普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学学习指导（下册）

杨雯靖　朱永刚　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学学习指导

(下册)

杨雯靖　朱永刚　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书分为上、下两册. 上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程; 下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数. 本书的内容按章编写, 与教材同步. 每章包括教学基本要求、内容概述、典型例题解析、习题选解及自测题五个部分.

本书适合普通高等院校理工科各专业学生使用, 也可供考研人员参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导. 下册/杨雯靖, 朱永刚主编. —北京: 科学出版社, 2014.3

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-039794-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨… ②朱… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 029410 号

责任编辑: 杨瑰玉/责任校对: 宣 慧
责任印制: 高 嵘/封面设计: 苏 波

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 3 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)
2014 年 3 月第一次印刷 印张: 20
字数: 391 100

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《高等数学学习指导(下册)》编委会

主　编　杨雯靖　朱永刚

副主编　杨元启　陈将宏　崔　盛

前　言

本书是与张明望、沈忠环、杨雯靖主编的普通高等教育“十二五”规划教材《高等数学》配套使用的学习指导书，主要面向使用该教材的教师和学生，同时可为学生提供同步指导，也可作为研究生入学考试的复习指导. 我们编写这本配套教材，既满足了学生学习高等数学课程的需要，又通过对教学内容的扩展和延伸满足了学生的深层次的要求.

上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程，下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数. 本书的内容按章编写，与教材同步. 每章包括教学基本要求、内容概述、典型例题解析、习题选解及自测题五个部分.

教学基本要求部分是根据教育部数学基础课程教学指导委员会制定的理工类本科高等数学课程的教学基本要求确定的，也是根据教学大纲的要求制定的.

内容概述部分有条理地将每一章的基本理论与方法逐一梳理，使读者能详细地了解每章的主要内容.

典型例题解析部分精选相关内容的基本题型，力图将高等数学的基本概念、定理、方法及应用融于其中，具有鲜明的特点. 例题的选择兼顾基本性与扩展性特点，考虑到理论与实际的结合. 例题中注重分析解题思路，寻求多种解题方法，并在例题后加以评注，进行总结及推广说明.

习题选解部分按照教材中的章节顺序，精选一部分习题作出了解答. 其中，每章的总习题在难度上略大一些，因而在习题选解中所占的比例相对较大.

作者在每章后附带三套自测题，便于读者在每章学习结束后自我检查. 自测题既涵盖了每章的相关内容，又考虑了题目的多样性和层次性的特点.

本书由杨雯靖和朱永刚主编. 参加编写的主要人员有杨元启和陈将宏，另外，崔盛等也参与了一部分后期的编写工作. 全书由杨雯靖负责统稿，朱永刚负责审阅.

三峡大学理学院、教务处和教材供应中心对本书的编写和出版给予了大力支持，对此我们表示衷心地感谢.

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正.

作　者

2013 年 5 月

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

一、教学基本要求

1. 理解空间直角坐标系, 理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积), 了解两个向量垂直、平行的条件及三个向量共面的条件.

3. 掌握单位向量、方向角与方向余弦、向量的坐标表达式, 以及用坐标表达式进行向量运算的方法.

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法, 会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.

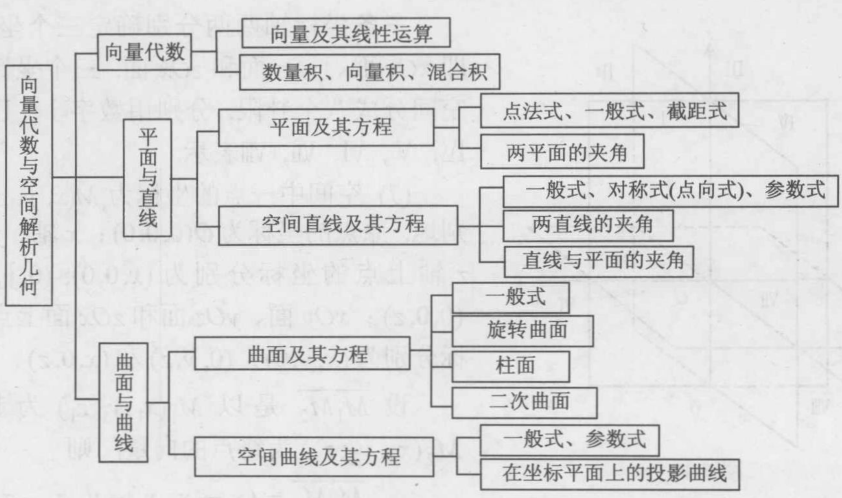
5. 理解曲面方程的概念, 了解常用二次曲面的方程及其图形, 会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

6. 了解空间曲线的参数方程和一般方程.

7. 了解空间曲线在坐标平面上的投影, 并会求其方程.

二、内 容 概 述

【知识框架】



【主要内容解读】

(一) 向量及其运算

1. 向量的概念

(1) 向量：既有大小又有方向的量，记为 $\vec{a}$ 或 $\boldsymbol{a}$.

(2) 向量的坐标表示：$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$.

(3) 向量的模：向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的大小，记为 $|\boldsymbol{a}|$，此时 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

(4) 向量的方向角与方向余弦：非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 与三个坐标轴的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，其中，

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},\quad 并且\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

(5) 单位向量：模为 1 的向量，记为 $\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 且 $\boldsymbol{a}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

(6) 空间直角坐标系.

在空间取定一点 O 和三个两两相互垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，就确定了三条以 O 为原点且两两垂直的数轴，依次称为 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴)，它们统称为坐标轴. 通常将 x 轴和 y 轴放置在水平面上，z 轴铅直放置. 三个轴的正方向符合右手规则，这样的三条坐标轴就构成了一个空间直角坐标系，如图 7-1 所示.

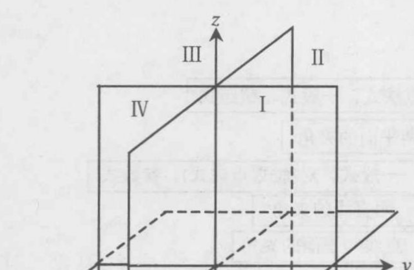


图 7-1

三条坐标轴两两分别确定三个坐标面，即 xOy 面、yOz 面和 zOx 面，三个坐标面将空间分成八个卦限，分别用数字Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ表示.

(7) 空间中一点的坐标为 $M(x, y, z)$. 特别地，原点的坐标为 $O(0,0,0)$；x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$；xOy 面、yOz 面和 zOx 面上点的坐标分别为 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$ 和 $(x,0,z)$.

设 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

两点间的距离公式为

$$|M_1M_2| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

(8) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影：$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$，其中 φ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴的夹角.

一般地，向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影 a_x，a_y，a_z 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 向量在 u 轴上的投影满足以下运算律：

(i) $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$；　　(ii) $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，投影向量为 $(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b})\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

2. 向量的运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，$\lambda$ 是一个数.

(1) 加减运算 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$.

(2) 数乘运算 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$，向量的数乘运算满足以下运算律：

(i) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu\boldsymbol{a})$；

(ii) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(3) 向量的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$，其中，$\theta$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，而且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$)，或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$).

向量的数量积满足以下性质和运算律：

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(ii) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(iii) 分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

(iv) 结合律 $\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$ (λ 为实数).

(4) 向量的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 按下列规则确定：

(i) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；

(ii) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系，其坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

向量的向量积满足以下性质和运算律:

(i) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$; (ii) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

(iii) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (λ 为实数);

(iv) 分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

向量积的模的几何意义:当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时,模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 就是以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积;当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时,模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 为零.

(5) 向量的混合积:

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

向量的混合积具有以下性质:

(i) $[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]$;

(ii) $[\boldsymbol{abc}]=-[\boldsymbol{bac}]$.

向量的混合积的几何意义:如果将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 平移至公共起点 O,并以它们为棱构成一个平行六面体,$|[\boldsymbol{abc}]|$ 就是该平行六面体的体积. 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成右手系时,混合积 $[\boldsymbol{abc}]>0$,否则 $[\boldsymbol{abc}]<0$.

3. 向量之间的关系

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$.

(1) 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等且方向相同,就称它们是相等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说经平移后能完全重合的向量是相等的.

(2) 方向相同或相反的向量称为平行向量. 把若干个平行向量的起点移至同一点,则它们的终点与公共起点都位于同一直线上,故也称这些向量是共线的. 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(共线),记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

(i) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$) $\Leftrightarrow$ 存在唯一的实数 λ,使

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

(ii) 向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 存在不全为零的实数 λ_1,λ_2,使得 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

(4) 把若干个向量平移到同一起点,如果它们的终点与公共起点都位于同一平面上,则称这些向量是共面的.

(i) 三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow [\boldsymbol{abc}]=0$.

(ii) 三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 λ,μ,γ，使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

(5) 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量时，两向量夹角余弦的坐标表示式为

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

(二) 空间平面与直线

1. 平面

(1) 平面的点法式方程：过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

(2) 平面的一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$.

(i) 当 $D=0$ 时，说明该平面通过原点.

(ii) 当 $A=0$ 时，方程 $By+Cz+D=0$ 表示一个平行于 x 轴的平面；当 $B=0$ 或 $C=0$ 时，方程 $Ax+Cz+D=0$ 或 $Ax+By+D=0$ 分别表示平行于 y 轴和 z 轴的平面.

特别地，方程 $By+Cz=0$，$Ax+Cz=0$ 和 $Ax+By=0$，则分别表示通过 x 轴、y 轴和 z 轴的平面.

(iii) 当 $A=B=0$ 时，方程 $Cz+D=0$ 表示一个平行于 xOy 面的平面；方程 $Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示一个平行于 yOz 面和 zOx 面的平面.

特别地，方程 $z=0$，$x=0$ 和 $y=0$，则分别表示 xOy 面、yOz 面和 zOx 面.

(3) 平面的截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，其中 a，b，c 分别称为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距，且 $abc\neq 0$.

(4) 平面的三点式方程：通过不在同一条直线上的三点 $M_k(x_k,y_k,z_k)$ $(k=1,2,3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

注　求平面方程时，要把握以下解题思路. ①用点法式方程；②求出平面上一点及与平面平行的两个不共线向量；③用平面束方程；④用一般方程.

求平面方程有如下基本题型：

(i) 过定点与一直线垂直的平面；

(ii) 过定点与一直线平行的平面；

(iii) 过定点与给定两直线平行的平面；

(iv) 过一定直线且垂直于一定平面的平面；

(v) 过两定点且平行于一条给定直线的平面；

(vi) 过两定点且垂直于一已知平面的平面；

(vii) 平行于一定直线且通过另一已知直线的平面.

2. 直线

(1) 直线的点向式(对称式)方程：过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 的直线方程为 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

(2) 直线的一般方程：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$ 其中，$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$.

(3) 直线的参数方程：过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 的直线方程为

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases} \quad \text{其中 } t \text{ 为参数.}$$

(4) 直线的两点式方程：过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

注　求空间直线方程时，要把握以下解题思路. ①一条直线可以看成两个不平行平面的交线；②已知直线上一点和它的方向向量，可求出直线的点向式方程或参数方程.

3. 点、直线与平面的位置关系

(1) 两平面的夹角.

两平面的法向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角. 设平面 Π_1 和 Π_2 的

法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，则平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 由下式确定：

$$\cos\theta=\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})\right|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

(i) 平面 Π_1 与 Π_2 垂直 $\Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

(ii) 平面 Π_1 与 Π_2 平行或重合 $\Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

(2) 两直线的夹角.

直线在平面上的投影：过此直线作平面的垂面，交线即为所求.

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)称为两直线的夹角．设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别是 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，那么，两直线的夹角 φ 由下式确定：

$$\cos\varphi=\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})\right|=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

(i) 直线 L_1 和 L_2 垂直 $\Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

(ii) 直线 L_1 和 L_2 平行或重合 $\Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

(3) 直线与平面的夹角.

当直线 L 与平面 Π 不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角(通常指锐角)称为直线与平面的夹角；当直线 L 与平面 Π 垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$．设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，直线与平面的夹角 φ 由下式确定：

$$\sin\varphi=\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

(i) 直线 L 与平面 Π 垂直 $\Leftrightarrow \boldsymbol{s} /\!/ \boldsymbol{n} \Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$；

(ii) 直线 L 与平面 Π 平行或 L 在平面 Π 上 $\Leftrightarrow \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n} \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

注　线线、线面、面面之间主要有三种位置关系，即平行、垂直、斜交；直线与直线之间还有异面关系，它们都可转化为直线的方向向量、平面的法向量间的关系来判断.

4. 点到平面的距离

(1) 点在平面上的投影：过此点作直线与平面垂直，垂足即为所求.

(2) 平面外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5. 点到直线的距离

(1) 点在直线上的投影：过此点作直线与已知直线垂直相交，垂足即为所求.

(2) 直线外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1\\ m & n & p\end{matrix}\right\|,$$

其中 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为直线上一点.

注 关于距离的问题，要掌握点到直线、点到平面距离的计算，了解两条异面直线公垂线段长度、两条平行直线间的距离、两个平行平面间的距离、直线与平面间(直线与平面平行)的距离的计算.

6. 平面束方程

我们知道，通过空间直线 L 的平面有无穷多个，这些平面的集合称为过直线 L 的平面束. 设平面 Π_1 和 Π_2 的交线为直线 L，其方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

其中 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例，由此可构造一个新的三元一次方程

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 λ 是任意常数，此方程即为过直线 L 的平面束方程(缺少平面 Π_2 的平面束).

注 在求平面方程时，若题设条件中已知平面通过一条直线，且该直线用两

平面的交线来表示，则考虑用平面束方程来处理.

(三) 空间曲面与曲线

1. 空间曲面

(1) 空间曲面的一般方程：$F(x,y,z)=0$.

(2) 柱面.

一般地，直线L沿定曲线C平行移动形成的曲面称为柱面，定曲线C称为柱面的准线，动直线L称为柱面的母线. 在空间直角坐标系中，只含x，y而缺z的方程$F(x,y)=0$表示母线平行于z轴的柱面，其准线就是xOy面上的曲线$C:F(x,y)=0$. 同理，只含x，z而缺y的方程$G(x,z)=0$表示母线平行于y轴的柱面；只含y，z而缺x的方程$H(y,z)=0$表示母线平行于x轴的柱面.

(3) 旋转曲面.

由一条平面曲线C绕其平面上的一条定直线L旋转一周所形成的曲面称为旋转曲面，曲线C称为旋转曲面的母线，定直线L称为旋转曲面的轴.

平面曲线$C:\begin{cases} f(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周所得的旋转曲面方程为$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$，绕$y$轴旋转一周所得的旋转曲面方程为$f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$.

(4) 常见的二次曲面.

(i) 球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$，其中，球心为$M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为$R$；

(ii) 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,b>0,c>0)$；

(iii) 椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z\ (p,q$ 同号)，当$p=q$时，椭圆抛物面就成为旋转抛物面;

(iv) 双曲抛物面：$-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z\ (p,q$ 同号);

(v) 单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a, b, c$ 为正数);

(vi) 双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1\ (a, b, c$ 为正数);

(vii) 椭圆锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$ (a, b 为正数)，当 $a=b$ 时，椭圆锥面就成为圆锥面.

2. 空间曲线

(1) 空间曲线的一般方程：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 此时空间曲线作为两个曲面 $F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$ 的交线.

(2) 空间曲线的参数方程：$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta).\\z=z(t)\end{cases}$

(3) 空间曲线的向量方程：设 $M(x,y,z)$ 为曲线上 $\varGamma$ 的点，因为向径 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}(t)$ 的坐标就是点 M 的坐标，由此可得空间曲线 $\varGamma$ 的向量方程为 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$.

(4) 空间曲线在坐标面上的投影.

一般地，设空间曲线 $\varGamma$ 的方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 以曲线 $\varGamma$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面称为曲线 $\varGamma$ 关于 xOy 面的投影柱面，投影柱面与 xOy 面的交线称为空间曲线 $\varGamma$ 在 xOy 面上的投影曲线，简称投影. 由上述方程组消去变量 z 后得到包含投影柱面的柱面方程 $H(x,y)=0$. 而方程 $\begin{cases}H(x,y)=0,\\z=0\end{cases}$ 所表示的曲线必定包含空间曲线 $\varGamma$ 在 xOy 面上的投影.

同理，消去方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中的变量 x 或 y ，再分别和 $x=0$ 或 $y=0$ 联立，就可得到包含空间曲线 $\varGamma$ 在 yOz 面或 zOx 面上的投影的曲线方程为

$$\begin{cases}R(y,z)=0,\\x=0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}T(x,z)=0,\\y=0.\end{cases}$$

三、典型例题解析

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点.