高等学校教材

高等数学

（初稿）

上册

朱公谨　编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

（初稿）

上册

朱公谨　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书由高等教育部委托交通大学数学教研组朱公谨教授编写。可作为高等工业学校320到380学时类型的高等数学课程的教学用书。因编写时间短促，没能广泛征求意见，先作为初稿出版；希有关方面提出意见，供再版时修正的参考。

本书于1958年出版，恰逢高等教育出版社建社60周年，甲午重印，以飨读者。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:初稿.上册/朱公谨编. --北京:高等教育出版社,2014.7

ISBN 978-7-04-039754-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第086000号

策划编辑 蒋 青 责任编辑 蒋 青 封面设计 杨立新 版式设计 王艳红
插图绘制 郝 林 责任校对 刘娟娟 责任印制 张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京市四季青双青印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	850mm×1168mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印 张	12.5	版 次	2014年7月第1版
字 数	320千字	印 次	2014年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	25.90元

物 料 号 39754-00

出版说明

1954年5月，高等教育出版社正式成立。60年来，在教育部领导的关怀下，在数学教育工作者的支持下，高教社出版了众多数学教材，可谓群贤毕至，精品迭出，伴随着青年学子们度过了难忘的大学时光。

由于各种原因，部分优秀教材没有机会再版或重印。这其中有我国第一部高等数学教学大纲的制定者朱公谨先生编写的《高等数学(初稿)》；教材编审委员会主任赵访熊先生主编的《高等数学》；西安交通大学陆庆乐先生主编的《高等数学(基础部分)》；清华大学程紫明主编的《高等数学(基础部分)》；还有项武义先生的《微积分大意》，谷超豪、李大潜、沈玮熙的《应用偏微分方程》，吴大任先生的《微分几何讲义》(修订版)，北京大学的《数学分析》及其习题集……这些教材，不仅是数学专家、广大数学教师的教学经验的积累，也是历届数学教材编审委员会的集体智慧的结晶，更是各个时期数学教学改革的成果代表，它们呈现了数学教材建设的真实历史，深深影响了几代人。

虽然这些教材出版时间较早，但从数学学科的发展和教学改革的趋势来看，它们对现在的数学课程教学仍然有一定的借鉴意义。为了使广大读者能够对比各时期高校数学教学要求、教学内容体系的变迁，更好地传承数学的教学思想、教学方法，促进当前数学教学改革，提高教学质量，我们遴选了60年来具有代表性的经典数学教材进行重新印刷。

这套教材的重版，牵动各方专家的关注，凝结了很多前辈的厚

爱和支持。在联系原作著作权人的过程中，西安交通大学马知恩教授、上海交通大学乐经良教授、清华大学盛祥耀教授都给予了我们帮助。已故作者的子女也积极地配合我们工作。高等教育出版社的郭思旭编审从选题到提供样书给予了很大帮助，胡乃冏、徐刚编审提供了部分资料和样书，王雎老师为这套书的封面从选纸到配色做了精美的设计，使得这套教材不仅保持了原有的风貌，更融入了现代元素。

在本套教材的重版编辑过程中，我们克服了重重困难，本着古建筑修复中“整旧如旧”的原则，尽管这套书中提及的有些算法已经不再用了，我们仍然保留了这些部分，以求保持经典教材的原汁原味，仅做了规范方面的微小改动。重温经典，不仅让老专家、老前辈们抚今追昔，也让我们倍感自豪和使命感，我们还会进一步增加重版的品种，奉献给读者更多优秀教材。

由于本套教材的重版在较短时间内完成，虽竭尽全力，疏漏之处在所难免，恳请各位专家和广大读者批评指正。

高等教育出版社

2014 年 4 月

目　录

绪 论

我们今天来到大学，开始学习高等数学的时候，首先要问一问，高等数学与初等数学有什么不同？这中间的区别，可从两方面来了解，第一，从研究的对象来说：初等数学所研讨的是常量，而高等数学主要是以变量作为研究的对象。在初等代数学和几何学中所遇见的，是固定的数值以及不变的图形。例如有了一个代数方程，如何求得满足这方程的常数（方程的根）；或者看了一些几何图形，而后考察它们所有的特性，再反过来，讨论如何作出具有某些特性的图形。总之，不外乎是不变的形象。但应特别指出，变量的引用，是数学史上一件大事。恩格斯写道："笛卡儿①的变量是数学中的转折点。因此，运动和辩证法便进入了数学，因此微分和积分也就立刻成为必要的了"②。由于解析几何学中曲线性质的研究，同时又由于现实界中运动问题的要求，莱布尼茨③和牛顿④各自独立地建立了微积分学。自此以后，随着生产事业的不断发展，高等数学遂一日千里，百花齐放。这对于各种科学的影响，是非常巨大的。事实上，现实世界中事物相依而变的规律性，通过高等数学的方法，才能得到精确的反映。伽利略⑤早就说过："自然

---

① 笛卡儿（R. Descartes，1596—1650），著名法国哲学家、物理学家、数学家和生理学家，其《几何学》一书奠定了解析几何学的基础。

② 恩格斯《自然辩证法》，人民出版社 1955 年版第 217 页。

③ 莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646—1716），德国大数学家和唯心主义哲学家。

④ 牛顿（I. Newton，1642—1727），天才的英国物理学家、力学家、天文学家和数学家。

⑤ 伽利略（Galileo Galilei，1564—1642），伟大的意大利天文学家、物理学家与力学家。

规律,要用数学语言来记录。"恩格斯也曾指出:"要辩证而唯物地了解自然,就必须熟悉数学和自然科学。"①应用高等数学中变量研究的结果来了解自然,不但可以解释过去,还能预见未来;从而掌握自然,并利用自然为人类大众谋幸福。

第二,从研究的方法来看,初等数学中的推证步骤,依据形式逻辑,是非常正确而周密的。但总的说来,初等数学的解决问题,是个别的、零碎的、点点滴滴的。高等数学却不然,它用辩证唯物的观点,全面而生动地来看各种关系。它从高远的观点,提出普遍性的问题,用有力的工具,深刻而彻底地予以解决。例如,在初等数学中,我们知道一个三角形或一个圆的面积怎样计算。高等数学不是这样零星地来讨论面积问题,却很普遍地假定有一条某些特性的曲线,从而研究它所围成的区域怎样度量的方法。应用函数与极限概念,这一包罗广泛的问题可得到圆满的解决。这样,一个普遍问题解决之后,就有许多问题随着同时得解。这与近代机械化工业的大量生产可以互相比拟,其规模的浩大,气魄的雄伟,将来自能体会,不必在这里多说。

前面的说明,我们希望不要引起一种很容易产生的错觉,以为精深的高等数学必然很难学,或者是少数人的嗜好。如果这样想法,真是大大的错误,高等数学绝对不是少数人凭空创造出来的,它是为适应大众需要,与实际密切相结合的。恩格斯曾说:"纯粹数学的研究对象是现实世界中的空间形状与数量关系,因此,是非常实在的资料。因为这些资料以最高度的抽象形式出现,可能把它们来自外界的起源掩藏起来,但这种掩藏,即使可能,只是浅薄而表面的。要纯粹地来研究这种空间形状与数量关系,我们必须把它们与其内容完全分离,把这里看作无关紧要的内容完全抽掉。"②这几句话不但明确地说出了数学研究的对象,阐明了数学

① 恩格斯《反杜林论》,第二版序,参看三联书店 1953 年版第 48 页。

② 恩格斯《反杜林论》,参看三联书店 1953 年版正文第 35 页。

与现实的密切联系，而且特别指出了数学的高度抽象性，更要注意防止人们见了数学对象的抽象而对于数学认识来自外界的起源有所怀疑。这样一来，就给唯心论者以致命的打击，为数学树立起辩证唯物的科学观，其意义是非常重大的。我们应该知道，所谓抽象，决不是远离实际，相反地，必须从现实的事物，从事分析和抽象。从现实事物，抽掉个别的内容而保留基本的特性，愈抽愈净，抽象的结果愈普遍则应用的范围自然愈广。关于数学理论与实践的关系，切比雪夫[①]说得好："理论与实践相接近会产生最良好的结果，而得到益处的不只是实践；科学本身就在实践的影响下发展起来：实践替科学揭露出新的研究对象或旧时已知对象的新的方面……如果，由于旧方法的新应用或新发展，理论得到了很多益处的话，那么，由于新方法的发明，理论将获益更多，而在这样的情况下，科学便在实践中找到了正确的引导者。"再就高等数学的体系来看，是有条不紊，系统严密的。对于一种现象，如能明白它的系统或规律，就可懂得其所以然的道理，不会觉得稀奇难解；因此，从这一角度来看，高等数学不像初等数学那样繁琐零乱，学起来反觉得容易。

我国是世界上文化发达最早的国家之一。远在公元前 100 年左右，已有《周髀算经》与《九章算术》，可说是数学史上极古的两种作品。这两部书，后来经过好多次整理，现在所保存的《九章算术》，是刘徽（于公元 263 年）所编注的。刘徽对圆周率的创造做出了很多贡献。他已见到圆内接正多边形的边数愈多，愈和圆周密切贴合；所以先由圆内接 6 边形起算，再算 12，24，48，96 各边形，算到内接 96 边形，便已经知道 $\pi = 3.14\frac{64}{125}$[②]。后来南北朝宋

① 切比雪夫（П. Л. Чебышев，1821—1894），俄罗斯大数学家、彼得堡数学学派的奠基人。

② 见李俨："中国数学发展情形"，载新华月报 1955 年 11 号第 227—232 页。

代的祖冲之(429—500)按刘徽的步骤逐步推广,并为应当时的需要,将所算得的 π 改用分数登记,取两个分数,一为$\frac{22}{7}$,称为“约率”,一为$\frac{355}{113}$,称为“密率”。此项约率,在当时何承天(370—447)已有相同例子,以 $\pi=\frac{22}{7}$入算。至于密率,则较荷兰人奥托[①]在1573 年的计算几乎早一千年,这可说是一种值得惊异的成绩。

此外,我们祖先在几何学与代数学方面还有许多杰出的成就。例如,祖暅之(祖冲之的儿子)创造球体积的计算(计算得 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,r = 圆球半径)是公元 600 年前后的事。《九章算术》中有“方田”,“商功”各一章;“方田”讲田地面积的计算,“商功”讲立体几何形,所讲方法都是正确的。还有“勾股”一章,专论直角三角形的公理和应用。到后来由于生产建设上的要求,又不断地启发了特殊的二次、三次及联立一次方程的解开。最特出的,是天元术的创造,再由天元术发展到四元(即四个未知数)。为应演算上的需要,杨辉在 1261 年所介绍的方法就是三百九十年后才在欧洲出现的帕斯卡[②]三角形(时在 1654 年)。又秦九韶所著《数书九章》(时在 1247 年)中关于方程的解法与英国人霍纳[③]在 1819 年所发表的方法完全相同。秦九韶还有所谓“大衍求一术”,是用与欧几里得辗转相除法相似的方式来求解不定方程问题。宋金元时期的中国数学家,如朱世杰等,有所谓垛积、招差之术,就是现代的级数演算。还应提一提的,是算盘的发明,虽还未能确定何时,总当在 1439 年以前,这一为人民所乐用的工具在计算数学的历史上自有它的地位。

---

① 奥托(V. Otho,约 1550—1605)。

② 帕斯卡(B. Pascal,1623—1662),法国数学家、物理学家和哲学家。

③ 霍纳(W. G. Horner,1786—1837)。

明代以后,西洋数学被介绍到我国。徐光启与意大利人天主教士利玛窦[1]共译欧几里得《几何原本》前六卷(1606),后来又与李之藻等编译《同文算指》(1613),《圆容较义》(1609)等书。这种外来的刺激,理应促进我国数学的发展,但这时,明代的统治阶级极端腐化,对于精密科学,只有摧残而不知提倡。在长期的封建统治之下,生产建设,远落人后。再加以近百年来帝国主义的侵入,把我国人民压迫得无以为生,这对于科学的打击,当然是无法形容的。到现在,我国的社会主义建设突飞猛进,而政府对于科学的培养与奖励,无微不至,已使我国的数学研究迅速进展。我们深信,由于社会主义制度的优越性,我国的数学必有一异常灿烂的将来。

① 利玛窦(Matteo Ricci,1552—1610)。