普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

大学数学竞赛教程

吴 洁 主编

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

大学数学竞赛教程

主　编　吴　洁
编　者　吴　洁　何　涛　罗德斌
董　锐　王德荣

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容提要

本书是依据全国大学生数学竞赛(非数学专业)高等数学竞赛大纲,为正在准备竞赛的大二及以上本科学生编写的一本辅导书。它既可作为竞赛培训教材,也可作为自学教程,还可作为考研复习的参考书。

考虑到竞赛的特点,全书通过13讲对高等数学课程内容进行了分类整合,每一讲包括内容概述、典型例题分析、精选备赛练习、答案与提示4个部分,其中典型例题分析按题型给出了解题策略和方法。详细分析解题思路,引导学生思考,是每一讲的核心内容。为了使读者了解大学生数学竞赛(非数学专业)的难度,在附录中给出了近5年全国大学生数学竞赛(非数学专业)试题与解答(预赛、决赛)。

本书注重数学思想的渗透与解题方法的指导,内容覆盖面广、针对性强。实践证明,本书能使读者在较短时间内融会贯通高等数学的概念、理论,提高分析问题的水平和解题能力,从容面对竞赛。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学竞赛教程/吴洁主编. —武汉:华中科技大学出版社,2014.5
ISBN 978-7-5680-0021-5
Ⅰ.①大… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第100147号

大学数学竞赛教程 吴 洁 主编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:江 津
封面设计:潘 群
责任校对:马燕红
责任监印:周治超
出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)81321915
录 排:武汉市洪山区佳年华文印部
印 刷:华中理工大学印刷厂
开 本:710mm×1000mm 1/16
印 张:20
字 数:425千字
版 次:2014年7月第1版第1次印刷
定 价:45.00元

华中出版

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务

前 言

全国大学生数学竞赛是从2009年开始举办的全国性高水平学科竞赛，其目的是促进高等学校数学课程改革与建设，增强大学生学习数学的兴趣，培养大学生的创新精神和分析问题、解决问题的能力。

为了让参赛学生有一本合适的指导书，编者从2009年7月开始编写《竞赛培训资料》，随后在首届全国大学生数学竞赛培训中投入使用。《竞赛培训资料》被学生们称之为"经典"，并使学生在竞赛中取得了优异成绩。几年来，编者结合竞赛实践，反复修改，不断完善，形成了本书现在的面貌。

本书共13讲，每一讲包括内容概述、典型例题分析、精选备赛练习、答案与提示4个部分，在典型例题分析中详细阐述了数学思想与解题方法。第1、2、3讲由吴洁编写，第4、8、9讲由何涛编写，第5、6、10讲由罗德斌编写，第7、11、12讲由董锐编写，第13讲由王德荣编写。吴洁进行全书的统稿。

本书在编写过程中参考了大量国内外优秀的教材，引用了部分全国硕士研究生入学统一考试的数学试题以及竞赛试题，特此说明。

编 者

2014年3月

目　　录

第 1 讲　函数极限

1.1　内容概述

本讲的主要内容是一元函数的极限，包括求 7 种未定式（$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型，$0\cdot\infty$型，$\infty-\infty$型，1^{∞}型，0^{0}型，∞^{0}型）的极限；证明极限存在或估计极限的范围；无穷小量、无穷大量的比较与无穷小量、无穷大量的阶；已知某极限求另一极限或求其中的参数等。极限的四则运算法则、复合函数极限法则、连续函数定义以及重要极限将贯穿于求极限的始终，常用的求极限的方法有等价无穷小替换、洛必达法则、泰勒公式、导数的定义、夹挤准则、极限的保号性等。

1.2　典型例题分析

【题型 1-1】 $\frac{0}{0}$**型极限**

策略　在一定条件下，$\frac{0}{0}$型极限可以直接使用洛必达法则，对较高方次的问题要考虑用泰勒公式。使用洛必达法则之前要用恒等变形、等价无穷小替换、分项等方法将极限式尽量化简，对极限非零的因式（注意是因式，不是项）可以按乘积运算法则先求出结果，剩下部分再另行处理。

例 1-1　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^2\sin x}$。

分析　分母中出现了两项之积，宜先用等价无穷小替换化简，再用洛必达法则。

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$（$\sin x\sim x,x\to 0$）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}\text{（利用三角恒等式）}=-\frac{1}{3}。$$

注　如果不用其他工具，连用 3 次洛必达法则可以得出结论：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sec^2 x\tan x}{(2-x^2)\sin x+4x\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x}{-2x\sin x+(2-x^2)\cos x+4\cos x-4x\sin x}=-\frac{1}{3}。$$

但上述运算较为复杂，容易出错。因此当使用洛必达法则出现复杂的计算时，一定要

思考能不能在使用洛必达法则前先用其他方法将其化简。

例 1-2　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$。

分析　对于含根式的极限问题，通常可以先进行有理化，使恒等变形后的表达式中带根式的因子的极限不为零，且能对其单独求极限。

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)-x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\ln(1+x)-x}$$（对$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$单独求极限，并作恒等变形）

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$$（对$\dfrac{\sin x}{x}$单独求极限，作恒等变形）

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{1}{1+x}-1}$$（对$\dfrac{1}{\cos x}$单独求极限，对第二个因式用洛必达法则）

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot(1+x)=-\frac{1}{2}。$$

例 1-3　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$。

分析　对分母用等价无穷小替换化简；对分子先用三角恒等式降次，再利用泰勒公式，从而规避对两项之积求导。

解　利用$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$以及$\sin^2 x\sim x^2$，$x\to 0$，

$$原式=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)-x^2(1+\cos 2x)}{x^4},$$

再由泰勒公式：

$$(1-\cos 2x)-x^2(1+\cos 2x)=1-\left[1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)\right]-x^2\left(1+1-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)$$
$$=2x^2-\frac{16}{24}x^4-2x^2+2x^4+o(x^4),$$

所以
$$原式=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{2}{3}。$$

思考　有人说，因为$x\to 0$时，$\cos^2 x\to 1$，因此$x^2\cos^2 x\sim x^2$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}。$$

这样做对吗？为什么？

例 1-4　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}$。

分析　如果直接用洛必达法则，那么幂指函数的求导将会带来复杂的计算，因此宜先将幂指函数化为指数函数；注意到其中一部分的极限是易求的，因此可分项分别求极限。

解　因　$\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}=\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2-e^2\ln(1+x)}{x}$，

且
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^2(\ln(1+x))}{x}=e^2,$$

而$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}$

$$=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}\text{（利用 }e^{\square}-1\sim\square\text{，当}\square\to 0\text{ 时）}$$

$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}=-e^2,$$

所以原式$=0$。

例 1-5　设 $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=1$，求
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}。$$

分析　由 $f'(1)=1$ 得$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=1$，其中 h 可以是任何趋于0的变量，于是可以通过导数的定义将抽象函数的极限问题转化为具体函数的极限问题。

解　因

原式$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)+f(1+2\sin x)-f(1)-2[f(1-3\tan x)-f(1)]}{x}$，

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=f'(1)=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2\sin x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2\sin x)-f(1)}{2\sin x}\cdot\frac{2\sin x}{x}=2f'(1)=2,$$

$$-2\lim_{x\to 0}\frac{f(1-3\tan x)-f(1)}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{f(1-3\tan x)-f(1)}{-3\tan x}\cdot\frac{-3\tan x}{x}=6f'(1)=6,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}=9。$$

例 1-6　设 $F(x)=\int_0^{x^2}t\sin(x^2-t^2)\,dt$，求$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}$。

分析　本题可以用两种方法求解，一是用洛必达法则，注意在求导前需要将积分号内的 x 变到积分限上；二是考虑到此时积分简单，可以将 $F(x)$先求出来，再求极限。

解　**方法一**　令 $x^2-t^2=u$，则$-2t\,dt=du$，且 $t=0$ 时，$u=x^2$；$t=x^2$ 时，$u=x^2-x^4$，于是

$$F(x)=-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{x^2-x^4}\sin u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{x^2-x^4}^{x^2}\sin u\mathrm{d}u,$$

所以
$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^2-(2x-4x^3)\sin(x^2-x^4)}{4x^3}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2-(1-2x^2)\sin(x^2-x^4)}{x^2},$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-2x^2)\sin(x^2-x^4)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-2x^2)(x^2-x^4)}{x^2}=1$,

所以
$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^4}=0。$$

方法二 因 $F(x)=\int_0^{x^2}t\sin(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\sin(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)$

$$=\frac{1}{2}\cos(x^2-t^2)\Big|_0^{x^2}=\frac{1}{2}[\cos(x^2-x^4)-\cos x^2]$$
$$=\sin\frac{x^4}{2}\sin\left(x^2-\frac{x^4}{2}\right)\quad（利用三角恒等式）,$$

所以
$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x^4}{2}\sin\left(x^2-\frac{x^4}{2}\right)}{x^4}=0。$$

例 1-7 设 $f(x)$在 $x=0$ 处有 3 阶导数,且 $f(0)=0,f'(0)=0,f''(0)=2,f'''(0)=3$,求$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x^2}{x^3}$。

分析 因 $f(x)$在 $x=0$ 处有 3 阶导数,且有函数值与各阶导数值的信息,故宜对 $f(x)$用泰勒公式。

解 由泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)=x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$$

于是
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)-x^2}{x^3}=\frac{1}{2}。$$

注 该题也可以用洛必达法则:

原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)-2}{6x}=\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\frac{1}{6}f'''(0)=\frac{1}{2}$。

思考 以下做法为什么是错的?

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)-2}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{f'''(x)}{6}=\frac{1}{2}。$$

【题型 1-2】 $\frac{\infty}{\infty}$型极限

策略 求$\frac{\infty}{\infty}$型极限的常用方法仍然是洛必达法则,了解推广的洛必达法则(分

子→∞这一条件可以省去，结论不变）会给计算带来方便；有时要用到无穷大量的倒数是无穷小量、恒等变形或等价代换、夹挤准则等。

例 1-8　求 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\ln\sin\dfrac{\pi x}{2}-\ln\cos\dfrac{\pi x}{2}}$。

分析　对分母用恒等变形合并，再用洛必达法则。

解　原式 $=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\ln\tan\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-1}{1-x}\cdot\tan\dfrac{\pi x}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\pi x}{2}\cdot\dfrac{2}{\pi}$

$$=-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1^-}\frac{\sin\pi x}{1-x}=-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1^-}\frac{\pi\cos\pi x}{-1}=-1。$$

注　用洛必达法则化简后 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sin\pi x}{1-x}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ 型。

例 1-9　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{1/t}-1)-t]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$。

分析　先利用等价无穷小替换化简分母，再用洛必达法则以及泰勒公式。

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{1/x}-1)-t]dt}{x}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x},x\to+\infty\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{1/x}-1)-x]$（利用推广的洛必达法则）

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-1\right)-x\right]\left(e^{1/x}=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$

$=\dfrac{1}{2}$。

注　(1) 一时不太容易判断是否有 $\int_1^x[t^2(e^{1/x}-1)-t]dt\to\infty$，而推广的洛必达法则正好可以应对此类问题。

(2) 对 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{1/x}-1)-x]$，令 $u=\dfrac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{1/x}-1)-x]=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}。$$

(3) 一开始就使用洛必达法则，则

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(e^{1/x}-1)-x}{2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+x^2\cdot\dfrac{1}{1+1/x}\cdot\dfrac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(e^{1/x}-1)-x}{2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{x}{1+x}},$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=2$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x}=1$，所以原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{1/x}-1)-x]$，余下解法与前面解法相同。

例 1-10 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$。

分析 本题不适合直接使用洛必达法则。注意到当 $x\to-\infty$ 时，$\sqrt{x^2}=|x|=-x$，将其提出，便可以利用无穷大量的倒数是无穷小量，以及极限的四则运算法则。

解 原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1$。

【题型 1-3】 $\infty-\infty$ 型与 $0\cdot\infty$ 型极限

策略 $\infty-\infty$ 型可利用通分转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型；$0\cdot\infty$ 型视具体情况转化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型。

例 1-11 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$。

分析 这是 $\infty-\infty$ 型极限。通分之后先用等价无穷小替换化简分母，注意到分子是平方差，故可以考虑分组求极限。

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x\cos x}{x}\cdot\frac{x-\sin x\cos x}{x^3},$$

而
$$\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x\right]=2,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin2x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{3x^2}=\frac{2}{3},$$

所以原式$=\dfrac{4}{3}$。

例 1-12 求 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq0)$。

分析 在判断类型的过程中可以发现 $a^2\ln(1+ax)$ 的极限易求，剩余部分是 $\infty-\infty$ 型极限，因此分项求极限。

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+ax)+a^2\ln(1+ax)\right]$，因 $\lim\limits_{x\to0}a^2\ln(1+ax)=0$，又

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1+ax)\right]=\lim_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{ax-ax+\frac{1}{2}a^2x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{a^2}{2},$$

所以 原式$=\dfrac{a^2}{2}$。

例 1-13 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$。

分析 这是$\infty-\infty$型极限。欲变形为$\frac{0}{0}$型，可先作代换$x=\frac{1}{t}$，然后用泰勒公式简化分子。

解 令$\frac{1}{x}=t$，则原式$=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(2-2t+t^2)e^t-2\sqrt{1+t^6}}{2t^3}$，而

$$\begin{aligned}(2-2t+t^2)e^t-2\sqrt{1+t^6}&=(2-2t+t^2)\left[1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right]-2\left[1+\frac{t^6}{2}+o(t^6)\right]\\&=2+2t+t^2+\frac{t^3}{3}-2t-2t^2-t^3+t^2+t^3-2+o(t^3)\\&=\frac{t^3}{3}+o(t^3),\end{aligned}$$

所以 原式$=\frac{1}{6}$。

例 1-14 求$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$。

分析 这是$0\cdot\infty$型极限。为避免导数计算的复杂性，应变形为$\frac{0}{0}$型并作代换$x=\frac{1}{t}$。

解 令$x=\frac{1}{t}$，则

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{1/x^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\sin t\right)}{t^2}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\sin t}{t}-1}{t^2}\text{（利用 }\ln\square\sim\square-1\text{，当}\square\to1\text{ 时）}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\cos t-1}{3t^2}=-\frac{1}{6}。\end{aligned}$$

例 1-15 求$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]$。

分析 这是$0\cdot\infty$型数列极限。先将其化为$\frac{0}{0}$型，再用洛必达法则求相应函数的极限，然后将数列作为函数的特例得出结论。特别提醒，对数列极限不可直接用洛必达法则。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e}{\frac{1}{n}}$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=e\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\mathrm{e}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{\mathrm{e}}{2},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right]=-\frac{\mathrm{e}}{2}。$$

【题型 1-4】 1^∞ **型、**0^0 **型和**∞^0 **型的极限**

策略 对于 1^∞ 型、0^0 型和 ∞^0 型这三种幂指形式的未定式，通常利用公式 $f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$，以及指数函数的连续性，将其转化为求 $\lim g(x)\ln f(x)$，这是 $0\cdot\infty$ 型未定式；若 $\lim f(x)=1$，利用 $\ln\square\sim\square-1$（当 $\square\to1$ 时），$\lim f(x)^{g(x)}=\exp\lim g(x)\ln f(x)=\exp\lim g(x)[f(x)-1]$。

例 1-16 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}$。

分析 这是 1^∞ 型极限。利用公式 $\lim f(x)^{g(x)}=\exp\lim g(x)[f(x)-1]$ 将其化为 $\frac{0}{0}$ 型极限问题。

解 原式
$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]$$
$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\text{（利用 }\mathrm{e}^x-1\sim x\text{，当 }x\to0\text{ 时）}$$
$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}。$$

思考 有人一开始就作等价替换 $\ln(x+1)\sim\mathrm{e}^x-1$，将原式变为 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}$，有根据吗？

例 1-17 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a>0$，$a\neq1$。

分析 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}(a^x-1)^{\frac{1}{x}}$，其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$ 可以直接求极限，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ 是 0^0 型，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x-1)^{\frac{1}{x}}$ 则依 $a>1$ 和 $a<1$ 分别为 ∞^0 型和 0^0 型。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}(a^x-1)^{\frac{1}{x}}$，

因
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}=1;\quad\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{x}=\mathrm{e}^0=1,$$

而当 $a>1$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty}(a^x-1)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x-1)}{x}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{a^x-1}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a}{1-\frac{1}{a^x}}=\mathrm{e}^{\ln a}=a,$$