

材料力学习题解答

铁 摩 辛 柯
材料力学(高等理论及问题)
习 题 解 答

赵耀曾、张春蕴 著

北京钢铁学院力学教研室

前 言

本习题解，是在教学过程中因教学的需要编写的。后来考虑兄弟院校的需要以及资料的交流整理而成。

书中原有部分题目已有解答或半解答。此次整理过程中将半解的题目全部解完，并考虑到此解答的完整，将已有解答的题目也一并整理在内。

由于水平有限，时间仓促，所以有些题解不一定是最佳解法，也不免有错误或不妥之处，望读者给予批评指正。

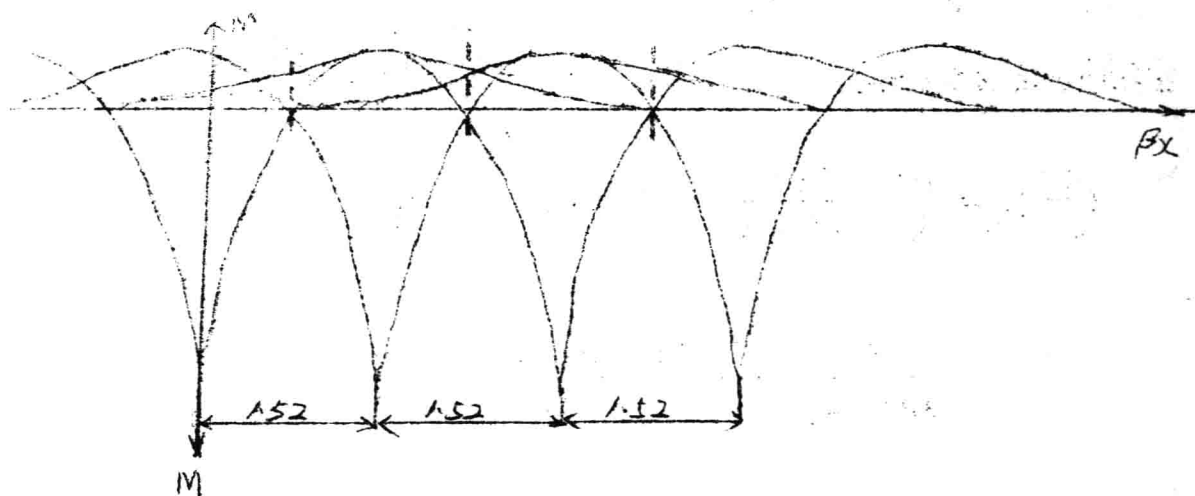
~~一九~~八二年一月

第一章

P 1 1 页 习题

1. 运用表 2 的数据作钢轨的弯矩图，设车轮压力为 40000 磅。此弯矩图表明在车轮之间中点截面处的弯矩为负值，即表示出在机车驶过时钢轨承受反复弯曲应力的作用，这在最后可以引起疲劳裂缝。

解 本题除运用表 2 的数据外；还要辅以图 2 的曲线才能作出钢轨的弯矩图。并假定车轮为四个，轴距为 66 吋。



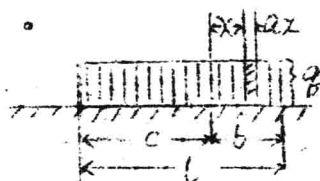
按图 2 中 ψ 的线进行迭加，即可看出在车轮之间中点截面处的弯矩为负值。（图中点画线截面处弯矩为负值）。

2. 试求图 3 所示的梁上受载部分中点处的弯矩及同部分左端的挠度曲线斜率。

解 中点处弯矩可以由式(4)求得

$$\begin{aligned}
 M_{\text{中点}} &= -2 \int_0^{l/2} \frac{k}{4\beta} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) dx \\
 &= -\frac{k}{2\beta} \left[\frac{e^{-\beta x} (-\beta \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{2\beta^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{-\beta x} (\beta \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{2\beta^2} \right]_{\substack{l/2 \\ 0}} \\
 &= \frac{k}{2\beta^2} e^{-\frac{\beta L}{2}} \sin \frac{\beta L}{2}
 \end{aligned}$$

左端的挠度曲线斜率为



$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{左}} = \int_0^L \frac{k dx}{4\beta^2 EI_3} e^{-\beta x} \sin \beta x \quad \text{图 3}$$

$$= \frac{k}{4\beta^2 EI_3} \left[\frac{e^{-\beta x} (-\beta \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{2\beta^2} \right]_0^L$$

$$= \frac{k\beta}{2k} [1 - e^{-\beta L} (\sin \beta L + \cos \beta L)]$$

3 试求弹性基础上的无限长梁在三角形载荷作用下任意点A的挠度。图5。

解 由图5所示。取一微段 dx 。以该段上的载荷 $k_0(c+x)/L$ 代替式3)中的载荷 P 。并积分即可得

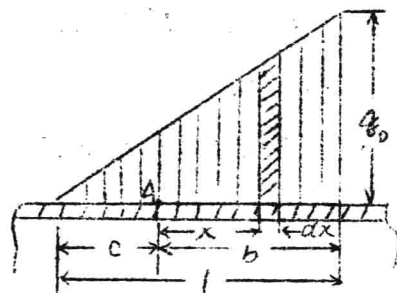


图 5

$$y = \int_0^b \frac{k_0 (c+x)}{L\beta^3 EI} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) dx \\ + \int_0^c \frac{k_0 (c-x)}{L\beta^3 EI} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) dx$$

积分的前项中

$$\int_0^b x e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) dx \\ = \int_0^b x e^{-\beta x} \cos \beta x dx + \int_0^b x e^{-\beta x} \sin \beta x dx$$

其中:

$$\begin{aligned} \int_0^b x e^{-\beta x} \cos \beta x dx &= \frac{1}{\beta} \int_0^b x e^{-\beta x} d \sin \beta x \\ &= \frac{1}{\beta} \left(x e^{-\beta x} \sin \beta x \Big|_0^b - \int_0^b \sin \beta x d(x e^{-\beta x}) \right) \\ &= \frac{1}{\beta} \left(b e^{-\beta b} \sin \beta b - \int_0^b \sin \beta x (-x e^{-\beta x} \beta dx + e^{-\beta x} dx) \right) \\ &= \frac{1}{\beta} \left(b e^{-\beta b} \sin \beta b + \beta \int_0^b x e^{-\beta x} \sin \beta x dx - \int_0^b e^{-\beta x} \sin \beta x dx \right) \\ &= \frac{1}{\beta} \left(b e^{-\beta b} \sin \beta b - \frac{e^{-\beta x} (-\beta \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{2\beta^2} \Big|_0^b \right. \\ &\quad \left. + \beta \int_0^b x e^{-\beta x} \sin \beta x dx \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\text{又 } \int_0^b x e^{-\beta x} \sin \beta x dx &= -\frac{1}{\beta} \int_0^b x e^{-\beta x} d \cos \beta x \\
&= -\frac{1}{\beta} \left(b e^{-\beta b} \cos \beta b - \int_0^b \cos \beta x (-x \beta e^{-\beta x} dx + e^{-\beta x} dx) \right) \\
&= -\frac{1}{\beta} \left(b e^{-\beta b} \cos \beta b + \beta \int_0^b x e^{-\beta x} \cos \beta x dx - \int_0^b e^{-\beta x} \cos \beta x dx \right) \\
&= -\frac{1}{\beta} \left[b e^{-\beta b} \cos \beta b - \frac{e^{-\beta x} (\beta \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{2\beta^2} \right]_0^b \\
&\quad + \beta \int_0^b x e^{-\beta x} \cos \beta x dx \quad \text{---} \quad \text{②}
\end{aligned}$$

将②式代入①式得：

$$\begin{aligned}
\int_0^b x e^{-\beta x} \cos \beta x dx &= \frac{1}{\beta} \left(b e^{-\beta b} \sin \beta b \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-\beta x} (-\beta \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{2\beta^2} \right) \Big|_0^b \\
&= -b e^{-\beta b} \cos \beta b + \frac{e^{-\beta x} (\beta \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{2\beta^2} \Big|_0^b \\
&\quad - \beta \int_0^b x e^{-\beta x} \cos \beta x dx \\
&= \frac{1}{2\beta} \left(b e^{-\beta b} (\sin \beta b - \cos \beta b) + \frac{e^{-\beta b} \sin \beta b}{\beta} \right) .
\end{aligned}$$

将①式代入②式得

$$\begin{aligned}
 \int_0^b x e^{-\beta x} \sin \beta x dx &= -\frac{1}{\beta} \left[b e^{-\beta b} \cos \beta b \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{-\beta x} (\beta \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{2\beta^2} \right] \Big|_0^b + b e^{-\beta b} \sin \beta b \\
 &\quad - \frac{e^{-\beta x} (-\beta \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{2\beta^2} \Big|_0^b + \beta \left(\int_0^b x e^{-\beta x} \sin \beta x dx \right) \\
 &= -\frac{1}{2\beta} \left[b e^{-\beta b} (\sin \beta b + \cos \beta b) + \frac{e^{-\beta b} \cos \beta b - 1}{\beta} \right].
 \end{aligned}$$

于是积分的前项为:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^b \frac{k_0 (c+x)}{8L\beta^3 EI_y} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) dx \\
 &= \frac{k_0}{8L\beta^3 EI_y} \left[\int_0^b c e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^b x e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) dx \right] \\
 &= \frac{k_0}{8L\beta^3 EI_y} \left\{ \frac{c(1-e^{-\beta b} \cos \beta b)}{\beta} - \frac{b e^{-\beta b} \cos \beta b}{\beta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-\beta b} (\sin \beta b + \cos \beta b) - 1}{2\beta^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

同理可得积分的后项为：

$$\begin{aligned}
 & \frac{k_0 (c-x)}{8l\beta^3 EI_3} e^{-\beta x} (\cos\beta x + \sin\beta x) dx \\
 &= \frac{k_0}{8l\beta^3 EI_3} \left[\int_0^c e^{-\beta x} (\cos\beta x + \sin\beta x) dx \right. \\
 & \quad \left. - \int_0^c x e^{-\beta x} (\cos\beta x + \sin\beta x) dx \right] \\
 &= \frac{k_0}{8l\beta^3 EI_3} \left\{ \frac{c(1-e^{-\beta l} \cos\beta l)}{\beta} + \frac{ce^{-\beta l} \cos\beta l}{\beta} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{e^{-\beta l} (\sin\beta l + \cos\beta l) - 1}{2\beta^2} \right\} .
 \end{aligned}$$

最后将积分的两项相加，即得到任意点 A 的挠度 y 表达式为：

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{k_0}{4l\beta^3 EI_3} \left[2\beta l (2 - e^{-\beta b} \cos\beta b - e^{-\beta l} \cos\beta l) \right. \\
 & \quad \left. + 2\beta ce^{-\beta l} \cos\beta l - 2\beta be^{-\beta b} \cos\beta b + e^{-\beta b} \right. \\
 & \quad \left. (\sin\beta b + \cos\beta b) - e^{-\beta l} (\sin\beta l + \cos\beta l) \right] \\
 &= \frac{k_0}{4\beta^3 EI_3} \left[4\beta c - 2\beta l e^{-\beta b} \cos\beta b - 2\beta l e^{-\beta l} \cos\beta l \right. \\
 & \quad \left. + 2\beta ce^{-\beta l} \cos\beta l - 2\beta be^{-\beta b} \cos\beta b - \psi(\beta b) + \psi(\beta c) \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{f_0}{4\beta k l} [4\beta c - \varphi(\beta b) + \varphi(\beta c) - 2\beta c \theta(\beta b)].$$

P 13 习题

1. 试求一弹性基础上半无限长梁的挠度曲线。梁的一端铰支，而其上作用着一力偶 M_0 。图8。

解 将 $c = 0$ 代入式(11)，
得铰支点的反力为

$$P = \beta M_0.$$

将此 P 值代入式(1)，得

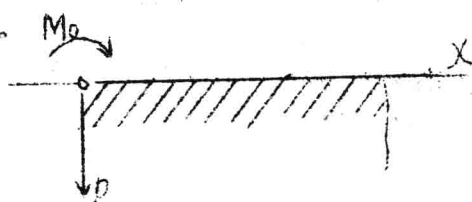


图8

$$y = \frac{M_0}{2\beta^2 EI_z} e^{-\beta x} \sin \beta x = \frac{M_0}{2\beta^2 EI_z} \zeta(\beta x).$$

对上式进行微分并注意符号 $\beta = \frac{k}{4EI_z}$ ，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\beta^3 M_0}{k} [e^{-\beta x} \cos \beta x - e^{-\beta x} \sin \beta x] = \frac{4\beta^3 M_0}{k} \cdot \varphi(\beta x).$$

$$M = -EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -EI_z \frac{2\beta^3 M_0}{k} (-2\beta e^{-\beta x} \cos \beta x)$$

$$= M_0 \cdot \varrho(\beta x).$$

$$V = -EI_z \frac{d^3 y}{dx^3} = \beta M_0 (-e^{-\beta x} \sin \beta x + e^{-\beta x} \cos \beta x)$$

$$= -\beta M_0 \cdot (\beta x).$$

2 试求作用于一弹性基础上的半无限长梁一端的弯矩 M_0 及力 P 。图 9。如果该端的挠度 δ 和斜率 α 为已知。

解 将已知的 δ 和 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \alpha$

代入式(11)和(12)。得 M_0 和 P 。即

$$\delta = \frac{1}{2\beta^3 EI_z} (P - \beta M_0),$$

$$\alpha = \frac{1}{2\beta^2 EI_z} (P - 2\beta M_0).$$

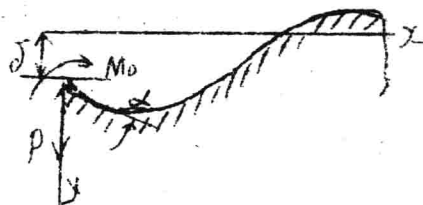


图 9

联介上两式得：

$$M_0 = 2\beta EI_z (\beta \delta + \alpha).$$

$$P = 2\beta^2 EI_z (2\beta \delta + \alpha).$$

3 试求一弹性基础上的半无限长梁由载荷 P 产生的挠度曲线。 P 的作用点离梁自由端 A 的距离为 c 。图 10。

解 设梁延伸到 A 端的左边，如虚线所示。对于这一情形，式(3)给出 $x > 0$ 时的挠度曲线。根据式(7)并运用对称条件，在假想的无限长梁的截面 A 处得：

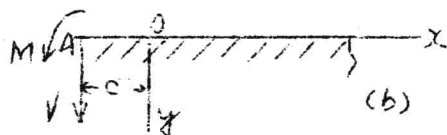
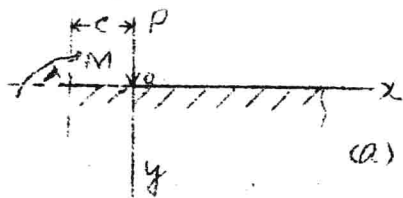


图 10

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P}{4\beta} \psi(\beta c) \\ V &= \frac{P}{2} \theta(\beta c) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

为了求得A端自由的半无限长梁所需的挠度曲线。显然须将半无限长梁由图10b所示的力产生的挠度与假想无限长梁的挠度相迭加。这样，运用式(b)，(d)及(c)，当 $x > 0$ 时，得

$$\begin{aligned} y &= \frac{P\beta}{2k} \psi(\beta x) + \frac{2\beta}{k} \{ V \theta[\beta(x+c)] + \beta M \theta[\beta(x+c)] - \beta M \psi[\beta(x+c)] \} \\ &= \frac{P\beta}{2k} \psi(\beta x) + \frac{\beta P}{k} \{ \theta(\beta c) \theta[\beta(x+c)] + \frac{1}{2} \psi(\beta c) \theta[\beta(x+c)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \psi(\beta c) \psi[\beta(x+c)] \} \quad (d) \end{aligned}$$

此式也可用于 $-c < x < 0$ ；这时只需以 x 的绝对值代替 $\psi(\beta x)$ 中的 x 即可。

P 2.1 习题

1. 试求图12所示的梁的挠度曲线通解。

解 先按P16页式(a)，(b)，(c)三式，且令其中 $c=0$ 得：

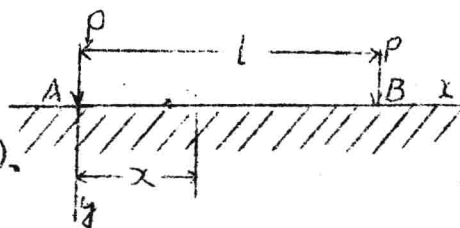


图 1.2

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{4\beta} [\psi(\beta l) + 1] + \frac{Q_0}{4\beta} [1 + \psi(\beta c)] + \frac{M_0}{2} [1 + \theta(\beta c)] &= 0 \\ \frac{P}{2} [\theta(\beta l) + 1] - \frac{Q_0}{2} [1 - \theta(\beta c)] - \frac{M_0 \beta}{2} [1 - \psi(\beta c)] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

联介以上二式，并以简写符号 ψ 代 $\psi(\beta l)$ ，余此类推得

$$Q_0 = - \frac{P[(1+\psi)(1-\psi)+2(1+\theta)^2]}{(1+\psi)(1-\psi)-2(1-\theta^2)}$$

$$= - \frac{P(2\theta^2+4\theta+\psi-\varphi-4\varphi+3)}{2\theta^2+\psi-\varphi-4\varphi-1}$$

$$M_0 = \frac{2P(1+\psi)}{\beta(-2\theta^2-\psi+\varphi+4\varphi-1)}$$

$$= \frac{2P(1+\psi)}{\beta(2\theta^2+\psi-\varphi-4\varphi-1)}$$

由式(7)和式(10)我们有：

$$y = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) + \frac{P\beta}{2k} \varphi[\beta(l-x)] + \frac{Q_0\beta}{2k} \{ \varphi(\beta x)$$

$$+ \varphi[\beta(l-x)] \} + \frac{M_0\beta^2}{k} \{ (\beta x) + [\beta(l-x)] \} .$$

将 Q_0 、 M_0 代入上式，并用简写符号 φ 代 $\varphi(\beta x)$ ， φ' 代 $\varphi[\beta(l-x)]$ ，

余此类推，我们将

$$y = \frac{P\beta}{2k} \varphi + \frac{P\beta}{2k} \varphi' - \frac{\beta(\varphi+\varphi')}{2k} \times \frac{P(2\theta^2+4\theta+\psi-\varphi-4\varphi+3)}{2\theta^2+\psi-\varphi-4\varphi-1}$$

$$+ \frac{\beta^2(\varphi+\varphi')}{k} \frac{2P(1+\psi)}{\beta(2\theta^2+\psi-\varphi-4\varphi-1)}$$

$$= \frac{P\beta}{2k}(\varphi' + \varphi'') - \frac{P\beta}{2k} \frac{(\varphi' + \varphi'')(2\theta^2 + 4\theta + \psi - \varphi - 4\varphi + 3)}{2\theta^2 + \psi - \varphi - 4\varphi - 1}$$

$$+ \frac{2P\beta(\varphi' + \varphi'')}{k} \frac{(1+\psi)}{2\theta^2 + \psi - \varphi - 4\varphi - 1}$$

$$= \frac{2P\beta}{k} \left\{ \frac{-(\varphi' + \varphi'')(1+\theta) + (\varphi' + \varphi'')(1+\psi)}{2\theta^2 + \psi - \varphi - 4\varphi - 1} \right\}$$

$$= \frac{2P\beta}{k} \left\{ \frac{-\varphi' - \varphi'' - \varphi'\theta - \varphi''\theta + \varphi' + \varphi'' + \varphi'\psi + \varphi''\psi}{2\theta^2 + \psi - \varphi - 4\varphi - 1} \right\}$$

为简便起见，将P3页式(8)之 φ 、 ψ 、 θ 、 φ 简记为：

$$\varphi(\beta l) = e^{-\beta l} \cos \beta l + e^{-\beta l} \sin \beta l = B + A$$

$$\psi(\beta l) = -A + B$$

$$\theta(\beta l) = B$$

$$\varphi(\beta l) = A$$

于是上式变为

$$y = \frac{2P\beta}{k} \left\{ \frac{-A' - B' - A'' - B'' - AB - B'B - AB - \beta B + A' - A'' - AA + AB - AB + AB}{-(1 + 2A - A^2 - B^2)} \right\}$$

$$= \frac{2P\beta}{k} \left\{ \frac{-e^{-\beta x} \cos \beta x - e^{-\beta(l-x)} \cos \beta(l-x)}{-(1 + 2A - A^2 - B^2)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-e^{-\beta x} \cos \beta x e^{-\beta l} \cos \beta l - e^{-\beta(l-x)} \cos \beta(l-x)}{-(1 - e^{-2\beta l} + 2e^{-\beta l} \sin \beta l)} \\
& \frac{e^{-\beta l} \cos \beta l - e^{-\beta x} \sin \beta x e^{-\beta l} \sin \beta l}{-e^{-\beta(l-x)} \sin \beta(l-x) e^{-\beta l} \sin \beta l}
\end{aligned}$$

上式中括号内分子的第四项和第六项化简如下:

$$\begin{aligned}
& e^{-\beta(l-x)} e^{-\beta l} [\cos \beta l \cos \beta x + \sin \beta l \sin \beta x] \cos \beta l \\
& + e^{-\beta(l-x)} e^{-\beta l} [\sin \beta l \cos \beta x - \cos \beta l \sin \beta x] \sin \beta l \\
& = e^{-\beta(l-x)} e^{-\beta l} \cos \beta x
\end{aligned}$$

因此分子部分变为:

$$\begin{aligned}
& -[e^{-\beta x} \cos \beta x + e^{-\beta(l-x)} \cos \beta x] + e^{-\beta x} \cos \beta x e^{-\beta l} \\
& \{ \cos \beta l + e^{-\beta x} \sin \beta x e^{-\beta l} \sin \beta l + e^{-\beta(l-x)} e^{-\beta l} \cos \beta x \}
\end{aligned}$$

由于 $\cos \beta(l-x) = \cos \beta l \cos \beta x + \sin \beta l \sin \beta x$,

所以 $\sin \beta l \sin \beta x = \cos \beta(l-x) - \cos \beta l \cos \beta x$.

于是分子部分进一步简化为

$$\begin{aligned}
& -[e^{-\beta x} \cos \beta x + e^{-\beta l} e^{\beta x} \cos \beta (l-x) \\
& + e^{-\beta x} e^{-\beta l} \cos \beta (l-x) + e^{-2\beta l} e^{\beta x} \cos \beta x] \\
& = -2e^{-\beta l} \left[\frac{e^{\beta(l-x)}}{2} \cos \beta x + \frac{e^{\beta x}}{2} \cos \beta (l-x) \right. \\
& \quad \left. + \frac{e^{-\beta x}}{2} \cos \beta (l-x) + \frac{e^{-\beta(l-x)}}{2} \cos \beta x \right] \\
& = -2e^{-\beta l} \left[\frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \cos \beta (l-x) \right. \\
& \quad \left. + \frac{e^{\beta(l-x)} + e^{-\beta(l-x)}}{2} \cos \beta x \right] \\
& = -2e^{-\beta l} [\cos \beta x \cos \beta (l-x) + \cos \beta (l-x) \cos \beta x] .
\end{aligned}$$

其分母化简为

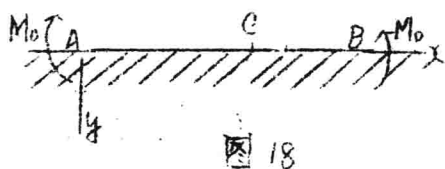
$$\begin{aligned}
& -2e^{-\beta l} \left(\frac{1 - e^{-2\beta l}}{2e^{-\beta l}} + \sin \beta l \right) \\
& = -2e^{-\beta l} \left(\frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{2} + \sin \beta l \right) \\
& = -2e^{-\beta l} (\sin \beta l + \sin \beta l) .
\end{aligned}$$

最后得梁的挠度曲线通介为

$$y = \frac{2P\beta}{2} \left\{ \frac{\cosh\beta x \cos\beta(l-x) + \cosh\beta(l-x) \cos\beta x}{\sinh\beta l + \sin\beta l} \right\}.$$

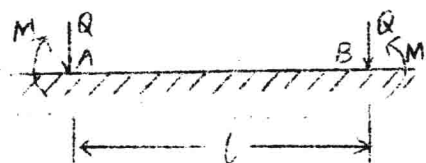
2 有一梁为两大小相等而方向相反的力偶 M_0 所弯曲, 图18, 试求该梁两端点的挠度及中点的弯矩。

解 设梁为无限长并施加A、B处载荷为 Q 及 M (如右图)以使梁在A、B处的弯矩恰为 M_0 , 剪力为零。于是按P16页式(a)(b)(c)三式应有:



$$\frac{Q}{4\beta}(1+\varphi) + \frac{M}{2}(1+\theta) = M_0$$

$$-\frac{\theta}{2}(1-\theta) - \frac{M\beta}{2}(1-\varphi) = 0$$



联介上两式得:

$$Q = - \frac{4\beta M_0(1-\varphi)}{2(1-\theta^2) - (1-\varphi)(1+\varphi)}$$

$$M = \frac{4M_0(1-\theta)}{2(1-\theta^2) - (1-\varphi)(1+\varphi)}$$

于是两端点的挠度为: