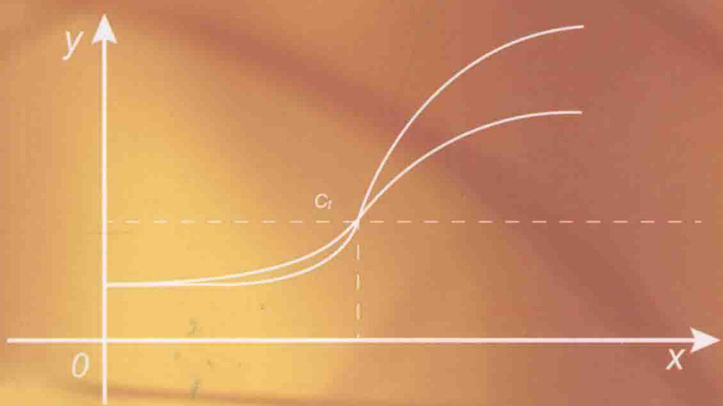
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

医学高等数学

（第3版）

Medical Higher Mathematics

马建忠　主编



科学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

医学高等数学

（第三版）

马建忠　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为教育部首批“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材，上一版是普通高等教育“十一五”国家级规划教材.全书依据普通高等医药院校数学教学要求编写而成.书中讲述了微积分、常微分方程、概率论及线性代数等方面的基础知识，重点突出了基本概念、基本理论和数学方法.书中结合具体的医药学问题给出了例题和习题，并介绍了借助计算机软件，用数学方法处理医学实际问题.

本书可供高等医药院校作数学教材使用，也可供医学工作者作为科学研究参考书.

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学/马建忠主编.—3版.—北京：科学出版社，2013.8

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

ISBN 978-7-03-038207-8

Ⅰ.医… Ⅱ.马… Ⅲ.医用数学-高等学校-教材 Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第171513号

责任编辑：刘 畅/责任校对：李 影

责任印制：阎 磊/封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1999年8月第 一 版 开本：720×1000 B5

2007年8月第 二 版 印张：19

2013年9月第 三 版 字数：384 000

2013年9月第二次印刷

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

《医学高等数学》(第三版)编委会

主　编　马建忠

副主编(按姓氏笔画排序)

丁　勇　何　兰　范锡枝

编　者(按姓氏笔画排序)

丁　勇　(南京医科大学)
马建忠　(中国医科大学)
王　颖　(吉林大学)
刘照军　(泰山医学院)
何　兰　(齐齐哈尔医学院)
陈　群　(宁夏医科大学)
林剑鸣　(广州中医药大学)
范锡枝　(新乡医学院)
和丽军　(昆明医科大学)
赵会仁　(辽宁医学院)
彭友霖　(赣南医学院)

第三版前言

自1953年，沃森(J.D.Watson)等建立DNA双螺旋结构分子模型以来，医学和生物学的数学化进展迅猛.耗散结构理论、免疫网络理论，以及用微分方程组研究神经纤维的行为与神经冲动的传导分别荣获诺贝尔奖；借助电子计算机快速计算，按一定数学方法，由X射线的投影函数重建人体断层数字图像的X-CT成为医学影像的一次革命.这些足以表明数学是现代医学研究必不可少的工具，同时数学本身是培养学生理性思维的重要载体，它潜移默化地启迪学生的创新意识.

本书的内容包含了医学研究中所涉及的大学数学基础和数学方法，以及数学在医学上的应用.它是医学各门学科的基础课，为医学院校学生提供必备的数学素质教育，同时为研究医学实际问题和生命现象(或过程)的数量规律提供重要的数学研究方法.

本书在总结二十余年教学经验基础上，根据我国高等医药院校数学教学调查状况，按照教育部非数学专业数学基础课程教学指导委员会制定的"医科数学教学基本要求"编写的.在本书编写过程中重点突出如下特点：精炼教材内容，在有限学时内，给学生建立较广泛的数学基础知识；在坚持数学素质教育的原则下，兼顾数学自身理论体系，削减过多过难的理论推导，使教材内容简洁而不失严谨，着重阐明基本概念、基本理论和数学方法；坚持和增加用高等数学方法处理常见的医学问题，使学生容易地理解数学与医学的联系；概念定义严谨，说理清楚透彻，突出联系实践问题，使学生容易吸收和应用；适当地开展数学在计算机上实验教学；力求做到重点突出，层次分明，例题典型，深入浅出，行文流畅，说理透彻，图表清楚，便于自学.

另外，本书首次从实践到理论上论述概率密度曲线下的面积就是概率；编制生动的实际医学例题，阐述数学建模的多种方法；并在许多地方把医学问题、数学方法和计算机计算技术融合在一起，启发学生创造性思维意识；应用Matlab软件开创数学实验教学.

全书共分8章，其内容有一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、概率论、线性代数，并配有适当的客观和主观习题，附有习题答案以及常用数学表.教材总学时为78学时，在教学中，按上述介绍内容次序分别讲授30、14、8、18和8学时，可对有*号的内容作筛选或安排自学.学时较少的高等医药院校，各章节的取舍可自行调整.《医学高等数学》适用于作医药院校各类专业的必修课教材，研究生选修课教材，也可作为医药夜大基础课教材，同时可供医学研究人员参考.本教材

配有《医学高等数学学习指导与习题全解》辅导教材.

本书在编写与出版过程中得到各参编学校的领导、科学出版社以及锦州医学院赵玉荣教授的全力支持和帮助. 在教材评优中,2006 年被评为普通高等教育"十一五"国家级规划教材,2009 年被评为省高等教育"十一五"精品教材,2012 年评为教育部首批"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材.感谢大家的认同和信任,在此一并致谢.

由于编者水平有限、经验不足,难免存在错误或不妥之处,衷心欢迎各界同仁和读者批评指正.

中国医科大学　马建忠

2013 年 4 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象之一，它刻画了变量之间的相互制约关系.本章从函数出发，用运动和变化的观点来研究函数极限和连续.函数极限刻画了变量的变化趋势，高等数学中的许多概念和理论都是以极限为基础的，极限使高等数学与初等数学有了本质的差异.函数的连续性是函数可微的必要条件，又是函数可积的充分条件，所以连续函数是高等数学研究的主要函数.由此，本章主要介绍函数、函数极限和函数的连续性，为后继章节奠定基础.

1.1* 函　　数

1.1.1　函数的概念

一、常量与变量

在某一变化过程中始终保持相对静止状态的量称为**常量**(constant quantity)；时时处于变化着的量称为**变量**(variable).前者记为 a,b,c 等，后者记为 x,y,t 等.如在一般情况下，人体器官的个数为常量，而人的身高、体重随年龄而变化，因此它们均为变量.

常量与变量的区分不是绝对的，而是相对的.这由当时所考虑问题的条件而定.如人的身高，在 1 天内就可认为是常量，而在 1 年内它就是变量；又如在圆的半径增加过程中，其周长和面积都是变量，而周长与直径之比却是常量(即为 π).

二、函数的概念

在某一变化过程中，变量之间的关系往往不是孤立存在的，而是相互影响和相互制约的，它们彼此之间存在着一种确定的对应关系，这种关系在数学上概括为函数关系.

【定义 1】　设在某个变化过程中存在两个变量 x,y，若对于某一非空数集中的每一个 x 值，按照某一确定的关系 f 都有唯一一个实数 y 与之对应，则称**变量** y 是变量 x 的**函数**(function)，记为 $y=f(x)$.其中 x 称为**自变量**(independent variable)，y 称为**因变量**(dependent variable).使函数有意义的 x 的取值范围称为函数的**定义域**(domain of definition)，通常用 D 表示；y 的取值范围称为函数的**值域**(domain of functional value)，通常记为 R，即 $R=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

函数的定义有两个要素：一是自变量 x 必须有明确的定义域 D；二是在定义域范围内，变量 x 与 y 有确定的对应关系，这两个要素决定值域 R.如果两个函数相等，这两个要素必须完全相同.

考查函数 $y=2(x+1)$ 与函数 $y=2(x^2-1)/(x-1)$ 是否相等.两个函数的对应关系不同，它们的定义域也不同，前者的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，后者的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，从而决定了它们的值域也不同，所以这两个函数不相等.

函数概念中两个变量之间的对应关系通常用三种表达方式：解析法、表格法和图表法.医学高等数学重点研究的是解析法.

在解析法中，如果函数 $f(x)$ 在定义域内有定义，且 $x_0\in D$，则称 $y(x_0)$、$f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 为函数在 x_0 处的函数值.解析法表示的函数 $f(x)$ 在平面直角坐标系中表示平面曲线.

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arcsin(\dfrac{x}{2}-1)$ 的定义域.

解： 此函数的定义域是由函数 $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 和 $\arcsin(\dfrac{x}{2}-1)$ 的定义域交集所确定.因为函数 $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 有意义，必须使 $4-x^2>0$，即定义域为 $(-2,2)$；对于函数 $\arcsin(\dfrac{x}{2}-1)$，必须保证 $|\dfrac{x}{2}-1|\leqslant 1$，即 $0\leqslant x\leqslant 4$，其定义域为 $[0,4]$，因此 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)\cap[0,4]=[0,2)$.

例 2 已知 $f(x)=\lg(1+x)$ 且 $f[\varphi(x)]=x$，求中间变量 $\varphi(x)$.

解： 把 $\varphi(x)$ 代入 $f(x)$，则得 $f[\varphi(x)]=\lg[1+\varphi(x)]=x$，所以 $1+\varphi(x)=10^x$.于是可得：

$$\varphi(x)=10^x-1.$$

例 3 已知函数 $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$.

解： 利用变量代换法求 $f(x)$.令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，将其代入原式，得 $f(t)=(t-1)^2-3(t-1)+2=t^2-5t+6$，所以 $f(x)=x^2-5x+6$.

在研究函数时，经常用到一点的邻域概念.所谓邻域是指如果 x_0 是实数轴上一点，δ 为正实数，则适合开区间 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 的 x 的全体称为**点 x_0 的邻域**(neighborhood)，记为 $\cup(x_0,\delta)=\{x \| x-x_0|<\delta\}$.

1.1.2 函数的特性

一、单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果在 D 中某一个子区间 I 中任意取两个值 x_1

和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$在区间I 上是单调增加的，见图 1-1(a)[或单调减少的，见图 1-1(b)].单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**(monotone function).

如 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的；而 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是单调增加的，在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上是单调减少的.

从图 1-1 可知，单调函数图像的特点是：单调增加函数对应的曲线随自变量 x 的逐渐增大而上升；单调减少函数对应的曲线随自变量 x 逐渐增大而下降.

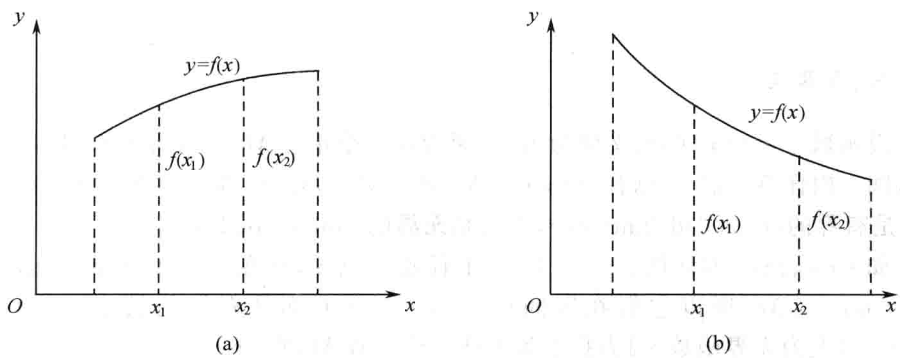


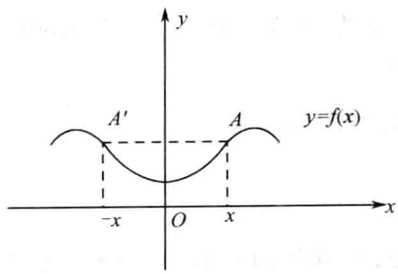
图 1-1

二、奇偶性

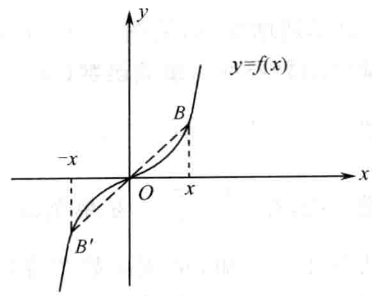
设函数 $y=f(x)$定义域为 D，如果对 D 内任意一点 x，也有$-x\in D$，都满足 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$在 D 内是**偶函数**(even function)，若函数 $y=f(x)$对定义域 D 内任意一点 x，都满足 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$在 D 内是**奇函数**(odd function).

如 $y=x^2$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$上是偶函数；$y=\sin x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$内是奇函数；$y=\sin x+\cos x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$上非奇非偶.

偶函数的图像是关于 y 轴对称，如图 1-2(a)，其中，A 与 A'是 y 轴对称点，奇函数的图像是关于原点对称，如图1-2(b)，其中 B 与 B'是原点对称点.



(a)



(b)

图 1-2

三、有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，如果存在一个正数 M，使得对于 D 中某一个子区间 I 内任意一点 x，总有 $|f(x)|\leqslant M$（即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$），则称函数 $f(x)$在 I 上是**有界的**（bounded function），否则是**无界的**（unbounded function）.

如 $\sin x$、$\cos x$ 对区间$(-\infty,+\infty)$上任意一点 x，存在 $M=1$，使得 $|\sin x|\leqslant M$，$|\cos x|\leqslant M$，所以它们在区间$(-\infty,+\infty)$上都是有界函数. $\ln x$ 在区间$(0,+\infty)$上为无界函数，因为找不到那样一个正数 M，使 $|\ln x|\leqslant M$ 成立.

一个函数有界还是无界，必须指明所考虑的区间，因为同一个函数在某个区间上可能是有界的，但在另一个区间上却可能是无界的. 如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$上是无界函数，但在闭区间$[1,2]$上却是有界函数，因为在此区间上能找到 $M\geqslant 1$，使当 $x\in[1,2]$时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立.

四、周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对于任意一点 $x\in D$，$f(x+T)=f(x)$恒成立，则称 $f(x)$在 D 上为**周期函数**（periodic function），T 称为 $f(x)$的周期. 通常所说的周期是指最小正周期.

如 $\sin x$、$\cos x$ 均为周期函数，它们的最小正周期为 2π；$\tan x$、$\cot x$ 也是周期函数，它们的最小正周期为 π.

周期函数的图像特点是在这函数的定义域内，每个长度为周期 T 的区间上，函数所对应的曲线有相同的形状，如图 1-3 所示.

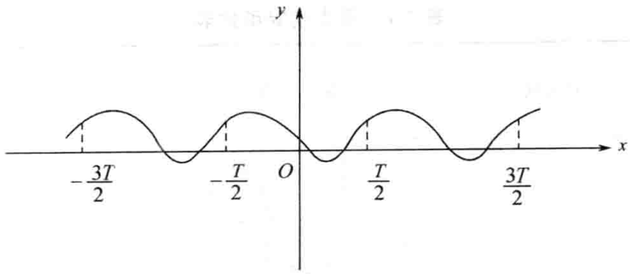


图 1-3

1.1.3 初等函数

一、基本初等函数

基本初等函数(basic elementary function)通常是指幂函数(power function)、指数函数(exponential function)、对数函数(logarithmic function)、三角函数(trigonometric function)和反三角函数(anti-trigonometric function).

它们的表达式、定义域、图像及主要性质见表 1-1.

二、复合函数

自由落体运动的动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$,其中 m 为质点的质量,v 为质点的速度,而 $v=gt$,其中 g 为重力加速度,我们称 $E=\frac{1}{2}m(gt)^2$ 是由两个函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=gt$ 复合而成的 t 的复合函数.v 称为中间变量,t 为自变量.

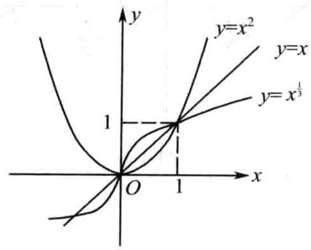
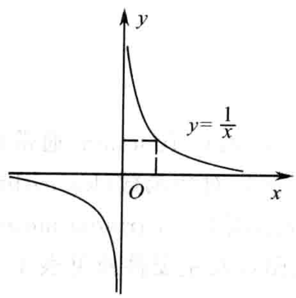
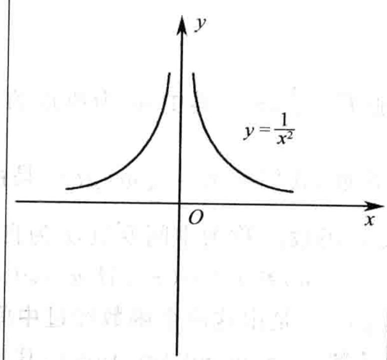
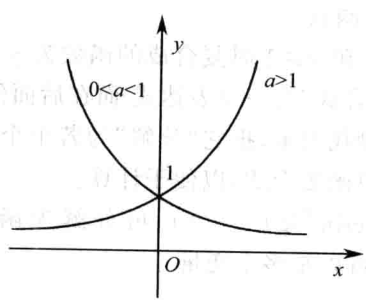
【定义 2】 设函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$,且 $u=\varphi(x)$的值域全部在 $y=f(u)$的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$是由这两个函数经过**中间变量**(intermediate variable)u 而构成 x 的**复合函数**(compound function),其中 x 为自变量,简称函数 $y=f[\varphi(x)]$是 x 的复合函数.

如 $y=\ln u$,$u=x-1$ 在 $x>1$ 时复合成的函数为 $y=\ln(x-1)$.

这样可将多个函数"合成"为一个表达式.而在后面的很多计算问题中,往往需要把复合函数的中间变量找出来,把它"分解"为若干个基本初等函数或由它们通过四则运算而得到的简单函数形式,以便于计算。

如复合函数 $y=\arcsin[\lg(x-1)]$可分解为函数 $y=\arcsin u$,$u=\lg v$,$v=x-1$,所以中间变量可以是多个变量.

表 1-1 基本初等函数表

函数名称	表达式	定义域	图 像	主要性质
幂函数	$y=x^a$	a 取值不同，函数的定义域不同		图像都经过(1,1)点，a 为偶数时，图像关于 y 轴对称
				a 为奇数时，图像关于原点对称
				a 为负数时，图像在原点间断
指数函数	$y=a^x$ $\begin{pmatrix}a>0\\a\neq1\end{pmatrix}$	$(-\infty,+\infty)$		图像都经过点(0,1)，当 $a>1$ 时，a^x 为增函数；当 $0<a<1$ 时，a^x 为减函数