不仅是变量与变量之间关系的描绘，更是自然规律中各个主要因素之间相互作用、相互影响关系的描述. 函数关系同时也表达了这样的思想：人们可以通过某一事实的信息去推知另一事实，比如知道圆的半径可以推知它的面积等.

一、函数的概念

在实际问题中，经常遇到各种不同的量，有些量是不变的，称为**常量**；有些量是变化的，称为**变量**. 在同一自然现象或变化过程中，往往同时存在着几个变量，而这几个变量之间通常又相互联系并遵循着一定的变化规律. 如正在充气的圆气球，其体积 V 和半径 R 是两个变量，这两个变量之间通过公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 相互联系，而这种对应关系正是函数概念的实质.

1. 函数的概念

定义 1　设有两个变量 x 和 y，如果变量 x 在其取值范围内任取一个值时，变量 y 按照一定的法则总有确定的值与之相对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 自变量的取值范围称为函数的**定义域**. 当自变量 x 取某个已知值 x_0 时，所对应因变量的值 y_0 称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $y_0=f(x_0)$，函数值的全体称为该函数的**值域**.

有些函数当自变量在其定义域内任取一个确定的值时，函数有一个以上的值与之相对应. 对于这种多值函数的情形，主要是限制其函数值的范围，使之成为单值函数. 如 $y=\arcsin x$ 是多值的，当限制其函数值在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内取值时，函数就变成单值函数了. 以后本书如无特殊说明，函数都指单值函数.

在不考虑实际意义时，函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围，实际问题的定义域由实际意义确定. 由函数的定义可以看出，函数是由定义域和对应法则所确定的，两个函数只要定义域和对应法则完全相同，它们表示的就是同一函数，与自变量及因变

量用什么字母表示无关．如 $y=x^2$ 和 $s=a^2$，当它们的定义域相同时表示同一函数．

2. 函数的表示法

函数的具体表示方法要根据实际问题来确定，通常有解析法（公式法）、表格法和图像法．

用数学式子表示因变量和自变量之间函数关系的方法称为解析法．解析法是对函数的精确描述，便于对函数进行理论分析和研究，微积分研究的函数就是用解析法表示的．而有些实际问题中的函数难以用解析法来表示，或者为了更加直观、方便，函数关系也常用表格法和图像法表示．银行存款利率表、三角函数表、平方根表等采用的都是，这种方法简单明了，便于应用，但一般不能完整地表示函数，也不便于进行理论分析；股市的综合指数、病人的心电图等往往采用图像法，其优点是直观形象，函数图形容易由实验数据得到，从图形中可以看出函数的变化状况，缺点是由图形往往得不到准确的函数值，也不便于进行精确的理论分析．

3. 分段函数

用解析式表示函数时，因变量和自变量的对应关系不一定总能用一个数学式来表示．在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同的式子来表示的函数，称为**分段函数**．分段函数是用几个式子来表示一个函数，如符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0.\\ -1 & x<0\end{cases}$

4. 显函数与隐函数

函数关系可以采用不同的方式表达，表示成 $y=f(x)$ 形式的函数关系称为**显函数**，如 $y=x^2$，$y=\ln x+\sqrt{x-1}$等．在实际问题中，还会遇到由一个方程确定的函数．例如，$x^2+y^2=1$ 就表示一个函数，因为当变量 x 在 $(-1,+1)$ 内取值时，变量 y 有确定的值与之对应．像这种函数关系隐含在方程 $F(x,y)=0$ 中的函数称为**隐函数**．

显函数和隐函数是函数的不同形式，把一个隐函数化成显函数的过程，叫做隐函数的显化．如从方程 $x^2+y^2=1$ 中解出 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，就把隐函数显化了．隐函数的显化有时是困难的，甚至是不可能的，如 $e^{x+y}=xy$ 就不能显化．

5. 反函数

一般地，设函数 $y=f(x)$，定义域为 D，值域为 M．如果对于 M 中的每一个 η 值，都可由 $\eta=f(x)$ 确定唯一的 x 值与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的函数 x，该函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$．习惯上常用 x 表示自变量，y 表示函数，故常把 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $y=f^{-1}(x)$．函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称．

6. 邻域

当考虑函数在某点处的性质时，往往需要知道该点与其邻近点的关系，这就涉及邻域的概念．

定义 2 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，实数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 **δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$，点 a 称为 $U(a,\delta)$ 的中心，δ 称为 $U(a,\delta)$ 的半径．在数轴上，邻域的表示如图 1-1 所示．

由图1-1可知，点 a 的 δ 邻域表示了以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间. 所以，点 a 的 δ 邻域还可以表示为开区间 $(a-\delta,a+\delta)$.

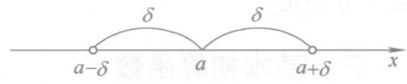

图 1-1

把点 a 的 δ 邻域去掉中心后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$

例1 用不等式和开区间分别表示点 -2 的 $\frac{1}{3}$ 邻域.

解 不等式为 $|x+2|<\frac{1}{3}$，等价于 $-\frac{1}{3}<x+2<\frac{1}{3}$，即 $-\frac{7}{3}<x<-\frac{5}{3}$，开区间表示为 $\left(-\frac{7}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

二、函数的性质

下面简单介绍函数的几种特性，由于单调性、奇偶性、周期性在中学已有过详细的叙述，所以这里只是简单回顾.

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内单调增加，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调增区间. 如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内单调减少，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调减区间.

从几何图形上看，当自变量从左向右变化时，单调增函数的图形是上升的，单调减函数的图形是下降的.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域内的任何 x 值，总满足 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对于定义域内的任何 x 值，总满足 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

3. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的实数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 对于定义域内的任何 x 值都成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 通常，周期函数的周期指的是最小正周期.

周期函数的图形在定义域内的每个长度为 T 的区间上具有相同的形状.

4. 函数的有界性

对于函数 $f(x)$，如果存在正数 M 对于定义域内的任何一个自变量 x，相应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在其定义域内有界. 如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在其定义域内无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上，无论自变量 x 取何值，均有 $|\sin x|\leqslant 1$（这里 $M=1$，当然 M 也可取大于1的任何数），所以正弦函数在定义域内有界. 像这样在定义域内有界的函数称为有界函数. 而有些函数不是有界函数，但在定义域内的某个区间上可能是有界的. 如函数 $f(x)=x^3$ 在定义域内是无界的，但在区间 $[-1,1]$ 上是有界的.

当函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界时，它在区间 I 上的图形一定位于两条平行线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

三、基本初等函数

经常遇到的函数中最简单、最常用的有5类，即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这些函数统称**基本初等函数**. 由若干基本初等函数构成的初等函数是本门课程研究的主要对象，掌握它们对以后的学习会很有帮助.

1. 幂函数

幂函数 $y=x^{a}$（a 为常数），其图形因 a 的不同而有很大差异，如图 1-2 所示.

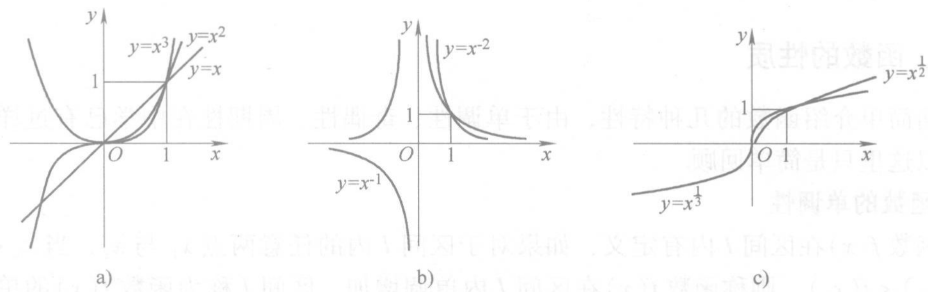

图 1-2

2. 指数函数

指数函数 $y=a^{x}(a>0, a\neq1)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，函数的图形如图 1-3 所示. 其中，$y=e^{x}$ 是科技中常用的指数函数. 底互为倒数的两个指数函数的图形关于 y 轴对称.

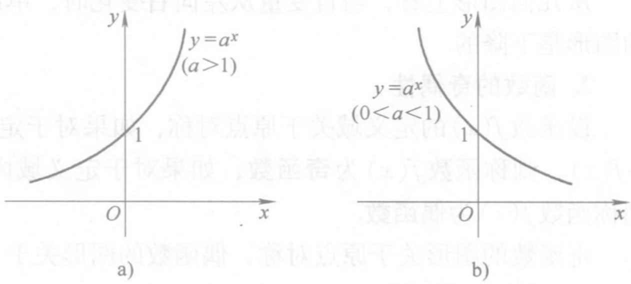

图 1-3

3. 对数函数

对数函数 $y=\log_{a}x(a>0, a\neq1)$，定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，函数图形如图 1-4 所示. 其中以 e 为底的对数函数叫做自然对数函数，记为 $y=\ln x$；以 10 为底的函数叫做常用对数函数，记为 $y=\lg x$. 对数函数和指数函数互为反函数.

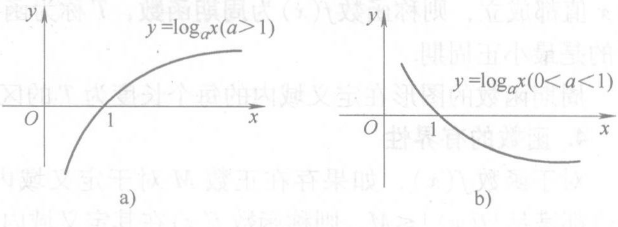

图 1-4

4. 三角函数

常见的三角函数有 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$，函数图形如图 1-5 所示. $y=\sin x$、$y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$；$y=\tan x$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $(-\infty,+\infty)$；$y=\cot x$ 的定义域为 $(k\pi, \pi+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $(-\infty,+\infty)$；$y=\sec x$

的定义域为$\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$，值域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$；$y=\csc x$的定义域为$(k\pi,\pi+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$，值域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

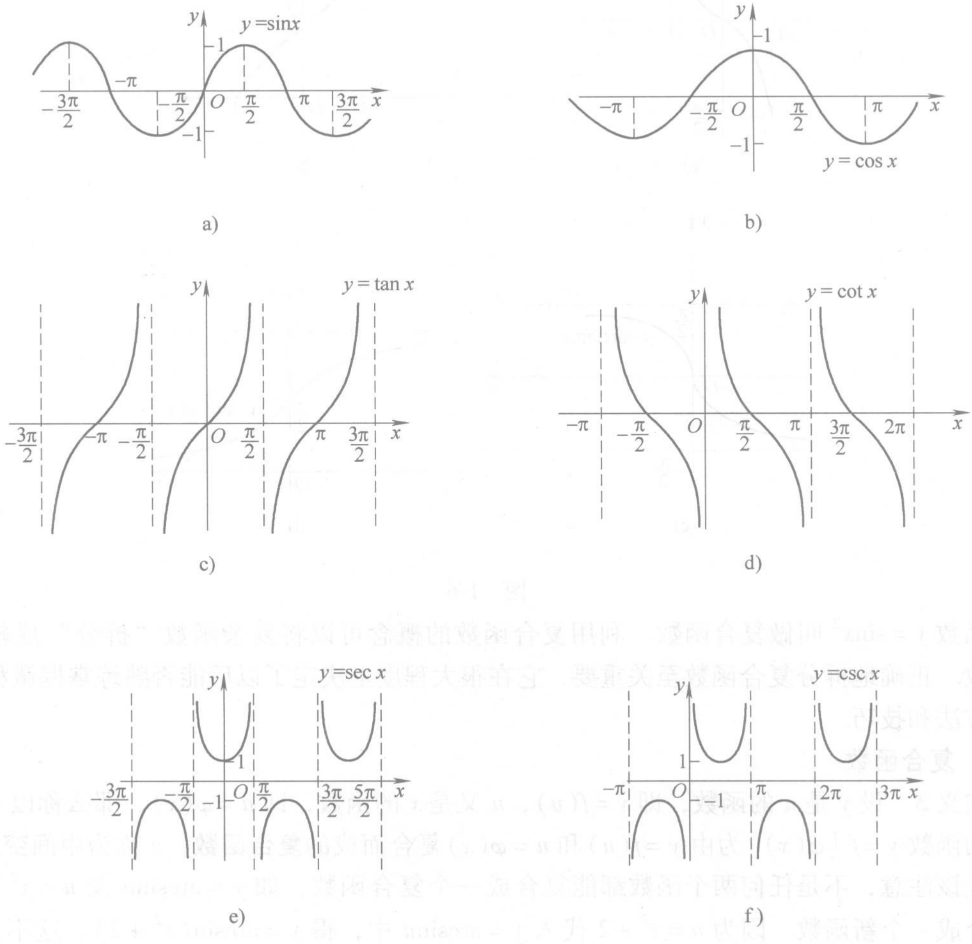

图　1-5

5. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，常见的有 4 个，分别为$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\mathrm{arccot}\,x$，它们本来是多值函数，通过限制其值域使其变成了单值函数，函数图形如图 1-6 所示. $y=\arcsin x$的定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；$y=\arccos x$的定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$；$y=\arctan x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；$y=\mathrm{arccot}\,x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$.

四、复合函数与初等函数

在实际问题中遇到的函数多数不是基本初等函数，而是由若干基本初等函数组合而成的. 如$y=\sin x^2$是由正弦函数$y=\sin u$和幂函数$u=x^2$组合而成的，这实际上是一种复合过

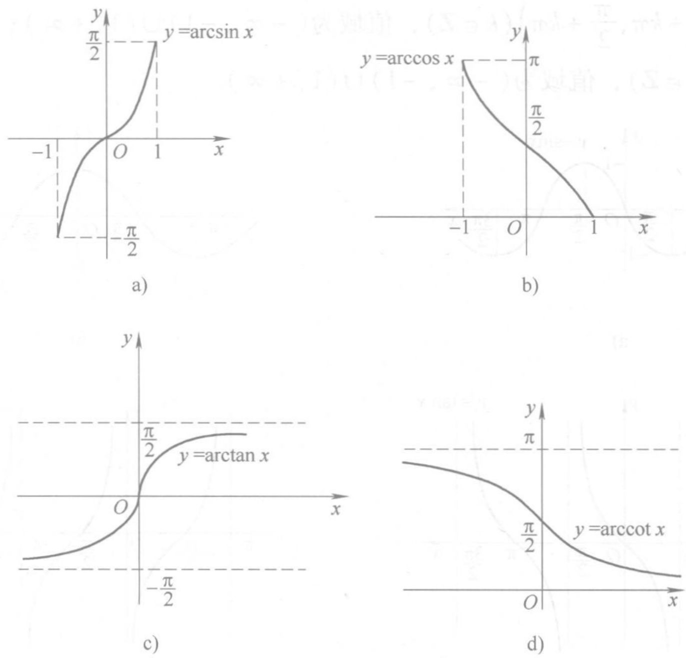

图 1-6

程，函数 $y=\sin x^2$ 叫做复合函数. 利用复合函数的概念可以将复杂函数“拆分”成较简单的函数. 正确地拆分复合函数至关重要，它在很大程度上决定了以后能否熟练掌握微积分的基本方法和技巧.

1. 复合函数

定义 3 设 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数，即 $u=\varphi(x)$，那么称以 x 为自变量的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，u 称为**中间变量**.

应该注意，不是任何两个函数都能复合成一个复合函数，如 $y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+2$ 不能复合成一个新函数. 因为 $u=x^2+2$ 代入 $y=\arcsin u$ 中，得 $y=\arcsin(x^2+2)$，这不是以 x 为自变量的函数，因为对任意的 x 值，都没有 y 值与之相对应.

复合函数的概念可以推广到多个中间变量的情形. 如 $y=\sqrt{\tan\dfrac{x^2}{8}}$ 可以看成是由函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x^2}{8}$ 复合而成的，这样就把一个复杂函数“拆分”成了几个简单函数. 拆分时要注意层次，从外到内逐层分解.

2. 初等函数

定义 4 **初等函数**是由常数与基本初等函数经过有限次四则运算或有限次的复合过程构成的，并能用一个数学式子表示的函数.

常见的函数除了分段函数外都是初等函数，初等函数是微积分研究的主要对象.

五、建立函数关系的数学模型

运用数学方法解决实际问题时，通常是先找出问题中变量之间的函数关系，即列出函数

关系式，然后再进行分析和求解．下面举几个建立函数关系的数学模型．

例 2　在电子科学中，有大量波形函数，图 1-7 所示为周期为 T 的锯齿形波，试在一个周期$[0,T]$上把此波形表示成函数解析式．

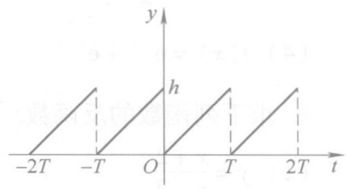

图　1-7

解　设纵轴为 y，横轴为 t，则函数解析式为 $y=f(t)$．从波形图中可以看出在$[0,T]$上图形为一线段，所以 $y=kt=\frac{h}{T}t$．此波形在$[0,T]$上的函数解析式为 $y=\frac{h}{T}t\quad(0\leqslant t\leqslant T)$．

例 3　摩擦角是工程中研究静摩擦问题的一个重要概念．如图 1-8 所示，在倾角为 θ、静摩擦因数为 μ 的斜面上放一质量为 m 的物体，当物体处在临界平衡状态时的倾角 θ 称为摩擦角 φ_m．试建立摩擦角 φ_m 与静摩擦因数 μ 的函数关系．

解　由物理知识得，当物体处于临界平衡状态时，物体的最大静摩擦力等于物体沿斜面向下的重力的分力，即

$$mg\sin\varphi_m=\mu mg\cos\varphi_m,$$

所以 $\tan\varphi_m=\mu\quad(\mu\geqslant 0)$．

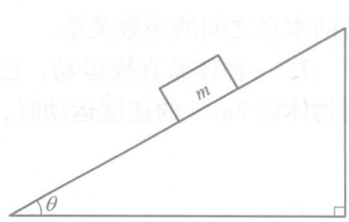

图　1-8

例 4　一旅馆有 200 个房间，如果定价不超过 40 元/间，则可全部出租．若定价每高出 1 元，则会少出租 4 间．设房间出租后的服务成本费为 8 元/间，试建立旅馆一天的利润与房价间的函数关系．

解　设旅店一天的利润为 y，房价为 x，则由题意知函数关系式为

$$y=\begin{cases}200(x-8) & 0<x\leqslant 40\\ [200-4(x-40)](x-8) & 40<x\leqslant 90.\\ 0 & x>90\end{cases}$$

例 5　夏季某高山的气温从山脚起，每升高 100m 降低 0.7℃．已知山脚气温是 26℃，山顶气温是 14.1℃，用 T 表示气温，h 表示相对于山脚的高度．试把 T 表示成 h 的函数．

解　由题意得 $T=26-\frac{7}{1000}h$，

由山脚和山顶的气温得 h 的取值范围是 $0\leqslant h\leqslant 1700$．

训练任务 1.1

1. 求下列函数的定义域．

（1）$y=\sqrt{x^2-4x+3}$　　（2）$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$　　（3）$y=\frac{x-3}{x^2-5x+6}$

（4）$y=\frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{5-x}}$　　（5）$y=\frac{\arcsin(x+2)}{x+1}$　　（6）$y=\sqrt{x+2}+\frac{1}{\lg(1-x)}$

2. 设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$．

3. 判断下列函数的奇偶性．

(1) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ (2) $f(x)=\sin x+\cos x$ (3) $f(x)=x\sin x+\cos x$

(4) $f(x)=e^{-x}+e^{x}$ (5) $f(x)=x^{2}\sin x$ (6) $f(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

4. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\frac{x+2}{x-2}$ (2) $y=2\sin 3x$

5. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=(1+e^{x})^{2}$ (2) $y=\sin x^{2}$ (3) $y=e^{\cos\frac{1}{x}}$

(4) $y=\ln(\arcsin x)$ (5) $y=\sin^{3}(e^{2x+1})$ (6) $y=\sqrt{\ln\tan x}$

6. 假设银行一年定期存款的利率是2.25%，利息的利率是20%，试建立存款数与一年后的本息之间的函数关系.

7. 一物体做直线运动，已知阻力 F 的大小与物体运动的速度 v 成正比，但方向相反. 当物体以2m/s的速度运动时，阻力为 1.96×10^{-2}N，试建立阻力与速度之间的函数关系.

第二节 极 限

函数是随着自变量变化的，如果已经知道了自变量的变化趋势，那么函数的变化趋势问题，就是极限的问题. 在微积分中几乎所有的概念都是通过极限来定义的，极限方法也是微积分中解决问题的主要方法. 本节将给出极限、无穷小量、无穷大量的概念，并学习计算极限的常用方法.

问题1 曲线 $y=f(x)$ 上有一定点 M 和一动点 N，如图1-9所示. 当 N 沿曲线越来越趋向于 M 时，割线 MN 就越来越接近于切线 MT 的位置. 如果把割线 MN 的极限位置定义成切线，那么如何来确定切线的位置呢?

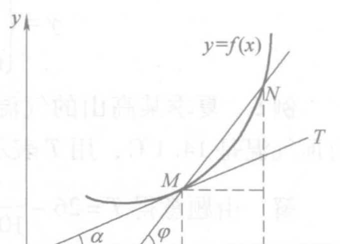

图 1-9

问题2 电容器在充、放电时，电容器两端电压 U_C 随时间的变化规律分别为 $U_C=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$，$U_C=Ee^{-\frac{t}{RC}}$，那么当时间足够长之后电容器两端的电压为多少呢?

问题3 将一盆80℃的热水放在一间室温为20℃的房间里，随着时间的推移，水温会如何变化呢?

问题4 用洗衣机清洗衣物时，清洗次数越多衣物上残留的污渍就越少，当清洗次数无限增加时，衣物上的污渍会如何变化呢?

问题5 把单摆拉离平衡位置后松手，由于机械摩擦力和空气阻力，其振幅会不断地减小，那么当时间足够长之后振幅为多少呢?

一、数列的极限

1. 数列的概念

设函数 $u_n=f(n)$，当自变量 n 按自然数顺序取值时，对应的函数值排成一列，就构成一个数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

记为$\{u_n\}$，其中第n项u_n称为数列的通项.

2. 数列极限的定义

定义1　对于数列$\{u_n\}$，当n无限增大时，如果其通项u_n无限接近于某个确定的常数A，则称A为数列$\{u_n\}$的**极限**，或称数列$\{u_n\}$**收敛**于A，记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \text{ 或 } u_n \to A(n\to\infty).$$

如果当n无限增大时，其通项u_n不能无限接近于某个确定的常数，则称数列$\{u_n\}$没有极限，或称数列$\{u_n\}$**发散**，记为$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$不存在.

例如，数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$，当$n$无限增大时，数列通项无限接近于常数0，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；而数列$\left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\right\}: -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, (-1)^n\frac{n}{n+1}, \cdots$，当$n$无限增大时，数列通项不能与某一个常数无限接近，所以数列$\left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\right\}$无极限.

3. 数列极限的性质

性质1　收敛数列有如下性质：

(1) 收敛数列的极限是唯一的.

(2) 收敛数列一定有界.

二、函数的极限

$u_n=f(n)$是自变量取正整数的函数，数列的极限问题就是随着自变量n趋于无穷大时，对应的函数$f(n)$的变化趋势问题. 对于任意的函数$f(x)$，随着自变量x的变化，函数$f(x)$的变化趋势问题就是函数的极限问题. 下面考虑x趋于无穷大和x趋于定点x_0两种情况.

1. 自变量$x\to\infty$的极限

当$|x|$无限增大时，记为$x\to\infty$，读作"x趋于无穷大"；$|x|$无限增大且x为正数时，记为$x\to+\infty$，读作"x趋于正无穷大"；$|x|$无限增大且x为负数时，记为$x\to-\infty$，读作"x趋于负无穷大".

定义2　如果当$|x|$无限增大即$x\to\infty$时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限为A，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

类似地，可以定义$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$和$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$. 由定义2可知

定理1　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$的充要条件是$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

例如，对于函数$f(x)=\frac{6}{x}$，由其函数图形(图1-10a)可知，无论$x\to+\infty$，还是$x\to-\infty$，函数都无限接近于常数0，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x}=0$；而对于函数$f(x)=\arctan x$，由其函数图形(图1-10b)可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，所

以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

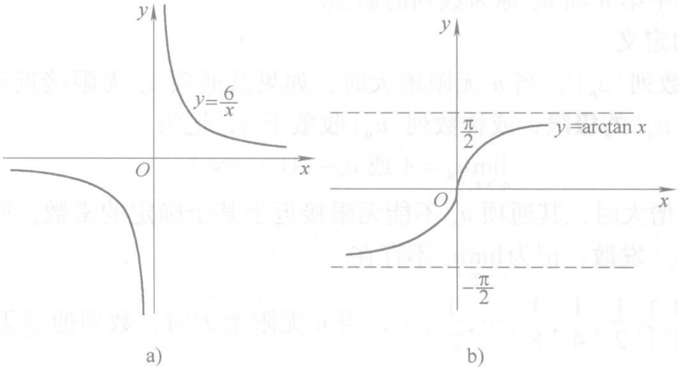

图 1-10

2. 自变量 $x\to x_0$ 的极限

定义 3 函数$f(x)$在x_0附近有定义，如果当x无限接近于x_0时，$f(x)$无限趋近于某个确定的常数A，就称当x趋近于x_0时，函数$f(x)$的极限为A，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

类似地，如果自变量从小(大)于x_0的一侧趋近于x_0时，函数$f(x)$无限趋近于常数A，则称当x趋近于x_0时函数的左(右)极限为A，记为$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$($\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$). 由定义 3 可知：

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例如，对于函数$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，由其函数图形(图 1-11)可知，无论x从 2 的左侧还是右侧趋近于 2 时，函数值都趋近于 4，所以$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

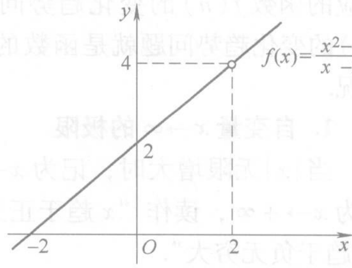

图 1-11

当提及函数的极限时，一定要指明自变量x的变化趋势，因为即使是同一函数，x的趋向不同，函数的极限也不同. 例如，对于函数$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，当$x\to\infty$时，函数的极限是 0；当$x\to 1$时，函数的绝对值无限增大，极限不存在；当$x\to 2$时，函数极限是 1.

三、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义 4 如果在自变量的某一变化趋势下($x\to x_0$或$x\to\infty$)，函数$f(x)$的极限为 0，即$\lim f(x)=0$，则称$f(x)$是自变量x在该变化趋势下的**无穷小量**(简称无穷小).

例如，因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以当$x\to 0$时$\sin x$，$x^2$是无穷小量；因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，

所以当 $x\to\infty$ 时$\frac{1}{x}$是无穷小量；而当 $x\to0$ 时$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$，所以当 $x\to0$ 时$\frac{1}{x}$不是无穷小量.

一个函数为无穷小量时，必须指明自变量的变化趋势. 另外，从定义 4 和上述例子中也可以看出，无穷小量不是一个很小的数，而是一个极限为 0 的函数(变量).

2. 无穷小量的性质

性质 2　无穷小量具有如下性质：

(1) 有限个无穷小的和仍为无穷小量；

(2) 有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量；

(3) 常数与无穷小量的乘积仍为无穷小量；

(4) 有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量.

在后面的章节中将利用无穷小量及其性质来计算函数的极限.

3. 无穷小的比较

观察函数 $y=x$，$y=2x$，$y=x^2$ 当 $x\to0$ 时的变化趋势，见表 1-1.

表 1-1

x	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	$\cdots\to0$
$2x$	2×10^{-2}	2×10^{-4}	2×10^{-6}	2×10^{-8}	$\cdots\to0$
x^2	10^{-4}	10^{-8}	10^{-12}	10^{-16}	$\cdots\to0$

可以看出，这三个函数趋近于 0 的快慢有所不同. 若几个函数在自变量的同一变化过程中都趋近于 0，那么这几个函数就都是无穷小量. 但它们趋近于 0 的速度可能不一样，对它们趋近于 0 的速度的比较就是无穷小量的比较.

设 α 和 β 在自变量的同一变化过程中均为无穷小，即 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$，则

(1) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta=o(\alpha)$；

(2) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α **低阶的无穷小**；

(3) 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq0$($C$ 为常数)，则称 β 与 α 是**同阶无穷小**. 特别地，当 $C=1$ 时，即 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是**等价无穷小**，记作 $\alpha\sim\beta$.

常用的等价无穷小量有(当 $x\to0$ 时)：$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$.

例如，① 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\infty$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$是比$\frac{1}{x^2}$低阶的无穷小，$\frac{1}{x^2}$是比$\frac{1}{x}$高阶的无穷小.

② 因为$\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$，所以当 $x\to3$ 时，$x-3$ 与 x^2-9 是同阶无穷小.

③ 因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}=1$，所以当$x\to1$时，$x^2-1$和$2(x-1)$为等价无穷小.

4. 无穷大量

定义 5 如果在自变量的某一变化趋势下（$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$），函数$f(x)$的绝对值$|f(x)|$无限增大，则称函数$f(x)$是自变量x在该变化趋势下的**无穷大量**（简称无穷大）.

例如，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$，所以当$x\to0$时$\dfrac{1}{x}$就是无穷大量；又如，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，所以当$x\to0^+$时$\dfrac{1}{x}$就是正无穷大量；$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，所以当$x\to0^-$时$\dfrac{1}{x}$就是负无穷大量.

性质 3 在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$是无穷小量，且$f(x)\neq0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大量.

四、极限的运算

在实际问题中，人们经常会遇到计算各种函数的极限问题. 对于基本初等函数，可以从图形上看出在自变量的某种趋向下函数的变化趋势，利用极限的定义来确定其极限. 而对于一些复杂的函数，函数图形不容易画出，所以需要掌握极限运算的一些常用方法.

1. 极限的四则运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$；

（4）$\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=kA$（$k$为常数）.

上面法则中的极限过程$x\to x_0$可推广至$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$.

例 1 求$\lim\limits_{x\to1}(2x^2-1)$.（直接代入）

解 $\lim\limits_{x\to1}(2x^2-1)=\lim\limits_{x\to1}2x^2-\lim\limits_{x\to1}1=2-1=1.$

例 2 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2+x}{x^4+1}$.（直接代入）

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2+x}{x^4+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}(2x^2+x)}{\lim\limits_{x\to0}(x^4+1)}=\dfrac{0}{1}=0.$

例 3 求$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{x^2-16}$.（分解因式约去零因子）

解 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{8}.$

例 4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{2x^2-3}$.（分子分母同除以$x$的最高次幂）