Probability and Mathematical Statistics

《概率论与数理统计》(第二版)全程辅导及习题精解

李伟光 张照坤 主编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

大学公共数学系列教材辅导

Probability and Mathematical Statistics

《概率论与数理统计》（第二版）全程辅导及习题精解

李伟光　张照坤　主编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

《概率论与数理统计》(第二版)全程辅导及习题精解/李伟光,张照坤主编.—武汉:武汉大学出版社,2014.6
ISBN 978-7-307-13213-9

Ⅰ.概… Ⅱ.①李… ②张… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 085694 号

责任编辑:黄汉平　　责任校对:鄢春梅　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:武汉中科兴业印务有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:10　字数:236 千字　插页:1
版次:2014 年 6 月第 1 版　2014 年 6 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-13213-9　定价:38.00 元

前　　言

"概率论与数理统计"是研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科，是高等学校理工科本科各专业的一门重要的基础理论课。随着现代科学技术的发展，概率论与数理统计在自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产等领域中得到了越来越广泛的应用。因此，在我国高等学校绝大多数专业的教学计划中，概率论与数理统计均列为必修课程或限定选修课程。

作为一门应用数学学科，概率论与数理统计不仅具有数学所共有的特点：高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性，而且具有更独特的思维方法。为使初学者尽快熟悉这种独特的思维方法，更好掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论、基本运算以及处理随机数据的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析、解决实际问题的能力和创造性思维能力，我们编写了该指导书。

本书按大学公共数学系列教材《概率论与数理统计》(第2版)(高等教育出版社2011年出版)的章节顺序编排，以便读者与教材同步学习。本书每章包括以下几部分内容：

第一、考试基本要求。简明扼要地说明本章的学习要求，明确学习任务，使学习更有重点。

第二、知识点解析。串讲概念，总结性质和定理，使知识点全面系统，便于掌握，并注重知识点之间的联系，使知识融汇贯通。

第三、疑难解答。针对本章的重难点内容以及读者在学习本章时常问及的一些共同性问题，编选出若干问题予以分析、解答，以帮助读者对重难点内容的理解和掌握。

第四、课后习题解答。本部分对《概率论与数理统计》(第2版)教材中的全部习题给出了详尽的解答，并对较典型的习题做了适当的评注，方便读者在学习过程中进行对照分析。

此外，本书还收录了近几年来硕士研究生入学考试的部分试题及部分综合性习题。因此，本书也可作为硕士研究生入学考试应试参考。

本书编写过程中，得到了武汉大学数理经济与数理金融实验班及概率与统计科学系部分教师们的支持和帮助，编者谨致谢意。

限于编者的水平和精力，本书难免存在不足之处，欢迎读者批评指正。

李伟光

2013年8月20日

目　　录

第一章　随机事件与概率

一、考试基本要求

1. 了解随机现象与随机试验，了解样本空间的概念，理解随机事件，掌握事件之间的关系与运算.

2. 了解频率的概念，了解概率的统计定义，了解古典概率，会计算简单的古典概率问题.

3. 了解概率的公理化定义，理解概率的基本性质，理解概率的加法原理，了解可数可加性.

4. 了解条件概率，理解概率的乘法定律，掌握全概率公式，了解贝叶斯公式，并会应用贝叶斯公式解决简单概率问题.

5. 理解事件的独立性，了解伯努利概型和二项概率的计算方法.

二、知识点解析

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验与事件

如果一个试验在相同条件下可以重复进行，而每次试验的可能结果不止一个，但在进行一次试验之前却不能断言它出现哪个结果，则称这种试验为随机试验．试验的可能结果称为随机事件.

随机事件有三个基本特征：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每个试验的可能结果不止一个，并且能事先预测试验的所有可能结果；(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验常用字母 ε 表示，我们称随机试验所有可能的结果组成的集合为样本空间，一般用字母 Ω 表示；其中每一个可能的结果为样本点或基本事件，常用字母 ω 表示.

1.1.2　事件的关系与运算

1. 事件的关系

(1) 如果事件 A 的组成部分也是事件 B 的组成部分(A 发生必有事件 B 发生)：$A \subset B$；

(2) 如果同时有 $A \subset B$，$B \supset A$，则称 A 事件与 B 事件等价，或称 A 等于 B：$A = B$；

(3) 如果 A、B 中至少有一个发生的事件：$A \cup B$，或者 $A+B$；

(4) 属于 A 而不属于 B 的部分所构成的事件，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$，也可表示为 $A-AB$ 或者 $A\bar{B}$，它表示 A 发生而 B 不发生的事件；

(5)A、B 同时发生：$A \cap B$，或者 AB. $A \cap B = 0$ 则表示 A 与 B 不可能同时发生，称事件 A 与事件 B 互不相容或者互斥．基本事件是互不相容的；

(6)$\Omega - A$ 称为事件 A 的逆事件，或称 A 的对立事件，记为 $\bar{A}$. 它表示 A 不发生的事件. 互斥未必对立.

2. 事件的运算

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$AB = BA$；

(2) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

(3) 分配率：$A(B \cup C) = (AB)(AC)$，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

(4) 德摩根律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$，$\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$，$\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$，$\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$；

(5) 不相容分解：$A \cup B = A \cup \bar{A}B$，$A = AB \cup A\bar{B}$.

1.2 频率与概率

1.2.1 频率

设 Ω 为随机试验 ε 的样本空间，事件 $A \subset \Omega$，在相同条件下将试验 ε 重复 n 次，以 $n(A)$ 表示事件 A 在这 n 次试验中发生的次数，称$\dfrac{n(A)}{n}$为 A 在这 n 次试验中发生的频率，记为$f_n(A)$，即：

$$f_n(A) = \frac{n(A)}{n}$$

1.2.2 概率

1. 概率的公理化定义

设Ω为样本空间，A 为事件，对每一个事件A都有一个实数$P(A)$，若满足下列三个条件：

(1)$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(2)$P(\Omega) = 1$

(3) 对于两两互不相容的事件 A_1，A_2，$\cdots$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

常称为可列(完全) 可加性.

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

2. 概率的基本性质

(1) 不可能事件的概率为 0：$P(\phi) = 0$；

(2) 有限可加性：A_i，$i = 1, 2, \cdots, n$ 两两不相交，则 $\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)$；

(3) 可减性：若 $A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$；

(4) 单调性：若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$；

(5) 逆事件概率公式：$P(A)+P(\bar{A})=1$；

(6) 加法公式：$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

1.3　古典概型与几何概型

1.3.1　古典概型

(1) $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$；

(2) $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}$.

设任一事件 A，它是由 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ 组成的，则有

$$\begin{aligned}P(A)&=\{(\omega_1)\cup(\omega_2)\cup\cdots\cup(\omega_m)\}\\&=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_m)\\&=\frac{m}{n}\\&=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.\end{aligned}$$

1.3.2　几何概型

若随机试验的结果为无限不可数并且每个结果出现的可能性均匀，同时样本空间中的每一个基本事件可以使用一个有界区域来描述，则称此随机试验为几何概型.

对任一事件 A

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

其中 L 为几何度量(长度、面积、体积).

例题1：若一批产品中有 a 个正品和 b 个次品，我们在其中抽取了 n 个，问其中恰好有 k 个次品的概率(其中 $a>n-k$，$b>k$).

解：从 $a+b$ 个产品中抽取 n 个，有 C_{a+b}^{n} 种情况；而其中恰有 k 个次品，这意味着有 $n-k$ 个正品，有 $C_b^k C_a^{n-k}$ 种情况，所以

$$P_{ans}=\frac{C_b^k C_a^{n-k}}{C_{a+b}^{n}}.$$

例题2：将 n 只球放入 N 个盒子($N \geqslant n$)，试求每个盒子至多有一只球的概率.

解：将 n 只球放入 N 个盒子，每一只球有 N 种方法，所以样本空间大小为 N^n；要每个盒子至多有一只球，那么第一个球有 N 种放法，第二个球有 $N-1$ 种放法……第 n 只球有 $N-n$ 种放法. 所以总共有 $N\times(N-1)\times\cdots\times(N-n)$ 种放法，

所以有

$$P_{ans}=\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(N-i)}{N^n}.$$

例题3：从5双不同的鞋子里任取4只鞋子，问这4只鞋子里面至少有两只配成一双的概率是多少？

解：这个问题如果正面求事件 $A=\{4$ 只鞋子至少有一对配成一双$\}$，将会非常复杂，考虑事件 $\bar{A}=\{4$ 只鞋子没有两只是一双的$\}$ 就会简单许多.

先考虑总可能数，即10只鞋子里取四只为 C_{10}^4.

再考虑 $\bar{A}$ 中的样本点数量，那么第一只鞋子有10种取法，第2只有8种，第3只有6种，第4只有4种，所以 $|\bar{A}|=10\times8\times6\times4$.

这样，有 $P(\bar{A})=\dfrac{10\times8\times6\times4}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$，所以 $P(A)=\dfrac{13}{21}$.

1.4 条件概率

设 A、B 是两个事件，且 $P(A)>0$，则称 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生条件下，事件 B 发生的条件概率，记为 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

注：条件概率是概率的一种，所有概率的性质都适合于条件概率.

1.4.1 乘法公式

乘法公式：$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$.

更一般地，对事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_2)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1})$.

1.4.2 全概率公式

设事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 满足

(1) $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两互不相容，$P(B_i)>0(i=1, 2, \cdots, n)$；

(2) $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$，则有

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A\mid B_n).$$

例题4：一个人家里有2个小孩，若已知其中一个女孩，求另外一个也是女孩的概率.

解：如果不了解条件概率，这一题很容易误解为"另外一个是男是女的概率各是0.5，所以答案是0.5".

实际上，我们考虑样本空间 $\{(F, M), (F, F), (M, F), (M, M)\}$，其中 M 代表男，F 代表女，则其中一个女孩的前提下，有 $P(B)=\dfrac{3}{4}$，而 $P(AB)=\dfrac{1}{4}$，所以答案应该是 $P(A\mid B)=\dfrac{1}{3}$.

从上面我们可以知道，如果一个概率空间已经定义了一个概率，那么由一个 $P(B)>0$ 可以诱导出一个新的概率，我们很容易发现，这样的事情我们可以多做几次，比如我们先由 B_1，$P(B_1)>0$ 诱导出条件概率 $P(A\mid B_1)$，再取 B_2 使得 $P(B_2\mid B_1)>0$，我们可以

诱导出另外一个条件概率，我们把它记做

$$P(A \mid B_1B_2).$$

很容易知道我们可以一直这么做下去，满足中间过程中的概率大于0. 我们看一个例题：

例题5：一个盒子里有6个合格品和3个次品，不放回地取3个球，那么在前两个都是合格品的前提下，第三个是次品的概率为多少？

解：设 A_i 表示第 i 次取到的是合格品，则我们要求的是

$$P(\overline{A_3} \mid A_1A_2),$$

所以有

$$P(\overline{A_3} \mid A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2\overline{A_3})}{P(A_1A_2)} = \frac{3}{7}.$$

由条件概率的定义式，我们通过变形，就得到了乘法公式：

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B).$$

有时候，条件概率的直观性非常明显，而 A，B 同时发生的概率则并不明显，这时候我们就可以用乘法公式来计算 $P(AB)$ 了. 先看几个例题：

例题6：从 A 地到 B 地有3条陆路，2条水路，4条航空线，现有两个人同时从 A 出发去 B，但他们两人不愿意在一起，他们随机地从所有的线路中选一条，问两人都坐飞机的概率.

解：记 A_i 为第 i 个人坐飞机，则我们要求的是 $P(A_1A_2)$，由乘法公式有

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1).$$

而 $P(A_1) = \frac{4}{9}$，$P(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{8}$，所以有

$$P(A_1A_2) = \frac{1}{6}.$$

例题7：袋中有 a 个白球和 b 个红球，现依次不放回地取出两个，试求两次都取到白球的概率.

解：记 A_i 为第 i 次取到白球的概率，则我们要求的就是 $P(A_1A_2)$，由乘法公式有

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1),$$

而 $P(A_1) = \frac{a}{a+b}$，$P(A_2 \mid A_1) = \frac{a-1}{a+b-1}$，所以有

$$P(A_1A_2) = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

同样，我们可以像条件概率那样把这个乘法公式推广为：

定理(一般乘法公式)：设 A_1，…，A_n 是 n 个事件，满足 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

例题8：袋子里有1个白球和1个黑球，如果取出的是白球，则除了把白球放回外，再另外放一个白球进去，直至取出黑球为止，求取了 n 次都没有取出黑球的概率.

解：记 A_i 表示事件第 i 次取得白球，则要求的是 $P(A_1A_2\cdots A_n)$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}.$$

例题 9：某工厂有四条流水线生产同一种产品，这四条流水线的产品分别占总产量的 15%，20%，30% 和 35%，这四条流水线的不合格品率分别为 0.05，0.04，0.03，0.02. 现在从出厂产品中任取一件，问恰好抽到不合格品的概率是多少？

解：令 A = “抽到不合格品”，B_i = “抽到第 i 条流水线的产品”，则 B_i，$i=1, 2, 3, 4$ 构成完备事件组，故由全概率公式有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A\mid B_i)$$
$$=0.15\times0.05+0.20\times0.04+0.30\times0.03+0.35\times0.02$$
$$=0.0315.$$

1.4.3　贝叶斯公式

设事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 及 A 满足：

(1) $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两互不相容，$P(B_i)>0$，$i=1, 2, \cdots, n$；

(2) $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$，$P(A)>0$，

则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)},\ i=1, 2\cdots, n.$$

$P(B_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$ 通常叫先验概率；$P(B_i\mid A)$，$i=1, 2, \cdots, n$ 通常称为后验概率.

如果我们把 A 当作观察的“结果”，而 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 理解为“原因”，则贝叶斯公式反映了“因果”的概率规律，并作出了“由果朔因”的推断.

例题 10：用甲胎蛋白法普查肝癌，令

A = “甲胎蛋白检验结果为阳性”

B = “被检查者患肝癌”

则由过去的资料，已知

$$P(A\mid B)=0.95,\ P(\bar{A}\mid\bar{B})=0.90.$$

又已知某地居民肝癌发病率为 $P(B)=0.0004$，在普查中查出一批甲胎蛋白检验结果为阳性的人，求这些人真的患有肝癌的概率 $P(B\mid A)$.

解：由贝叶斯公式有

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\bar{B})P(A\mid\bar{B})}$$
$$=\frac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+0.9996\times0.1}$$
$$=0.0038.$$

由此可知，经甲胎蛋白法检验为阳性的人群中，真正患有肝癌的人是很少的，因此即使结果为阳性，也不必太紧张．既然甲胎蛋白法的准确率很高（因为 $P(A \mid B)=0.95$，$P(\bar{A} \mid \bar{B})=0.9$），那为什么用该法诊断肝癌的人真正患有肝癌的可能性如此小呢？这是因为肝癌发病率 $P(B)$ 太小了，由上述解答过程可以看出

$$P(B \mid A)=\frac{0.95P(B)}{0.95P(B)+0.1(1-P(B))}$$

$$=\frac{0.95}{0.85+\frac{0.1}{P(B)}}.$$

故，$P(B \mid A)$ 是 $P(B)$ 的增函数，因此在肝癌高发区，即 $P(B)$ 较大的地方，上述方法是很有效的．这个例子给我们的重要启示是：后验概率的大小受先验概率的影响．这再一次说明了一个好的医生有较为准确的先验概率估计，从而使后验概率更为准确，从而诊断更加精确.

例题11：（狼来了的贝叶斯分析）设 A =“孩子说谎”，B =“孩子可信”，不妨设过去村民对这个孩子的印象（先验概率）为

$$P(B)=0.8,\ P(\bar{B})=0.2.$$

假设可信的孩子说谎的概率为 0.1，而不可信的孩子说谎的概率为 0.5，即

$$P(A \mid B)=0.1,\ P(A \mid \bar{B})=0.5.$$

于是在村民第一次被骗后（A 发生以后），根据贝叶斯公式，该小孩的可信度调整为

$$P(B \mid A)=\frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B)+P(\bar{B})P(A \mid \bar{B})}$$

$$=\frac{0.8\times 0.1}{0.8\times 0.1+(1-0.8)\times 0.5}$$

$$=0.444.$$

这表明第一次被骗后，这个小孩的可信度从原来的 0.8 调整为 0.444，即

$$P(B)=0.444,\ P(\bar{B})=0.556$$

在此基础上，若孩子再一次说谎，则村民对他的可信程度进一步改变为

$$P(B \mid A)=\frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B)+P(\bar{B})P(A \mid \bar{B})}$$

$$=\frac{0.444\times 0.1}{0.444\times 0.1+(1-0.444)\times 0.5}$$

$$=0.138.$$

这表明上了两次当以后，这个小孩的可信度从 0.8 下降到了 0.138，如此低的可信度，在第三次小孩呼叫“狼来了”时，村民还能信他吗？

1.5 事件的独立性

1.5.1 两个事件的独立性

设事件 A、B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A、B 是相互独立的；

若事件 A、B 相互独立，且 $P(A)>0$，则有

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

若事件 A、B 相互独立，则可得到 $\bar{A}$ 与 B、A 与 $\bar{B}$、$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也都相互独立；必然事件 Ω 和不可能事件 θ 与任何事件都相互独立；ϕ 与任何事件都互斥.

1.5.2 多个事件的独立性

设 A、B、C 是三个事件，如果满足两两独立的条件，

$$P(AB)=P(A)P(B);$$
$$P(BC)=P(B)P(C);$$
$$P(CA)=P(C)P(A).$$

并且同时满足

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

那么 A、B、C 相互独立. 对于 n 个事件类似.

1.5.3 伯努利试验

我们做了 n 次试验，且满足：

(1) 每次试验只有两种可能结果，A 发生或 A 不发生；

(2) n 次试验是重复进行的，即 A 发生的概率每次均一样；

(3) 每次试验是独立的，即每次试验 A 发生与否与其他次试验 A 发生与否是互不影响的.

这种试验称为伯努利概型，或称为 n 重伯努利试验.

用 p 表示每次试验 A 发生的概率，则 $\bar{A}$ 发生的概率为 $1-p=q$，用 $P_n(k)$ 表示 n 重伯努利试验中 A 出现 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

例题 12：设一天内到图书馆的人数恰好为 k 的概率是 $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 其中 $\lambda>0$ 为常数，而每位同学借书的概率为 p，且相互独立，求证：借书的人数恰好为 r 的概率是 $\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}$.

证明：令 $A_k=$"到图书馆的人数恰好为 k"，$A=$"借书的人数恰好为 r"，则在 A_k 发生的条件下，这 k 个人借书是否为 r 是一个伯努利概型，有

$$P(A\mid A_k)=C_k^r p^r q^{k-r}.$$

这里我们规定 $C_k^r=0$ 若 $k<r$，则显然有 A_i，$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 构成了一个完备事件组，所以由全概率公式有

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(A \mid A_k) P(A_k) \\
&= \sum_{k=r}^{\infty} C_k^r p^r q^{k-r} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{(\lambda p)^r e^{-\lambda}}{r!} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(\lambda q)^{k-r}}{(k-r)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^r e^{-\lambda}}{r!} e^{\lambda q} \\
&= \frac{(\lambda p)^r}{r!} e^{-\lambda p}.
\end{aligned}
$$

三、疑难问答

1. 样本空间的选取是否唯一？

答：对于一个随机试验而言，样本空间不是唯一的，样本空间的形成取决于你观察结果以后记录结果的方式．比如投掷硬币，一次投掷结果结束以后，你既可以把硬币是正面或反面作为记录结果，而形成一个 0 - 1 分布；另一方面，你也可以记录硬币从离开手到落地所用的时间，这同样可以形成一个样本空间．可见样本空间的形成从某种意义上是由观察者的观察目的确定的.

2. 如何理解频率？

答：频率是现实中的试验结果，由第五章的大数定律我们会知道，频率一定会在概率附近上下波动，频率是一个近似值.

3. 怎么确定随机事件的等可能性？

答：等可能性是古典概型的两大假设之一，是一个理想化的假设．这个假设通常并不客观正确，而是人们的一种对称性感觉，进一步讲，是人们认为“名字”不会对结果产生影响．比如投掷骰子，我们自然地认为每一面朝上的几率是相等的，我们说 1 朝上的概率是 1/6，因为其他面和 1 除了数字不同之外，其他的都是一样的，所以我们认为每一面都是一样的，所以结果就是 1/6 了.

4. 何时应用全概率公式或者贝叶斯公式？

答：若所要求的概率的事件由先后两个事件构成，且这两个试验彼此关联，第一个试验结果会影响第二个结果，这时通常可以用全概率公式.

若已知某事件已经发生，要求在该事件发生的条件下样本空间的一个划分中某个事件发生的概率，则可以用贝叶斯公式.

全概率公式的本质是从原因求结果，而贝叶斯公式是从结果逆推原因，这两者还是非常好区分的.

5. 实际应用中，我们如何判断事件的独立性？

答：实际应用中，我们基本上是依靠实际经验判断事件是否独立的，而不是使用独立性定义的公式.

四、习题解答

习题一

基本题

1. 求下列试验的样本空间.

(1) 将一枚硬币抛掷三次，观察正面出现的次数；

(2) 一射手对某目标进行射击，直到击中目标为止，观察其射击次数；

(3) 在单位圆上任取一点，记录它的坐标；

(4) 在单位圆上任取两点，记录它们的坐标；

(5) 投掷一枚均匀的骰子两次，记录点数之和；

(6) 将一尺之棰折成三段，观察各段的长度；

(7) 观察某医院一天之内前来就诊的人数.

解：所谓样本空间，就是随机试验所有可能的结果组成的集合.

(1) 观察正面出现的次数可能为0，1，2，3次

故 $$\Omega=\{0,1,2,3\}.$$

(2) 射手首次射中目标所经历的射击次数可能为1，2，3，… 次

故 $$\Omega=\{1,2,3,\cdots\}.$$

(3) 采用极坐标系，$\Omega=\{(r\cos\theta, r\sin\theta); 0\leqslant r<1, \theta\in[0,2\pi)\}$.

若采用直角坐标系，$\Omega=\{(x,y); x^2+y^2<1\}$.

(4) 因为两点的最大距离即为直径(但取不到，只能趋近)，最短距离为0(取不到)，故单位圆内任取两点距离，样本空间为 $\Omega=\{0<x<2\}$.

(5) 两次点数之和从2，3，… 直到12都可取到

故 $$\Omega=\{2,3,\cdots,12\}.$$

(6) 记三段分别为 x、y、z 长度(尺)

则 $$\Omega=\{(x,y,z), 0<x,y,z<1, x+y+z=1\}.$$

(7) 医院一天内前来应诊的人数可以为0，1，2，…

故 $$\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

2. 设 A，B，C 为三个事件，用 A，B，C 的关系运算表示下列各事件：

(1) A，B 都发生，但是 C 不发生；

(2) A 发生，且 B，C 至少发生一个；

(3) A，B，C 至少有一个发生；

(4) A，B，C 恰好只发生一个；

(5) A，B，C 至少有两个发生；

(6) A，B，C 全不发生.

解：以第一题讲方法，把题目翻译成集合论语言即可.

此题的意思是 A 发生且 B 发生且 C 不发生，故得 $AB\bar{C}$，以下同理.

(1)$A(B\cup C)$

(2)$A\cup B\cup C$

(3)$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\overline{AB}C$

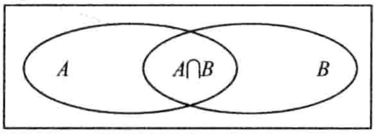
(4)$AB\cup AC\cup BC$

(5)$\overline{ABC}$.

3. 设 $P(A)=x$，$P(B)=y$，$P(AB)=z$，用 x，y，z 表示下列事件的概率：

$$P(\bar{A}\cup\bar{B}),\ P(\bar{A}B),\ P(\bar{A}\cup B),\ P(\bar{A}\bar{B})$$

解：



①$\bar{A}\cup\bar{B}$ 表示 $\bar{A}$ 或 $\bar{B}$ 发生

因为　$P(AB)+P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$，故 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-z$

②$\bar{A}\cdot B$ 表示 $\bar{A}$ 发生且 B 发生

因为　$P(\bar{A}B)+P(AB)=P(B)$，故 $P(\bar{A}B)=y-z$

③$\bar{A}\cup B$ 表示 $\bar{A}$ 发生或 B 发生

因为　$P(\bar{A}\cup B)+P(A)-P(AB)=1$，故 $P(\bar{A}\cup B)=1-x+z$

④$\bar{A}\cdot\bar{B}$ 表示 $\bar{A}$ 发生且 $\bar{B}$ 发生

因为　$P(\bar{A}\bar{B})+P(A)+P(B)-P(AB)=1$，故 $P(\bar{A}\bar{B})=1-x-y+z$.

4. 设随机事件 A，B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别为 0.4，0.3，0.6，求 $P(A\bar{B})$.

解：$A\cdot\bar{B}$ 表示 A 发生且 $\bar{B}$ 发生，由第三题韦恩图，我们可以得到等式

$$P(A\bar{B})+P(B)=P(A\cup B)$$

$$\Rightarrow\quad P(A\cdot\bar{B})=P(A\cup B)-P(B)$$

代入

$$P(A\cup B)=0.6,\ P(B)=0.3$$

$$\Rightarrow\quad P(A\cdot\bar{B})=0.6-0.3=0.3.$$

5. 设 A，B 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$.

解：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

而

$$P(\overline{A\cdot B})=1-P(AB)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}P(\overline{AB})&=1+P(A-B)-P(A)\\&=1+0.3-0.7\\&=0.6.\end{aligned}$$